অধ্যায়-১২

সমতলীয় ভেক্টর

অনুশীলনী-১২

অধ্যায়টি পড়ে যা জানতে পারবে—

১. স্কেলার রাশি ও ভেক্টর রাশি বর্ণনা
২. স্কেলার রাশি ও ভেক্টর রাশি প্রতীকের সাহায্যে ব্যাখ্যা
৩. সমান ভেক্টর, বিপরীত ভেক্টর ও অবস্থান ভেক্টর ব্যাখ্যা
৪. ভেক্টরের যোগ ও যোগবিধি ব্যাখ্যা
৫. ভেক্টরের বিয়োগ ব্যাখ্যা
৬. ভেক্টরের স্কেলার গুণিতক ও একক ভেক্টর ব্যাখ্যা
৭. ভেক্টরের স্কেলার গুণিতক ও বন্টনবিধি ব্যাখ্যা
৮. ভেক্টরের সাহায্যে বিভিন্ন জ্যামিতিক সমস্যার সমাধান

জার্মান গণিতবিদ ডেভিড হিলবার্ট *(David Hilbert, 1862-1943)* ছিলেন উনিশ শতক ও বিশ শতকের শুরুর দিকের বিখ্যাত গণিতবিদ। হিলবার্ট স্পেসের থিওরিসহ তিনি গণিতের আরো অনেক ভিত্তিমূলক ধারণার অবতরণ করেন।

PRACTICE

১৬টি অনুশীলনীর প্রশ্ন।
১১১টি বহুনির্বাচনি প্রশ্ন ■ ৬১টি সাধারণ বহুনির্বাচনি ■ ১৯টি বহুপদী সমাপ্তিসূচক ■ ৩১টি অভিন্ন তথ্যভিত্তিক
২৭টি সৃজনশীল প্রশ্ন ■ ২টি অনুশীলনী ■ ৩টি শ্রেণির কাজ ■ ৯টি মাস্টার ট্রেইনার প্রণীত ■ ১৩টি প্রশ্নব্যাংক

অনুশীলনীর সৃজনশীল বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

১. AB || DC হলে

i. $\overrightarrow{AB} = m.\overrightarrow{DC}$, যেখানে m একটি স্কেলার রাশি
ii. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
iii. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

ওপরের বাক্যগুলোর মধ্যে কোনটি সঠিক ?

ক. i খ. ii
গ. i ও ii ঘ. i, ii ও iii ক

২. দুইটি ভেক্টর সমান্তরাল হলে—

i. এদের যোগের ক্ষেত্রে সামান্তরিক বিধি প্রযোজ্য
ii. এদের যোগের ক্ষেত্রে ত্রিভুজ বিধি প্রযোজ্য
iii. এদের দৈর্ঘ্য সর্বদা সমান

ওপরের বাক্যগুলোর মধ্যে কোনটি সঠিক ?

ক. i খ. ii
গ. i ও ii ঘ. i, ii ও iii গ

৩. AB = CD এবং AB || CD হলে কোনটি সঠিক?

ক. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
খ. $\overrightarrow{AB} = m.\overrightarrow{CD}$ যেখানে $m > 1$
গ. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} < 0$
ঘ. $\overrightarrow{AB} + m.\overrightarrow{CD} = 0$ যেখানে $m > 1$ ক

নিচের তথ্যের আলোকে ৪ ও ৫ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:
AB রেখাংশের ওপর যেকোনো বিন্দু C এবং কোনো ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে A, B ও C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$ ও $\underline{c}$ ।

৪. C বিন্দুটি AB রেখাংশকে 2 : 3 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করলে নিচের কোনটি সঠিক?

ক. $\underline{c} = \dfrac{\underline{a} + 2\underline{b}}{5}$ খ. $\underline{c} = \dfrac{2\underline{a} + \underline{b}}{5}$
গ. $\underline{c} = \dfrac{3\underline{a} + 2\underline{b}}{5}$ ঘ. $\underline{c} = \dfrac{2\underline{a} + 3\underline{b}}{5}$ গ

৫. ভেক্টর মূলবিন্দুটি O হলে নিচের কোনটি সঠিক?

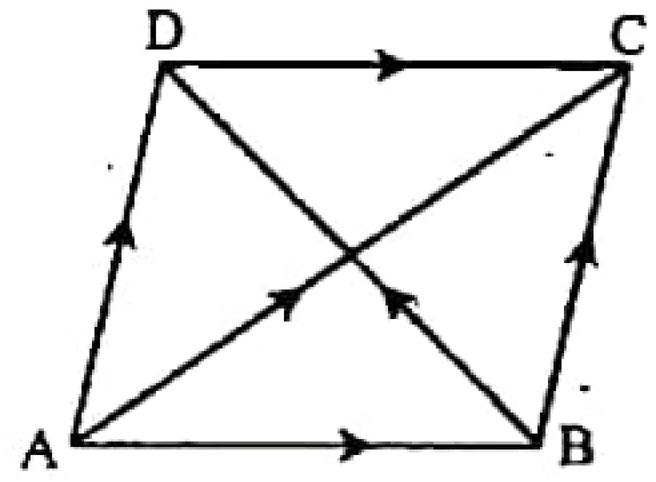
ক. $\overrightarrow{OA} = \underline{a} - \underline{b}$ খ. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AC}$
গ. $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$ ঘ. $\overrightarrow{OC} = \underline{c} - \underline{b}$ গ

অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

৬. ABCD সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় $\overrightarrow{AC}$ ও $\overline{BD}$ হলে $\overline{AB}$ ও $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টরদ্বয়কে $\overline{AD}$ ও $\overline{BD}$ ভেক্টরদ্বয়ের মাধ্যমে প্রকাশ কর এবং দেখাও যে, $\overrightarrow{AC} + \overline{BD} = 2\,\overline{BC}$ এবং $\overrightarrow{AC} - \overline{BD} = 2\,\overline{AB}$

সমাধান: দেওয়া আছে, ABCD একটি সামান্তরিক। $\overrightarrow{AC}$ ও $\overline{BD}$ এর কর্ণদ্বয়। $\overline{AB}$ ও $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টরদ্বয়কে $\overline{AD}$ ও $\overline{BD}$ ভেক্টরদ্বয়ের মাধ্যমে প্রকাশ করতে হবে এবং দেখাতে হবে যে,

$\overrightarrow{AC} + \overline{BD} = 2\,\overline{BC}$ এবং $\overrightarrow{AC} - \overline{BD} = 2\,\overline{AB}$



www.bdniyog.com
www.pathagar.com

প্রমাণ: ΔABD-তে

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$ [ত্রিভুজ বিধি]

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}$ .... (i)

আবার, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ [ত্রিভুজ বিধি]

$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$ [ABCD সামান্তরিক বলে $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$]

$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}$ [$\because \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}$]

$\therefore \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}$ .... (ii)

বা, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BD}$

[উভয় পক্ষে $\overrightarrow{BD}$ যোগ করে পাই]

$= 2\overrightarrow{AD}$

$\therefore \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$ ...... (iii)

[ABCD সামান্তরিক বলে $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$]

আবার, $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = (2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}) - \overrightarrow{BD}$ [(ii) ব্যবহার করে]

$= 2\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{BD}$

$= 2(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD})$

$= 2\overrightarrow{AB}$ [(i) নং ব্যবহার করে]

$\therefore \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AB}$ .... (iv)

এখন, সমীকরণ (i), (ii), (iii) ও (iv) হতে পাই,

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$ এবং $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AB}$ **(প্রমাণিত)**

৭. দেখাও যে, (ক) $-(\underline{a} + \underline{b}) = -\underline{a} - \underline{b}$

(খ) $\underline{a} + \underline{b} = \underline{c}$ হলে $\underline{a} = \underline{c} - \underline{b}$

সমাধান:

(ক) দেখাতে হবে যে, $-(\underline{a} + \underline{b}) = -\underline{a} - \underline{b}$

এখন, $-(\underline{a} + \underline{b}) = (-1)(\underline{a} + \underline{b})$

$= (-1)\underline{a} + (-1)\underline{b}$ [বণ্টন সূত্র]

$= -\underline{a} - \underline{b}$

$\therefore -(\underline{a} + \underline{b}) = -\underline{a} - \underline{b}$ **(দেখানো হলো)**

(খ) দেওয়া আছে, $\underline{a} + \underline{b} = \underline{c}$

প্রমাণ করতে হবে যে, $\underline{a} = \underline{c} - \underline{b}$

দেওয়া আছে, $\underline{a} + \underline{b} = \underline{c}$

বা, $\underline{a} + \underline{b} - \underline{b} = \underline{c} - \underline{b}$ [উভয়পক্ষে $(-\underline{b})$ যোগ করে]

বা, $\underline{a} + \underline{0} = \underline{c} - \underline{b}$

$\therefore \underline{a} = \underline{c} - \underline{b}$

আবার, বিপরীতক্রমে মনে করি,

$\underline{a} = \underline{c} - \underline{b}$

বা, $\underline{a} + \underline{b} = \underline{c} - \underline{b} + \underline{b}$

[উভয় পক্ষে $\underline{b}$ যোগ করে]

$= \underline{c} + \underline{0}$

$\therefore \underline{a} + \underline{b} = \underline{c}$

$\therefore \underline{a} + \underline{b} = \underline{c}$ হলে $\underline{a} = \underline{c} - \underline{b}$ **(দেখানো হলো)**

৮. দেখাও যে, (ক) $\underline{a} + \underline{a} = 2\underline{a}$

(খ) $(m - n)\underline{a} = m\underline{a} - n\underline{a}$

(গ) $m(\underline{a} - \underline{b}) = m\underline{a} - m\underline{b}$

সমাধান:

(ক) দেখাতে হবে যে, $\underline{a} + \underline{a} = 2\underline{a}$

এখন, $\underline{a} + \underline{a} = 1\underline{a} + 1\underline{a}$ [স্কেলার গুণের নিয়মানুসারে]

$= (1 + 1)\underline{a}$ [$\because (m + n)\underline{a} = m\underline{a} + n\underline{a}$]

$= 2\underline{a}$

$\therefore \underline{a} + \underline{a} = 2\underline{a}$ **(দেখানো হলো)**

(খ) দেখাতে হবে যে, $(m - n)\underline{a} = m\underline{a} - n\underline{a}$

এখন, $(m - n)\underline{a} = \{m + (-n)\}a$

$= m\underline{a} + (-n)\underline{a}$ [$\because (m+n)\underline{a} = m\underline{a} + n\underline{a}$]

$= m\underline{a} - n\underline{a}$ [স্কেলার গুণের নিয়মানুসারে]

$\therefore (m - n)\underline{a} = m\underline{a} - n\underline{a}$ **(দেখানো হলো)**

(গ) দেখাতে হবে যে, $m(\underline{a} - \underline{b}) = m\underline{a} - m\underline{b}$.

এখন, $m(\underline{a} - \underline{b}) = m\{(\underline{a} + (-\underline{b})\}$

$= m\underline{a} + m(-\underline{b})$ [$\because m(\underline{a} + \underline{b}) = m\underline{a} + m\underline{b}$]

$= m\underline{a} - m\underline{b}$ [$\because n(-\underline{a}) = -n\underline{a}$]

$\therefore m(\underline{a} - \underline{b}) = m\underline{a} - m\underline{b}$ **(দেখানো হলো)**

৯. (ক) $\underline{a}, \underline{b}$ প্রত্যেকে অশূন্য ভেক্টর হলে দেখাও যে, $\underline{a} = m\underline{b}$ হতে পারে কেবল যদি $\underline{a}, \underline{b}$ এর সমান্তরাল হয়।

সমাধান: দেওয়া আছে, $\underline{a}, \underline{b}$ প্রত্যেকে অশূন্য ভেক্টর। দেখাতে হবে যে, $\underline{a} = m\underline{b}$ হতে পারে কেবল যদি $\underline{a}, \underline{b}$ এর সমান্তরাল হয়।

মনে করি, $\underline{a} = m\underline{b}$। তাহলে $\underline{a}, \underline{b}$ এর সমান্তরাল দেখানোই যথেষ্ট হবে।

$\underline{a} = m\underline{b}$ হওয়ায় $\underline{a}$ ভেক্টরটি $\underline{b}$ এর স্কেলার গুণিতক। সুতরাং $\underline{a}$ এর দিক ও $\underline{b}$ এর দিক সমমুখী হবে যদি $m > 0$ হয় এবং বিপরীতমুখী হবে যদি $m < 0$ হয়। এখানে $m \neq 0$ কারণ $m = 0$ হলে $\underline{a} = \underline{0}$ হবে যা অসম্ভব কেননা $\underline{a}$ একটি অশূন্য ভেক্টর।

$\underline{a}$ ও $\underline{b}$ এর দিক যদি একই হয় তাহলে তারা সদৃশ সমান্তরাল আর যদি বিপরীত হয় তাহলে তারা বিসদৃশ সমান্তরাল হবে। সুতরাং উভয়ক্ষেত্রেই $\underline{a}, \underline{b}$ এর সমান্তরাল। **(দেখানো হলো)**

(খ) $\underline{a}, \underline{b}$ অশূন্য অসমান্তরাল ভেক্টর এবং $m\underline{a} + n\underline{b} = \underline{0}$ হলে দেখাও যে, $m = n = 0$

সমাধান: দেওয়া আছে, $\underline{a}, \underline{b}$ দুইটি অশূন্য অসমান্তরাল ভেক্টর এবং $m\underline{a} + n\underline{b} = \underline{0}$। দেখাতে হবে যে, $m = n = 0$

দেওয়া আছে, $m\underline{a} + n\underline{b} = \underline{0}$

বা, $m\underline{a} + n\underline{b} - n\underline{b} = \underline{0} - n\underline{b}$

[উভয় পক্ষে $(-n\underline{b})$ যোগ করে]

বা, $m\underline{a} + \underline{0} = -n\underline{b}$

$\therefore m\underline{a} = -n\underline{b}$

যদি m ও n অশূন্য হয় তাহলে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$

(i) বিপরীতমুখী হবে যদি m ও n এর চিহ্ন একই হয়।

(ii) সমমুখী হবে যদি m ও n এর চিহ্ন বিপরীত হয়।

উভয় ক্ষেত্রেই $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ সমান্তরাল হবে যা অসম্ভব কেননা দেওয়া আছে যে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ দুইটি অসমান্তরাল ভেক্টর।

$\therefore$ m ও n অশূন্য হতে পারে না।

অর্থাৎ $m = n = 0$. **(দেখানো হলো)**

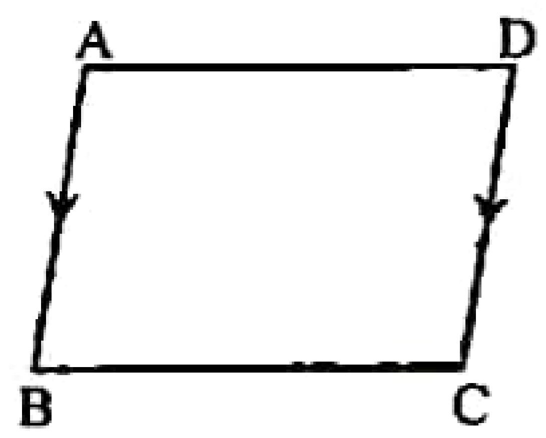
১০. A, B, C, D বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ হলে দেখাও যে, ABCD সামান্তরিক হবে যদি এবং কেবল যদি $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$ হয়।

সমাধান: দেওয়া আছে, A, B, C, D বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$.

দেখাতে হবে যে, ABCD সামান্তরিক হবে যদি এবং কেবল যদি $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$ হয়।

A, B, C ও D বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ ও $\underline{d}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$ এবং $\overrightarrow{DC} = \underline{c} - \underline{d}$



www.pathagar.com

মনে করি, ABCD একটি সামান্তরিক। তাহলে AB ও DC পরস্পর সমান ও সমান্তরাল হবে।

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\therefore \underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$

বিপরীতক্রমে, মনে করি, $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

সুতরাং AB ও DC রেখা দুইটি পরস্পর সমান ও সমান্তরাল অর্থাৎ ABCD একটি সামন্তরিক।

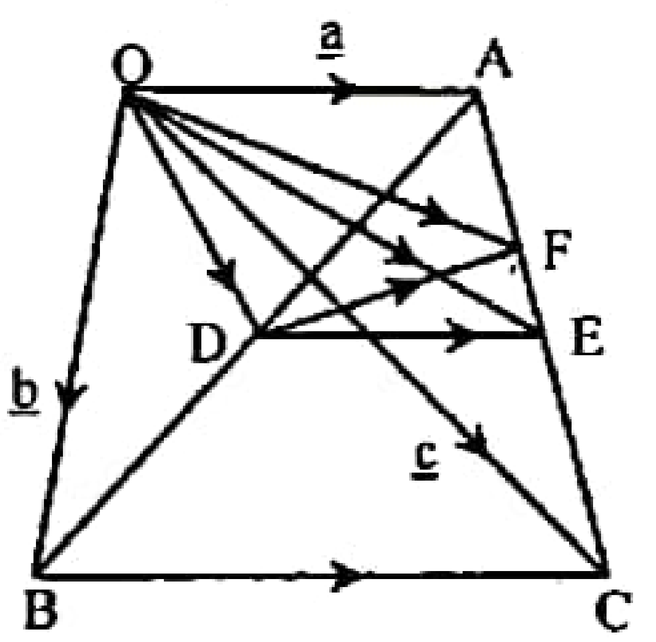
$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক হবে যদি এবং কেবল যদি $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$ হয়। **(দেখানো হলো)**

১১. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের এক বাহুর মধ্যবিন্দু থেকে অঙ্কিত অপর বাহুর সমান্তরাল রেখা তৃতীয় বাহুর মধ্যবিন্দুগামী।

সমাধান: ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ করতে হবে যে, ত্রিভুজের এক বাহুর মধ্যবিন্দু থেকে অঙ্কিত অপর বাহুর সমান্তরাল রেখা তৃতীয় বাহুর মধ্যবিন্দুগামী।

প্রমাণ: (অবস্থান ভেক্টর দিয়ে)

মনে করি, O বিন্দুর সাপেক্ষে, ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুত্রয় A, B, C এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$। D, AB এর মধ্যবিন্দু। DE || BC এবং DE, AC কে E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, E, AC এর মধ্যবিন্দু।



যেহেতু D, AB এর মধ্যবিন্দু, সেহেতু D এর অবস্থান ভেক্টর হবে, $\overrightarrow{OD} = \frac{\underline{a}+\underline{b}}{2} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$. E, AC এর মধ্যবিন্দু না হলে মনে করি, F, AC এর মধ্যবিন্দু। তাহলে F এর অবস্থান ভেক্টর হবে

$\overrightarrow{OF} = \frac{\underline{a}+\underline{c}}{2} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{c})$

$\therefore \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OD}$

$= \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{c}) - \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$

$= \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{c} - \underline{a} - \underline{b})$

$= \frac{1}{2}(\underline{c} - \underline{b})$

$\therefore \overrightarrow{DF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ [$\because \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = \underline{c} - \underline{b}$]

অর্থাৎ DF || BC। কিন্তু দেওয়া আছে, DE || BC। এখন DE ও DF রেখাদ্বয় উভয়েই D বিন্দুগামী এবং উভয়েই BC এর সমান্তরাল। সুতরাং তারা অবশ্যই সমাপতিত হবে অর্থাৎ F বিন্দু, E বিন্দুর সাথে মিলে যাবে।

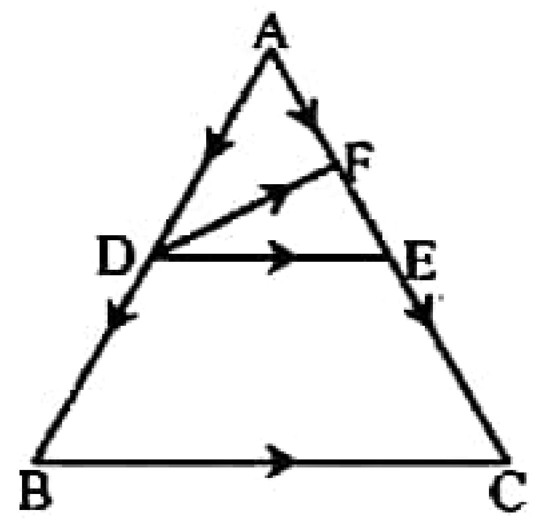
$\therefore$ E, AC এর মধ্যবিন্দু। **(প্রমাণিত)**

বিকল্প পদ্ধতি:

মনে করি, ABC ত্রিভুজের AB বাহুর মধ্যবিন্দু D দিয়ে BC বাহুর সমান্তরাল করে অঙ্কিত রেখা AC কে E বিন্দুতে ছেদ হয়। প্রমাণ করতে হবে যে E, AC এর মধ্যবিন্দু।

মনে করি, E নয় বরং F, AC এর মধ্যবিন্দু।

তাহলে $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ [$\because$ D, AB এর মধ্যবিন্দু]



এবং $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ [$\because$ F, AC এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AF}$ [ত্রিভুজ বিধি]

$= -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AF}$ [$\because \underline{DA} = -\underline{AD}$]

$= \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AD}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; [$\overrightarrow{AD}$ ও $\overrightarrow{AF}$ এর মান বসিয়ে]

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$

$\therefore \overrightarrow{DF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

[$\because \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$]

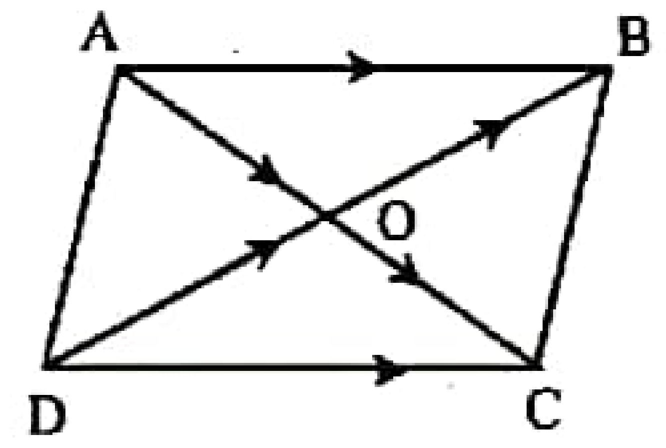
অর্থাৎ DF || BC. কিন্তু DE || BC [দেওয়া আছে]

তাহলে DE ও DF রেখাদ্বয় উভয়েই D বিন্দু দিয়ে যায় এবং BC এর সমান্তরাল। অতএব তারা (অর্থাৎ DE ও DF) অবশ্যই সমাপতিত হবে।

$\therefore$ E ও F একই বিন্দু হবে। অর্থাৎ E, AC এর মধ্যবিন্দু। **(প্রমাণিত)**

১২. প্রমাণ কর যে, কোনো চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে তা একটি সামান্তরিক হয়।

সমাধান: মনে করি, ABCD চতুর্ভুজের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, ABCD একটি সামান্তরিক।



প্রমাণ: $\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OB}$ [$\because$ O, BD এর মধ্যবিন্দু]

এবং $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AO}$ [$\because$ O, AC এর মধ্যবিন্দু]

এখন, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$ [ত্রিভুজ বিধি]

$= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{DO}$ [$\because \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}$]

$= \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC}$ [$\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$]

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ [ত্রিভুজ বিধি]

$\therefore$ AB = DC এবং $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{DC}$ এর ধারক রেখাদ্বয় একই বা সমান্তরাল হবে। এখানে স্পষ্টতঃ $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{BC}$ এর ধারক রেখাদ্বয় সম্পূর্ণ ভিন্ন। অর্থাৎ AB || DC

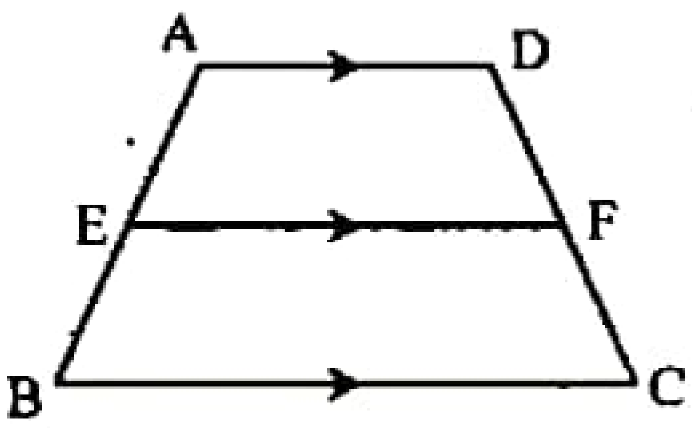
$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক।

[$\because$ সামান্তরিকের বিপরীত বাহুদ্বয় সমান ও সমান্তরাল]

(প্রমাণিত)

www.bdniyog.com
www.pathagar.com

১৩. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ট্রাপিজিয়ামের অসমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল ও তাদের যোগফলের অর্ধেক।



সমাধান: মনে করি, ABCD ট্রাপিজিয়ামের AB ও CD বাহুদ্বয় অসমান্তরাল এবং BC ও AD বাহুদ্বয় সমান্তরাল। E ও F যথাক্রমে AB ও CD এর মধ্যবিন্দু। E, F যোগ করা হলো।

প্রমাণ করতে হবে যে, EF, AD ও BC-এর সমান্তরাল এবং

$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$

প্রমাণ: মনে করি, কোনো ভেক্টর মূল বিন্দুর সাপেক্ষে A, B, C, D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ ।

$\therefore \overrightarrow{BC} = \underline{c} - \underline{b}, \ \overrightarrow{AD} = \underline{d} - \underline{a}$

$\therefore$ E বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$ [$\because$ E, AB এর মধ্যবিন্দু]

এবং F বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$

[$\because$ F, CD এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore \overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d}) - \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$

$= \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d} - \underline{a} - \underline{b})$

$= \frac{1}{2}\{(\underline{c} - \underline{b}) + (\underline{d} - \underline{a})\}$

$\therefore \overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$

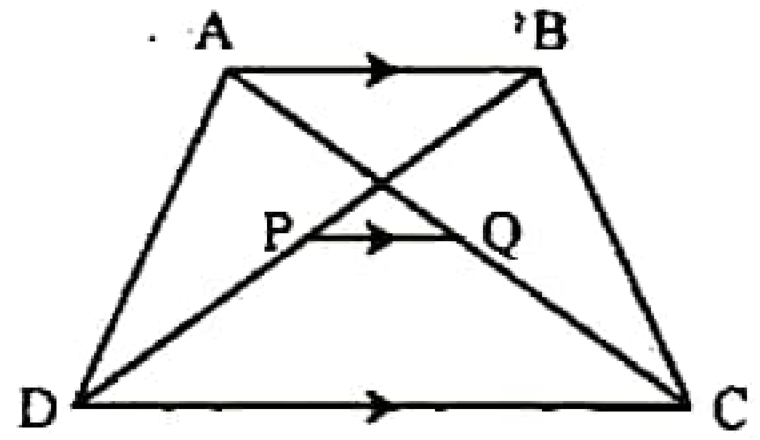
কিন্তু BC ও AD পরস্পর সমান্তরাল হওয়ায় $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}$ ভেক্টরটিও তাদের (অর্থাৎ BC ও AD এর) সমান্তরাল হবে। সুতরাং $\overrightarrow{EF}$ ভেক্টরও BC ও AD এর সমান্তরাল হবে।

কারণ, $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$

$\therefore \overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD})$ **(প্রমাণিত)**

১৪. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল এবং তাদের বিয়োগফলের অর্ধেক।

সমাধান:



মনে করি, ABCD ট্রাপিজিয়ামের AB||CD এবং AC ও BD কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে Q ও P। P, Q যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, $PQ = \frac{1}{2}(DC - AB)$

এবং PQ || AB || CD.

প্রমাণ: মনে করি, কোনো ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে A, B, C, D এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$.

$\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$

$\overrightarrow{DC} = \underline{c} - \underline{d}$

$\therefore$ P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{d})$

[$\because$ P, BD এর মধ্যবিন্দু]

এবং Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{c})$ [$\because$ Q, AC এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{c}) - \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{d})$

$= \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{c} - \underline{b} - \underline{d})$

বা, $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}((\underline{c} - \underline{d}) - (\underline{b} - \underline{a}))$

$\therefore \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB})$

AB || CD হওয়ায় $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB}$ ভেক্টরটিও $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ ভেক্টরের সমান্তরাল হবে। তাহলে $\overrightarrow{PQ}$ ভেক্টরটিও $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ ভেক্টরদ্বয়ের সমান্তরাল হবে।

কারণ $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB})$

$\therefore |\overrightarrow{PQ}| = \frac{1}{2}|(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB})| = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{DC}| - |\overrightarrow{AB}|)$

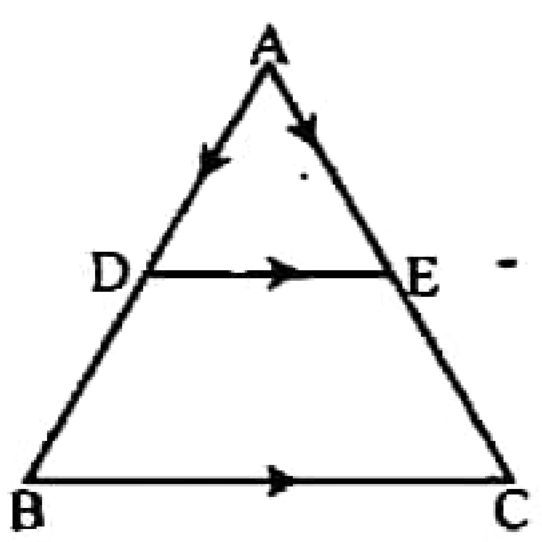
$\therefore PQ = \frac{1}{2}(DC - AB)$

অর্থাৎ PQ || AB || DC

$\therefore PQ = \frac{1}{2}(DC - AB)$ **(প্রমাণিত)**

অনুশীলনীর সৃজনশীল রচনামূলক প্রশ্ন

প্রশ্ন ▶ ১৫



ΔABC এর AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E.

ক. $(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE})$ কে $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, BC || DE এবং $DE = \frac{1}{2}BC$.

গ. ABCD ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, MN || DE || BC এবং $MN = \frac{1}{2}(BC - DE)$

১৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ΔADE–এ

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$ [ত্রিভুজ বিধি]

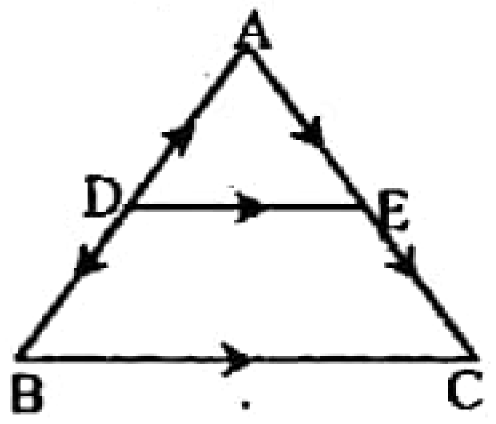
$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ [যেহেতু E, AC এর মধ্যবিন্দু।]

সুতরাং, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

www.bdniyog.com
www.pathagar.com

ঘ মনে করি, ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E।

D, E যোগ করা হলো। ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ করতে হবে যে $DE = \frac{1}{2}BC$ এবং $DE \parallel BC$



প্রমাণ: D ও E যথাক্রমে AB ও AC এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

ত্রিভুজ বিধি অনুসারে পাই,

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$

বা, $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ .... (i)

এবং $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}$

$= -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$

$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ [$\because \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$]

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ [সমীকরণ (i) হতে]

সুতরাং $|\overrightarrow{DE}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$

$\therefore DE = \frac{1}{2}BC$ এবং $\overrightarrow{DE}$ ও $\overrightarrow{BC}$ এর ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল।

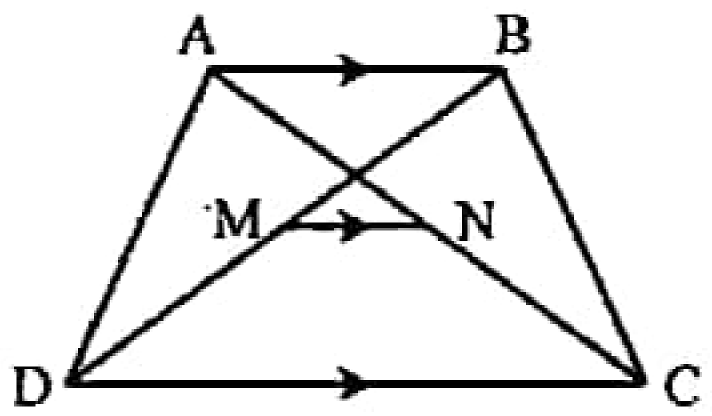
কিন্তু D ও E যথাক্রমে AB ও AC এর মধ্যবিন্দু বলে $\overrightarrow{DE}$ ও $\overrightarrow{BC}$ এর ধারক রেখা একই হতে পারে না।

$\therefore DE \parallel BC$

অর্থাৎ $DE = \frac{1}{2}BC$ এবং $DE \parallel BC$ **(প্রমাণিত)**

[বি:দ্র: পাঠ্যবইয়ের প্রশ্নে $AB \parallel DC$ এর স্থলে $DE \parallel BC$ হবে।]

গ



মনে করি, BCDE ট্রাপিজিয়ামের $DE \parallel BC$ এবং CD ও BE কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে N ও M। M, N যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, $MN = \frac{1}{2}(DC - AB)$

এবং $MN \parallel AB \parallel CD$.

প্রমাণ: মনে করি, কোনো ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে A, B, C, D এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$.

$\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$

$\overrightarrow{DC} = \underline{c} - \underline{d}$

$\therefore$ M বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{d})$

[$\because$ M, BD এর মধ্যবিন্দু]

এবং N বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{c})$ [$\because$ N, AC এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{c}) - \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{d}) = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{c} - \underline{b} - \underline{d})$

বা, $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\{(\underline{c} - \underline{d}) - (\underline{b} - \underline{a})\}$

$\therefore \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB})$

$AB \parallel CD$ হওয়ায় $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB}$ ভেক্টরটিও $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ ভেক্টরের সমান্তরাল হবে। তাহলে $\overrightarrow{MN}$ ভেক্টরটিও $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ ভেক্টরদ্বয়ের সমান্তরাল হবে।

কারণ $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB})$

$\therefore |\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2}|(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB})| = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{DC}| - |\overrightarrow{AB}|)$

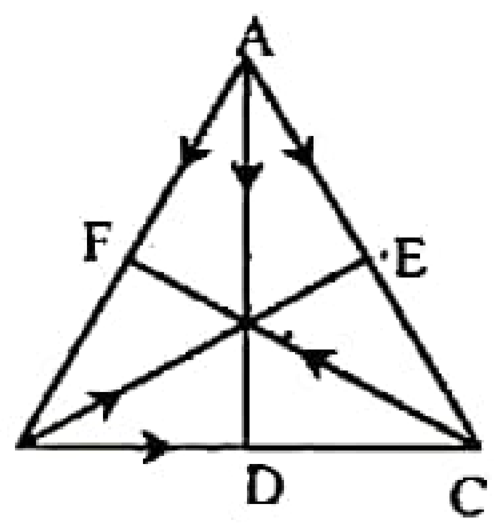
$\therefore PQ = \frac{1}{2}(DC - AB)$

অর্থাৎ $MN \parallel AB \parallel DC$

$\therefore MN = \frac{1}{2}(DC - AB)$

[**বি: দ্র:** পাঠ্যবইয়ের প্রশ্নে $MN \parallel DE \parallel BC$ এবং $MN = \frac{1}{2}(BC - DC)$ এর স্থলে $MN \parallel AB \parallel DC$ এবং $MN = \frac{1}{2}(DC - AB)$ হবে।]

প্রশ্ন ▶ ১৬ **ΔABC এর BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F.**



ক. $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টরকে $\overrightarrow{BE}$ ও $\overrightarrow{CF}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

খ. প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \underline{O}$

গ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, F বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত BC এর সমান্তরাল রেখা অবশ্যই E বিন্দুগামী হবে।

১৬ নং প্রশ্নের সমাধান

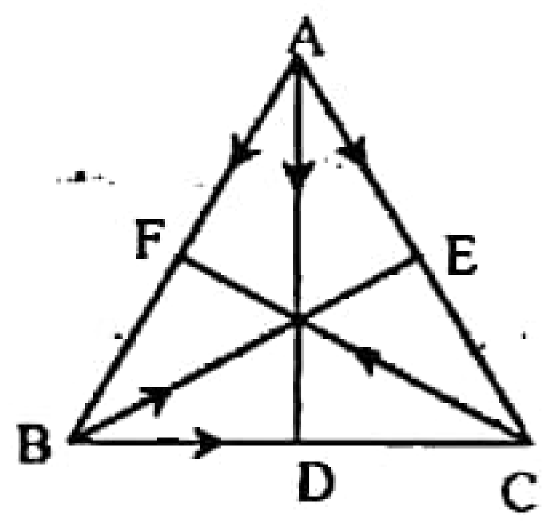
ক $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE}$

বা, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{BE}$ [ত্রিভুজ বিধি]

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BE}$

[E, AC এর মধ্যবিন্দু বলে $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ এবং $\overrightarrow{EB} = -\overrightarrow{BE}$]

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{CF}) - \overrightarrow{BE}$ [ত্রিভুজ বিধি]



$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CF}\right) - \overrightarrow{BE}$

[F, AB এর মধ্যবিন্দু বলে $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$]

www.bdniyog.com
www.pathagar.com

বা, $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CF} - \overrightarrow{BE}$

বা, $4\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{CF} - 4\overrightarrow{BE}$ [উভয়পক্ষকে 4 দ্বারা গুণ করে]

বা, $4\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{CF} - 4\overrightarrow{BE} - \overrightarrow{AB}$

[উভয়পক্ষে $(-\overrightarrow{AB})$ যোগ করে]

বা, $3\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{CF} - 4\overrightarrow{BE}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CF} - \frac{4}{3}\overrightarrow{BE}$ [উভয় পক্ষকে $\frac{1}{3}$ দ্বারা গুণ করে]

গ $\triangle ABD$-এ ত্রিভুজ সূত্র হতে পাই,

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$

$\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ .... (i)

[D, BC এর মধ্যবিন্দু বলে $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$]

$\triangle ACF$-এ $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF}$

$\therefore \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AC}$ [$\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA}$]

$\therefore \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ .... (ii)

[F, AB এর মধ্য বিন্দু বলে $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$]

এবং $\triangle ABE$-এ $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$

বা, $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB}$

$\therefore \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ .... (iii)

[E, AC এর মধ্যবিন্দু বলে $AE = \frac{1}{2}AC$]

এখন, (i), (ii) ও (iii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

বা, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

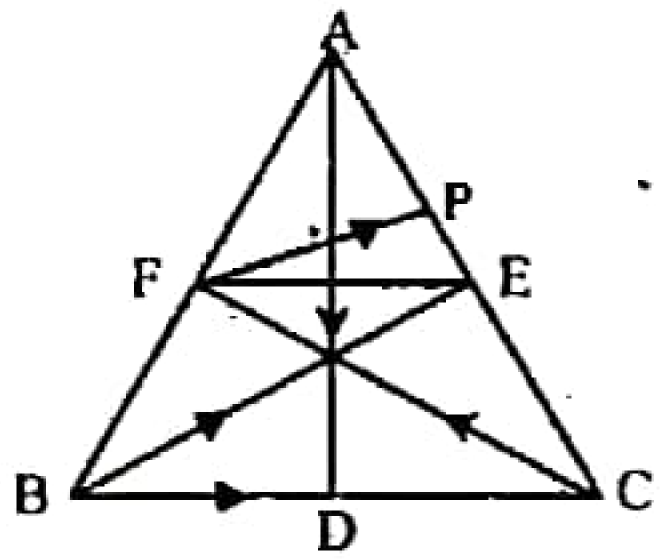
$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$= \underline{0}$

$\therefore \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \underline{0}$ **(প্রমাণিত)**

ঘ মনে করি, ABC ত্রিভুজের AB বাহুর মধ্যবিন্দু F. BC বাহুর সমান্তরাল করে অঙ্কিত রেখা AC কে E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, E, AC এর মধ্যবিন্দু।
ধরি, E নয় বরং P, AC এর মধ্যবিন্দু।



তাহলে $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ [$\because$ F, AB এর মধ্যবিন্দু এবং $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\because$ P, $\overrightarrow{AC}$ এর মধ্যবিন্দু।]

$\therefore \overrightarrow{FP} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AP}$ [$\therefore \overrightarrow{FA} = -\overrightarrow{AF}$]

$= \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$\therefore \overrightarrow{FP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

অর্থাৎ, FP ‖ BC কিন্তু FE ‖ BC (দেওয়া আছে)

তাহলে $\overrightarrow{FE}$ ও $\overrightarrow{FP}$ রেখাদ্বয় উভয়েই F বিন্দু দিয়ে যায় এবং $\overrightarrow{BC}$ এর সমান্তরাল। অতএব তারা (অর্থাৎ $\overrightarrow{FE}$ ও $\overrightarrow{FP}$) অবশ্যই সমাপতিত হবে।

$\therefore$ E ও P একই বিন্দু হবে। অর্থাৎ E, AC এর মধ্যবিন্দু।

(প্রমাণিত)

মাস্টার ট্রেইনার প্রণীত সৃজনশীল বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

[illegible] স্কেলার রাশি ও ভেক্টর রাশি | Text পৃষ্ঠা-[illegible]

- যে রাশি কেবলমাত্র এককসহ পরিমাণ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে প্রকাশ করা যায়, তাকে স্কেলার বা অদিক বা নির্দিক রাশি বলা হয়।
- যে রাশিকে সম্পূর্ণরূপে প্রকাশ করার জন্য তার পরিমাণ ও দিক উভয়ের প্রয়োজন হয়, তাকে ভেক্টর বা সদিক রাশি বলা হয়।

১. **"বাঁশটি ৫ মিটার লম্বা" - কথাটিতে কোন রাশির প্রকাশ হয়েছে?** (সহজ)
ক স্কেলার খ সদিক গ ভেক্টর ঘ দিক — ক

২. **স্কেলার রাশি প্রকাশের জন্য কিসের প্রয়োজন?** (সহজ) [শেরপুর সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়; শেরপুর]
ক শুধু মান খ শুধু দিক
গ মান ও দিক উভয়ই ঘ মান অথবা দিক — ক

৩. **যে সকল রাশিকে কেবলমাত্র এককসহ পরিমাণ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে বোঝানো যায় ঐ রাশির নাম কি?** (মধ্যম)
ক নির্দিক খ দিক গ ভেক্টর ঘ সদিক — ক

৪. **নিচের কোনটি স্কেলার রাশি?** (মধ্যম) [নাটোর সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়, নাটোর]; [আই.ই.টি গর্ভঃ হাই স্কুল,নারায়ণগঞ্জ]
ক ওজন খ বল গ দ্রুতি ঘ সরণ — গ

৫. **ভেক্টর রাশি প্রকাশের জন্য কিসের প্রয়োজন?** (সহজ)
ক শুধু মান খ শুধু দিক
গ মান অথবা দিক ঘ মান ও দিক উভয়ই — ঘ

৬. **ভেক্টর রাশির অপর নাম কী?** (সহজ) [শেরপুর সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, শেরপুর]
ক অদিক রাশি খ নির্দিক রাশি
গ সদিক রাশি ঘ স্কেলার রাশি — গ

৭. **নিচের কোন রাশি প্রকাশের জন্য মান ও দিক উভয়েই প্রয়োজন?** (সহজ)
ক আয়তন খ ভর গ তাপমাত্রা ঘ বেগ — ঘ

৮. **নিচের কোনটি ভেক্টর রাশি?** (সহজ)
ক 7°C খ $5cm^3$ গ 7N ঘ 5kg — গ

www.bdniyog.com

www.pathagar.com

৯. **নিচের কোনটি ভেক্টর রাশি?** (সহজ) [ঝিনাইদহ সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়, ঝিনাইদহ; যশোর জিলা স্কুল, যশোর; শেরপুর সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, শেরপুর; সরকারি মুসলিম উচ্চ বিদ্যালয়, চট্টগ্রাম]
(ক) দ্রুতি (খ) আয়তন (গ) তাপমাত্রা (ঘ) বল **(ঘ)**

১০. **ভেক্টর রাশির—**
i. মান ও দিক উভয় আছে।
ii. দিক আছে কিন্তু মান নেই।
iii. উদাহরণ হলো ওজন, ত্বরণ।
নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)
(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii **(খ)**

১১. **স্কেলার রাশির—**
i. কেবলমাত্র মান আছে।
ii. কেবলমাত্র দিক আছে।
iii. মান আছে কিন্তু দিক নাই।
নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)
(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii **(খ)**

১২. **স্কেলার রাশির উদাহরণ—**
i. দৈর্ঘ্য ও ভর।
ii. দ্রুতি ও সময়।
iii. আয়তন ও তাপমাত্রা।
নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)
(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii **(ঘ)**

★★ ১২.২ ভেক্টর রাশির জ্যামিতিক প্রতিরূপ: দিক নির্দেশক রেখাংশ | Text পৃষ্ঠা-২৫৬

- কোনো দিক নির্দেশক রেখাংশের আদিবিন্দু A এবং অন্তবিন্দু B হলে ঐ রেখাংশকে $\overrightarrow{AB}$ দ্বারা সূচিত করা হয়।
- কোনো দিক নির্দেশক রেখাংশ যে অসীম সরলরেখার অংশবিশেষ তাকে ঐ ভেক্টরের ধারক রেখা বা ধারক বলে।

১৩. **কোনো দিক নির্দেশক রেখাংশের আদিবিন্দু A এবং অন্তবিন্দু B হলে ঐ রেখাংশকে কি দ্বারা সূচিত করা হয়?** (সহজ)
(ক) AB (খ) BA (গ) $\overrightarrow{AB}$ (ঘ) $\overrightarrow{BA}$ **(গ)**

১৪. **নিচের কোন দুইটি সমার্থক ধারণা?** (মধ্যম)
(ক) স্কেলার ও ভেক্টর (খ) স্কেলার ও সদিক
(গ) ভেক্টর ও দিক নির্দেশক রেখাংশ
(ঘ) ভেক্টর ও অদিক **(গ)**

১৫. **কোনো ভেক্টর যে অসীম সরলরেখার অংশ সেটি কী রেখা?** (মধ্যম)
(ক) ধারক (খ) $\overrightarrow{AB}$ (গ) সরলরেখা (ঘ) বক্ররেখা **(ক)**

১৬. **$\overrightarrow{AB} = \underline{u}$ হলে, ভেক্টরটির আদিবিন্দু কোনটি?** (সহজ)
(ক) u (খ) B (গ) AB (ঘ) A **(ঘ)**

১৭. **দুইটি ভেক্টরের মান সমান এবং ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল ও একই দিক হলে, ভেক্টর দুইটি পরস্পর কী হবে?** (মধ্যম)
(ক) সমান্তরাল (খ) সমান (গ) সদৃশ (ঘ) একক **(খ)**

১৮. **$\overrightarrow{BA}$ দিক নির্দেশক রেখাংশের মান কত?** (সহজ) [কুমিল্লা জিলা স্কুল, কুমিল্লা]
(ক) BA (খ) $\overrightarrow{BA}$ (গ) $\overrightarrow{AB}$ (ঘ) AB + BA **(ক)**

১৯. **$\overrightarrow{AB}$ দিক নির্দেশক রেখাংশ—** [ঝালকাঠি সরকারি হরচন্দ্র বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, ঝালকাঠি]
i. একটি ভেক্টর রাশি।
ii. এর দৈর্ঘ্য $|\overrightarrow{AB}|$।
iii. এর দিক B বিন্দু থেকে A বিন্দুর দিকে।
নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)
(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii **(ক)**

নিচের তথ্যের ভিত্তিতে (২০–২২) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$\overrightarrow{DB}$ একটি দিক নির্দেশক রেখাংশ।

২০. **উক্ত রেখাংশের আদিবিন্দু কোনটি?** (সহজ)
(ক) B (খ) D (গ) $\overrightarrow{B}$ (ঘ) $\overrightarrow{D}$ **(খ)**

২১. **উক্ত রেখাংশের মান কত?** (সহজ)
(ক) $\overrightarrow{BD}$ (খ) BD + DB (গ) $\overrightarrow{DB}$ (ঘ) DB **(ঘ)**

২২. **উক্ত রেখাংশটি কোন রাশি?** (সহজ)
(ক) ধারক (খ) স্কেলার
(গ) দিক নির্দেশক (ঘ) ভেক্টর **(ঘ)**

নিচের তথ্যের আলোকে (২৩–২৫) নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

$\overrightarrow{AB} = \underline{u}$

২৩. **ভেক্টরটির আদিবিন্দু কোনটি?** (সহজ)
(ক) A (খ) B (গ) u (ঘ) AB **(ক)**

২৪. **ভেক্টরটির অন্তবিন্দু কোনটি?** (সহজ)
(ক) A (খ) B (গ) u (ঘ) AB **(খ)**

২৫. **$\overrightarrow{BA}$ = কত?** (মধ্যম)
(ক) AB (খ) $-\overrightarrow{BA}$ (গ) $\overrightarrow{AB}$ (ঘ) $-\underline{u}$ **(ঘ)**

★★★ ১২.৩ ভেক্টরের সমতা, বিপরীত ভেক্টর | Text পৃষ্ঠা-২৫৭

- যদি দুইটি ভেক্টরের দিক একই, দৈর্ঘ্য সমান এবং তাদের ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল হয় তাহলে তাদেরকে সমান ভেক্টর বলে।
- $\vec{u}$ যেকোনো ভেক্টর হলে যদি অপর একটি ভেক্টর $\vec{v}$ নির্ণয় করা যায় যাতে $\vec{v} = -\vec{u}$ হয় তাহলে $\vec{v}$ বা $-\vec{u}$ কে $\vec{u}$ ভেক্টরের বিপরীত ভেক্টর বলে।
দুইটি ভেক্টর পরস্পর বিপরীত হবে যদি তাদের— দৈর্ঘ্য সমান হয়; ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল হয় এবং দিক বিপরীত হয়।

২৬. **$\underline{u}$ এর ধারক এবং $\underline{v}$ এর ধারক রেখাদ্বয় অভিন্ন বা সমান্তরাল হলে, সংক্ষেপে $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ কে কী বলা যায়?** (মধ্যম)
(ক) সমান ভেক্টর (খ) সমান্তরাল ভেক্টর
(গ) অসমান ভেক্টর (ঘ) অসমান্তরাল ভেক্টর **(খ)**

২৭. **$\underline{u} = \underline{v}$ এবং $\underline{v} = \underline{w}$ সম্পর্ক দুটি দ্বারা কোন সম্পর্কটি তৈরি করা যায়?** (সহজ)
(ক) $\underline{v} = -\underline{u}$ (খ) $\underline{w} = -\underline{v}$
(গ) $\underline{u} = \underline{v} \neq \underline{w}$ (ঘ) $\underline{u} = \underline{w}$ **(ঘ)**

২৮. **$\underline{u} = -\underline{v}$ হলে, নিচের কোনটি সঠিক?** (সহজ)
(ক) $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ একইমুখী (খ) $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ বিপরীতমুখী
(গ) $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ এর মান সমান (ঘ) $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ সমান ভেক্টর **(খ)**

২৯. **$\underline{a} - 5\underline{b}$ ভেক্টরটির সমান্তরাল কোনটি?** (সহজ)
(ক) $\underline{a} + 5\underline{b}$ (খ) $5\underline{a} - \underline{b}$ (গ) $\underline{b} - 5\underline{a}$ (ঘ) $2\underline{a} - 10\underline{b}$ **(ঘ)**

৩০. **$\underline{a}$ অশূন্য ভেক্টর হলে $\underline{a} + (-\underline{a})$ = কত?** (সহজ) [কৃষি বিশ্ববিদ্যালয় হাই স্কুল, ময়মনসিংহ]
(ক) $\underline{0}$ (খ) 1 (গ) 2 (ঘ) 2a **(ক)**

৩১. **$\overrightarrow{AB}$ = b হলে $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA}$ এর মান নিচের কোনটি?** (মধ্যম) [শেরপুর সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, শেরপুর; নাটোর সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়, নাটোর; রাজশাহী সরকারী বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, হেলেনাবাদ; বিদ্যাময়ী গভ: গার্লস হাই স্কুল, ময়মনসিংহ]
(ক) 2b (খ) b (গ) 0 (ঘ) −2b **(গ)**

ব্যাখ্যা: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} = b - b = 0$

www.bdniyog.com
www.pathagar.com

৩২. যেকোনো ভেক্টর x-এর জন্য নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ⓚ $\underset{x}{\longrightarrow}$ $\underset{-x}{\longrightarrow}$ ⓛ $\underset{x}{\longrightarrow}$ $\underset{-x}{\longleftarrow}$

ⓖ $\underset{x}{\longrightarrow}$ $\underset{-3x}{\longrightarrow}$ ⓓ $\underset{x}{\longleftarrow}$ $\underset{-3x}{\longleftarrow}$ **খ**

৩৩. $\overrightarrow{AB}$ যেকোনো ভেক্টর হলে, নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ) [শেরপুর সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, শেরপুর]

ক $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ খ $\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|$

গ $|\overrightarrow{AB}| = -|\overrightarrow{BA}|$ ঘ $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ **ঘ**

৩৪. $\underline{a} + 5\underline{b} = 0$ হলে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ ভেক্টরদ্বয় কীরূপ? (সহজ) [ঝালকাঠি সরকারি হরচন্দ্র বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, ঝালকাঠি; রাজশাহী সরকারী বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, হেলেনাবাদ]

ক লম্ব খ সমান

গ সমান্তরাল ও দিক একই ঘ সমান্তরাল ও বিপরীতমুখী **ঘ**

৩৫. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{QR}$ হলে $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{QR}$ এর—

i. ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল।
ii. দৈর্ঘ্য সমান ও দিক একই।
iii. দৈর্ঘ্য অসমান ও দিক বিপরীত।

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ক i ও ii খ ii ও iii গ ii ও iii ঘ i,ii ও iii **ক**

৩৬. একটি ভেক্টর $\underline{u}$ অপর একটি ভেক্টর $\underline{v}$ এর সমান হলে— [কুমিল্লা জিলা স্কুল, কুমিল্লা]

i. $\underline{u}$ এর দৈর্ঘ্য সমান $\underline{v}$ এর দৈর্ঘ্য।
ii. $\underline{u}$ এবং $\underline{v}$ সমান্তরাল ভেক্টর।
iii. $\underline{u}$ এর দিক $\underline{v}$ এর দিকের সাথে একমুখী।

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i,ii ও iii **ঘ**

৩৭. $\underline{w}$, $\underline{v}$ এর বিপরীত ভেক্টর হলে—

i. $\underline{w}$ এর দিক $\underline{v}$ এর বিপরীত দিক।
ii. $\underline{w}$ এর ধারক $\underline{v}$ এর ধারকের সমান্তরাল।
iii. $|\underline{w}| = |\underline{v}|$.

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i,ii ও iii **ঘ**

নিচের তথ্যের আলোকে (৩৮–৪০) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$\underline{p}$ এর সমান ভেক্টর $\underline{q}$ এবং $\underline{p} = \overrightarrow{AB}$.

৩৮. $\underline{q}$ = কত? (সহজ)

ক $\overrightarrow{AB}$ খ $\overrightarrow{BA}$ গ $|\overrightarrow{AB}|$ ঘ $-\overrightarrow{AB}$ **ক**

৩৯. $\underline{p} = \underline{r}$ হলে নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক $\underline{p} = \underline{w}$ খ $\underline{q} = \underline{r}$ গ $\underline{r} = \underline{w}$ ঘ $\underline{p} = \underline{q} = \underline{r}$ **ঘ**

৪০. $\underline{q}$ এর মান নিচের কোনটি? (সহজ)

ক $\underline{p}$ খ $\underline{q}$ গ $|\overrightarrow{AB}|$ ঘ $\underline{r}$ **গ**

নিচের তথ্যের ভিত্তিতে (৪১–৪৩) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$\underline{u}$ এর বিপরীত ভেক্টর $\underline{v}$ এবং $\underline{u} = \overrightarrow{AB}$

৪১. $\underline{v}$ = কত? (সহজ)

ক $\overrightarrow{AB}$ খ $\overrightarrow{BA}$ গ $|\overrightarrow{BA}|$ ঘ $\underline{u}$ **খ**

৪২. $\underline{u}$ এর সাপেক্ষে $\underline{v}$ এর দিক কোনটি? (সহজ)

ক অভিন্ন খ সমান্তরাল

গ লম্ব বরাবর ঘ বিপরীত **ঘ**

৪৩. $\underline{u}$ এর দিক কোনটি? (সহজ)

ক A থেকে B এর বিপরীত দিকে খ A থেকে B এর লম্ব দিকে

গ A থেকে B এর দিকে ঘ B থেকে A এর দিকে **গ**

★★★ ১২.৪ ভেক্টরের যোগ ও বিয়োগ | Text পৃষ্ঠা-২৫৮

- $\underline{u}$ এবং $\underline{v}$ দুইটি ভেক্টর হলে এদের যোগফল বা লব্ধিকে $\underline{u} + \underline{v}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
- কোনো সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু দ্বারা দুইটি ভেক্টর $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ এর মান ও দিক সূচিত হলে, ঐ সামান্তরিকের যে কর্ণ $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ ভেক্টরদ্বয়ের সূচক রেখার ছেদবিন্দুগামী তা দ্বারা $\underline{u} + \underline{v}$ ভেক্টরের মান ও দিক সূচিত হয়। ইহা ভেক্টর যোগের সামান্তরিক বিধি।
- দুই বা ততোধিক ভেক্টরের যোগফলকে তাদের লব্ধি বলে। বল বা বেগের লব্ধি নির্ণয়ের ক্ষেত্রে ভেক্টর যোজন পদ্ধতি অনুসরণ করা যায়।
- দুটি ভেক্টর সমান্তরাল হলে তাদের যোগের ক্ষেত্রে সামান্তরিক বিধি প্রযোজ্য নয়, কিন্তু ত্রিভুজ বিধি সকল ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য।
- $\underline{u}$ এবং $\underline{v}$ ভেক্টরদ্বয়ের বিয়োগফল বলতে $\underline{u}$ এবং $(-\underline{v})$ ভেক্টরদ্বয়ের বীজগাণিতিক যোগফলকে বোঝায়।
- যে ভেক্টরের মান শূন্য তাকে শূন্য ভেক্টর বলে। একে $\underline{0}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। শূন্য ভেক্টরের কোনো নির্দিষ্ট দিক নেই।

৪৪. $\underline{v}$ এর অন্তবিন্দু, $\underline{w}$ এর আদিবিন্দু হলে, ভেক্টরদ্বয় কি হলে ত্রিভুজ উৎপন্ন করা সম্ভব? (মধ্যম) [শেরপুর সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, শেরপুর]

ক সমান্তরাল খ অসমান্তরাল

গ মান একই ঘ ধারক একই **খ**

৪৫. $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$ ও $\overrightarrow{BC} = \underline{v}$ হলে, $\underline{u} + \underline{v}$ = কত? (মধ্যম)

ক $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ খ $\overrightarrow{AB}$ গ $\overrightarrow{BC}$ ঘ $\overrightarrow{AC}$ **ঘ**

৪৬. সামান্তরিক বিধি প্রযোজ্য হয় না দুইটি ভেক্টরের কোন সম্পর্কের ক্ষেত্রে? (মধ্যম)

ক দিক সমান খ সমান্তরাল

গ বিপরীতমুখী ঘ মান সমান **খ**

৪৭. $\underline{u} = \overrightarrow{AB}$ ও $\underline{v} = \overrightarrow{AC}$ হলে, $\underline{u} - \underline{v}$ = কত? (মধ্যম)

ক $\overrightarrow{BA}$ খ $\overrightarrow{CA}$ গ $\overrightarrow{BC}$ ঘ $\overrightarrow{CB}$ **ঘ**

৪৮. DEFG সামান্তরিকের $\overrightarrow{DE} = \underline{s}$ এবং $\overrightarrow{DG} = \underline{t}$ হলে লব্ধি ভেক্টর কোনটি? (সহজ)

ক $\underline{s}$ খ $\underline{t}$ গ $\underline{s} + \underline{t}$ ঘ $\underline{s} - \underline{t}$ **ঘ**

৪৯. যে ভেক্টরের আদি বিন্দু ও অন্তবিন্দু একই, এরূপ ভেক্টরকে কোন ভেক্টর বলা হয়? (সহজ)

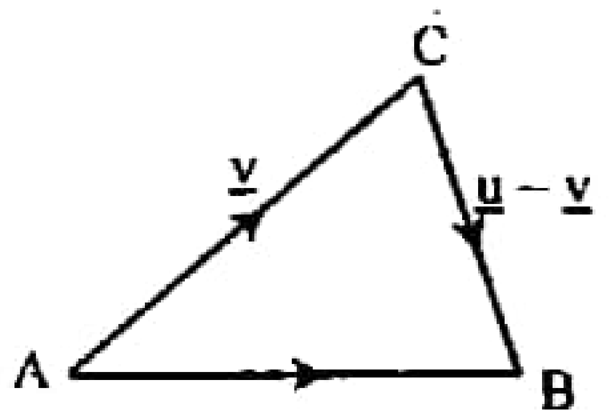
ক লব্ধি খ একমুখি গ বিপরীত ঘ শূন্য **ঘ**

৫০. ভেক্টরের ক্ষেত্রে কোন সম্পর্কটি সঠিক? (সহজ) [রাজশাহী সরকারী বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, হেলেনাবাদ]

ক $\overrightarrow{AB} = \underline{0}$ খ $|\overrightarrow{AB}| = \underline{0}$

গ $|\overrightarrow{BA}| = \underline{0}$ ঘ $\overrightarrow{AA} = \underline{0}$ **ঘ**

৫১.



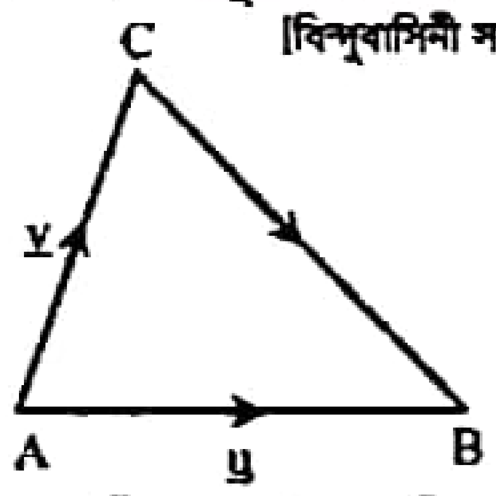
$\overrightarrow{CB} = \underline{u} - \underline{v}$ এবং $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$ হলে, $\overrightarrow{AB}$ = কত? (সহজ)

ক $\underline{u} + \underline{v}$ খ $\underline{v}$ গ $\underline{u}$ ঘ $\underline{u} - \underline{v}$ **গ**

www.bdniyog.com
www.pathagar.com

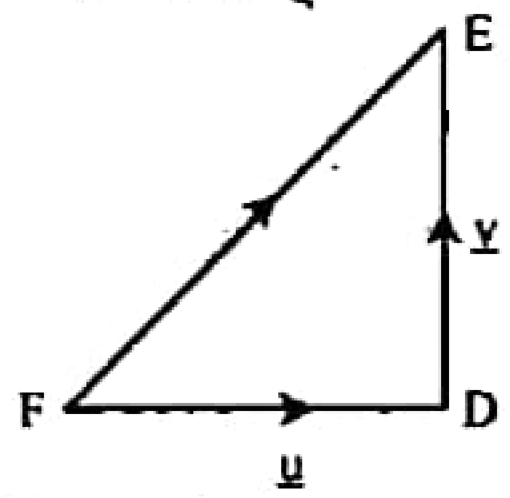
৫২. $\underline{u} = \overrightarrow{AB}$ এবং $-\underline{u} = \overrightarrow{BA}$ হলে, $\underline{u} + (-\underline{u})$ কী ধরনের ভেক্টর? (মধ্যম)
ক একক খ অসমান গ শূন্য ঘ লব্ধি **গ**

৫৩. $\overrightarrow{CB}$ এর মান ও দিক সূচিত হয় নিচের কোনটি দ্বারা? (সহজ) [বিন্দুবাসিনী সরকারী বালক উচ্চ বিদ্যালয়, টাঙ্গাইল]



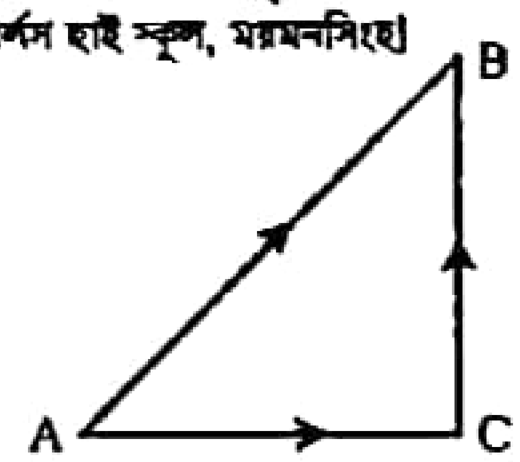
ক $\underline{v} + \underline{u}$ খ $\underline{u} + \underline{v}$ গ $\underline{v} - \underline{u}$ ঘ $\underline{u} - \underline{v}$ **ঘ**

৫৪. $\overrightarrow{FE}$ এর মান ও দিক সূচিত হয় কোন ভেক্টর দ্বারা? (সহজ)



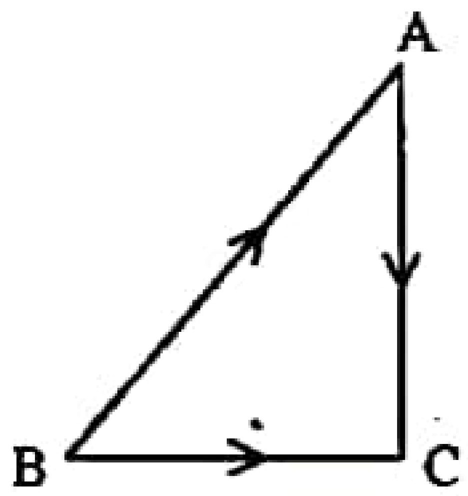
ক $\underline{u} + \underline{v}$ খ $\underline{u} - \underline{v}$ গ $\underline{v}$ ঘ $\underline{u}$ **ক**

৫৫. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CB}$ তিনটি অশূন্য ভেক্টর হলে কোনটি সঠিক? (মধ্যম) [বিদ্যাময়ী গভঃ গার্লস হাই স্কুল, ময়মনসিংহ]



ক $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ খ $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$
গ $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ ঘ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC}$ **গ**

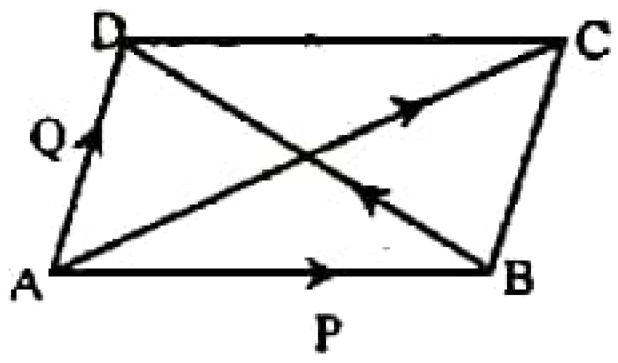
৫৬.



ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রে— [বিন্দুবাসিনী সরকারী বালক উচ্চ বিদ্যালয়, টাঙ্গাইল]
i. $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC}$.
ii. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$.
iii. $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$.
নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)
ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **ক**

৫৭. m ও n দুইটি স্কেলার এবং $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ দুইটি ভেক্টর হলে—
i. $|\underline{a} + \underline{b}| = a + b$
ii. $m(\underline{a} - \underline{b}) = m\underline{a} - m\underline{b}$
iii. $(m - n)\underline{b} = m\underline{b} - n\underline{b}$
নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)
ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **গ**

৫৮.

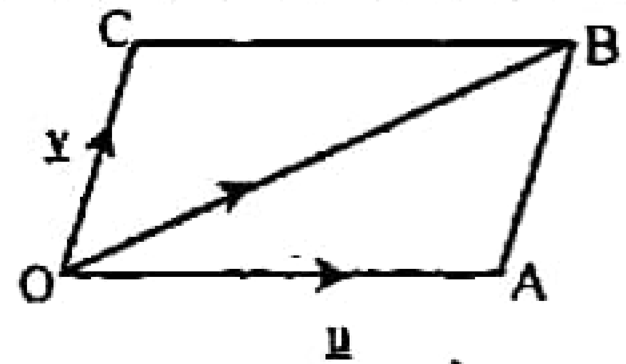


ABCD সামান্তরিকের AB ও AD বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q হলে—
i. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$
ii. $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
iii. $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$
নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)
ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **ঘ**

৫৯. $\underline{u}$, $\underline{v}$, এবং $\underline{u} + \underline{v}$ দ্বারা ত্রিভুজ উৎপন্ন করা সম্ভব যখন—
i. $\underline{u}$ এর আদিবিন্দু, $\underline{v}$ এর প্রান্ত বিন্দু যোগ করা যাবে।
ii. $\underline{u} + \underline{v}$ এর আদি বিন্দু ও অন্তবিন্দু যথাক্রমে $\underline{v}$ এর আদিবিন্দু এবং $\underline{u}$ এর প্রান্তবিন্দু হবে।
iii. $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ সমান্তরাল।
নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)
ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **ক**

৬০. শূন্য ভেক্টরের—
i. পরমমান শূন্য।
ii. দিক অনির্দিষ্ট।
iii. দৈর্ঘ্য শূন্য।
নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)
ক i ও ii খ ii ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **ঘ**

নিচের চিত্রের ভিত্তিতে (৬১-৬৩) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



OABC একটি সামান্তরিক যার $\overrightarrow{OB}$ কর্ণ।

৬১. $\overrightarrow{OB}$ এর দিক সূচিত হয় কোনটি দ্বারা? (সহজ)
ক $\underline{u}$ খ $\underline{v}$ গ $\underline{u} + \underline{v}$ ঘ $\underline{u} - \underline{v}$ **গ**

৬২. $\overrightarrow{AB}$ এর দিক সূচিত হয় কোন ভেক্টর দ্বারা? (সহজ)
ক $\underline{u}$ খ $\underline{v}$ গ $\underline{u} - \underline{v}$ ঘ $\underline{w}$ **খ**

৬৩. উপরের চিত্রে লব্ধি ভেক্টর কোনটি? (সহজ)
ক $\overrightarrow{OC}$ খ $\overrightarrow{OB}$ গ $\overrightarrow{CB}$ ঘ $\overrightarrow{BA}$ **খ**

★★★ ১২.৫ ভেক্টরের যোগের বিধিসমূহ | Text পৃষ্ঠা-২৬০

- যেকোনো দুইটি ভেক্টর $\underline{u}$ এবং $\underline{v}$ এর জন্য $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$ ইহা ভেক্টর যোগের বিনিময় বিধি।
- যেকোনো তিনটি ভেক্টর $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ এর জন্য $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$ ইহা ভেক্টর যোজনের সংযোগ বিধি।
- যে কোনো তিনটি ভেক্টর $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ এর জন্য $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{w}$ হলে, $\underline{v} = \underline{w}$ হবে। ইহা ভেক্টর যোগের বর্জন বিধি।

৬৪. যেকোনো $\underline{u}$, $\underline{v}$ ও $\underline{w}$ ভেক্টরের জন্য $\underline{u} + \underline{v} = \underline{u} + \underline{w}$ হলে, নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)
ক $\underline{u} = \underline{v}$ খ $\underline{v} = \underline{w}$ গ $\underline{v} = \underline{u}$ ঘ $\underline{w} = \underline{u}$ **খ**

www.bdniyog.com
www.pathagar.com

৬৫. $\underline{u}$, $\underline{v}$ ও $\underline{w}$ **তিনটি ভেক্টর হলে ভেক্টর যোগের বিনিময় বিধি নিচের কোনটি?** (সহজ)

(ক) $\underline{u}+\underline{v}=\underline{v}-\underline{u}$

(খ) $(\underline{u}+\underline{v})+\underline{w}=\underline{u}-(\underline{v}+\underline{w})$

(গ) $\underline{u}+(\underline{v}+\underline{w})=(\underline{u}+\underline{v})+\underline{w}$

(ঘ) $m(\underline{u}+\underline{v})=m\underline{u}+m\underline{v}$ — (গ)

৬৬. $\underline{u}$, $\underline{v}$ ও $\underline{w}$ **তিনটি ভেক্টরের ক্ষেত্রে ভেক্টর যোগের বর্জন বিধি কোনটি?** (মধ্যম)

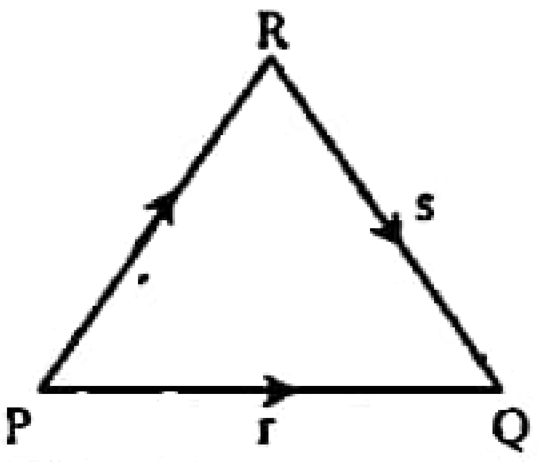
(ক) $(\underline{u}+\underline{v})+\underline{w}=\underline{u}+(\underline{v}+\underline{w})$

(খ) $\underline{u}+\underline{v}+\underline{w}=\underline{u}+\underline{w}$

(গ) $\underline{u}+\underline{v}=\underline{v}+\underline{w}$ হলে $\underline{v}=\underline{w}$

(ঘ) $\underline{u}+\underline{v}=\underline{u}+\underline{w}$ হলে $\underline{v}=\underline{w}$ — (ঘ)

৬৭. চিত্রে কোন সম্পর্কটি সঠিক? (সহজ)



(ক) $\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{RQ}=\overrightarrow{QP}$ (খ) $\overrightarrow{PR}+\overrightarrow{RQ}+\overrightarrow{QP}=\underline{0}$

(গ) $\overrightarrow{RP}+\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{PQ}$ (ঘ) $\underline{r}+\underline{s}=\overrightarrow{PR}$ — (খ)

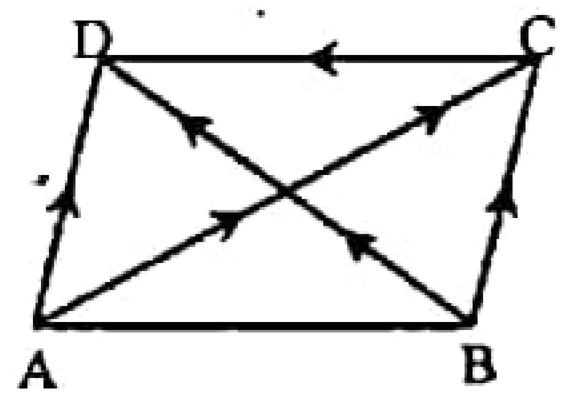
৬৮.

চিত্র হতে নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

(ক) $\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{CD}$ (খ) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$

(গ) $\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{BC}$ (ঘ) $\overrightarrow{Ad}=\overrightarrow{BC}$ — (খ)

৬৯.



ABCD সামান্তরিকের শীর্ষবিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ **ও** $\underline{d}$ **হলে, নিচের কোনটি সঠিক?** (সহজ)

(ক) $|\underline{a}|=|\underline{c}|, |\underline{b}|=|\underline{d}|$ (খ) $|\underline{a}|=|\underline{b}|$

(গ) $|\underline{b}|=|\underline{c}|, |\underline{a}|=|\underline{d}|$ (ঘ) $|\underline{c}|=|\underline{d}|$ — (ক)

৭০. m, n দুইটি ঋণাত্মক স্কেলার ও $\underline{u}$ **একটি ভেক্টর হলে —**

i. $(m+n)\underline{u}$ এরমান $|m+n|\,|\underline{u}|$.

ii. $(m+n)\underline{u}$ এর দিক হবে, $\underline{u}$ এর বিপরীত দিকে।

iii. $(m+n)\underline{u}$ এর দৈর্ঘ্য হবে 0.

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii — (ক)

৭১. ভেক্টর যোগের বর্জন বিধি অনুসারে, যেকোনো $\underline{r}$, $\underline{s}$, $\underline{t}$ **এর মধ্যে—**

i. $\underline{r}+\underline{s}=\underline{r}+\underline{t}$ হলে $\underline{s}=\underline{t}$

ii. $\underline{s}+\underline{t}=\underline{r}+\underline{t}$ হলে $\underline{s}=\underline{r}$

iii. $\underline{r}+\underline{s}=\underline{t}+\underline{s}$ হলে $\underline{r}=\underline{s}$

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

(ক) i ও ii (খ) ii ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii — (ক)

নিচের তথ্যের আলোকে (৭২-৭৪) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

AB ∥ CD এবং m যেকোনো স্কেলার রাশি।

৭২. নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

(ক) $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$ (খ) $\overrightarrow{AB}=m\overrightarrow{CD}$

(গ) $m=\dfrac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{CD}}$ (ঘ) $m=\dfrac{\overrightarrow{CD}}{\overrightarrow{AB}}$ — (খ)

৭৩. m > 0 হলে, কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

(ক) $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ সমমুখী (খ) $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ বিপরীতমুখী

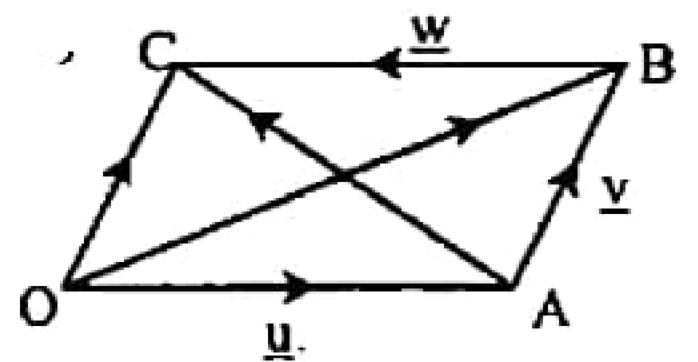
(গ) $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ সমান (ঘ) $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ লম্ব — (ক)

৭৪. m < 0 হলে, নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

(ক) $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ লম্ব (খ) $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ একই

(গ) $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ বিপরীতমুখী (ঘ) $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ সমমুখী — (গ)

নিচের তথ্যের আলোকে (৭৫-৭৬) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



৭৫. OABC সামান্তরিকের ক্ষেত্রে নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

(ক) $(\underline{u}+\underline{v})-\underline{w}=\underline{u}+(\underline{v}+\underline{w})$

(খ) $\underline{u}+\underline{v}+\underline{w}=\underline{u}+(\underline{u}+\underline{w})$

(গ) $(\underline{u}+\underline{v})+\underline{w}=\underline{u}+(\underline{v}+\underline{w})$

(ঘ) $\underline{u}+\underline{v}+\underline{w}=(\underline{u}-\underline{v})+\underline{w}$ — (গ)

৭৬. OABC সামান্তরিকের ক্ষেত্রে নিচের কোনটি যোগের বিনিময় বিধি? (মধ্যম)

(ক) $\underline{u}+\underline{v}=\underline{v}+\underline{u}$ (খ) $\underline{u}-\underline{v}=\underline{v}-\underline{u}$

(গ) $\underline{u}+(\underline{v}+w)=(\underline{u}+\underline{v})+\underline{w}$

(ঘ) $(\underline{u}+\underline{v})-\underline{w}=\underline{u}+(\underline{v}-\underline{w})$ — (ক)

১২.৬ ভেক্টরের সংখ্যা গুণিতক | Text পৃষ্ঠা-২৬১

- $\underline{u}$ যেকোনো ভেক্টর ও $\underline{m}$ যেকোনো বাস্তব সংখ্যা হলে
  ১. $m=0$ হলে, $m\underline{u}=0$
  ২. $m\neq 0$ হলে, $m\underline{u}$ এর ধারক $\underline{u}$ এর ধারকের সাথে অভিন্ন।
  ৩. $m(n\underline{u})=n(m\underline{u})=mn(\underline{u})$।

৭৭. $\overrightarrow{AB}=m.\overrightarrow{CD}$ **এবং m > 0 হলে নিচের কোনটি সঠিক?** (সহজ)
[সরকারি জুবিলী স্কুল, পটুয়াখালী]

(ক) $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ সমান (খ) $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ বিপরীত

(গ) $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ বিপরীত মুখী (ঘ) $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ সমমুখী — (ঘ)

৭৮. m একটি স্কেলার রাশি এবং $\underline{a}$ **একটি অশূন্য ভেক্টর হলে** $(-m)\underline{a}$ **= কত?** (সহজ)

(ক) $m\underline{a}$ (খ) $(-m)(-\underline{a})$

(গ) $(-\underline{a})(-m)$ (ঘ) $-m\underline{a}$ — (ঘ)

৭৯. $\underline{u}$ **যেকোনো ভেক্টর এবং m যেকোনো বাস্তব সংখ্যা। m > 0 হলে—**

i. $m\underline{u}\neq 0$

ii. $m\underline{u}$ এর দিক $\underline{u}$ এর দিকের সঙ্গে একমুখি।

iii. $m\underline{u}$ এর দিক $\underline{u}$ এর দিকের বিপরীত।

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii — (ক)

www.bdniyog.com
www.pathagar.com

★★ ১২.৭ ভেক্টরের সংখ্যাগুণিতক সংক্রান্ত বণ্টন সূত্র | Text পৃষ্ঠা-২৬২

- m, n দুটি স্কেলার এবং $\underline{u}, \underline{v}$ দুটি ভেক্টর হলে,
  ১. $(m+n)\underline{v} = m\underline{v} + n\underline{v}$ (বণ্টন সূত্র)
  ২. $m(\underline{u}+\underline{v}) = m\underline{u} + m\underline{v}$ (বণ্টন সূত্র)

৮০. m ও n ধনাত্মক হলে, $(m+n)\underline{u}$ ভেক্টরটির মান কত হয়? (সহজ)
ক) $(m+n)\underline{u}$ খ) $mn\,|\underline{u}|$
গ) $|m+n||\underline{u}|$ ঘ) $|m+n|\,\underline{u}$ গ

৮১. m, n দুইটি স্কেলার এবং $\underline{u}, \underline{v}$ দুইটি ভেক্টর হলে, নিচের কোনটি ভেক্টরের বণ্টন সূত্র অনুসরণ করে? (সহজ)
ক) $(m+n)\,\underline{u} = m\underline{u} + n\underline{u}$ খ) $(m+n)\,\underline{u} = \underline{u}m + \underline{u}n$
গ) $m(\underline{u}+\underline{v}) = \underline{u}m + \underline{v}m$ ঘ) $(\underline{u}+\underline{v})m = m\underline{u} + m\underline{v}$ ক

৮২. p ধনাত্মক ও q ঋণাত্মক স্কেলার হলে $(p+q)\underline{v}$ ভেক্টরটির মান কত? (মধ্যম)
ক) $|p+q|\,|\underline{v}|$ খ) $(|p|+|q|)\,|\underline{v}|$
গ) $|p+q|\,\underline{v}$ ঘ) $(|p|+|q|)\,\underline{v}$ ক

৮৩. $m > n$ হলে, $(n-m)\,\underline{u}$ ভেক্টরটির দিক ও $\underline{u}$ ভেক্টরের দিকের মধ্য সম্পর্ক কী? (মধ্যম)
ক) বিপরীত খ) একই দিক
গ) সমান্তরাল ও একই দিক ঘ) পরস্পর লম্ব ক

৮৪. m ও n উভয়ই ঋণাত্মক হলে, $(m+n)\,\underline{v}$ ও $\underline{v}$ ভেক্টরের দিকের সম্পর্ক কী? (মধ্যম)
ক) পরস্পর লম্ব খ) বিপরীত
গ) একই দিক ঘ) সমান্তরাল ও একই দিক খ

★★★ ১২.৮ অবস্থান ভেক্টর | Text পৃষ্ঠা-২৬৪

- সমতলস্থ কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু O-এর সাপেক্ষে ঐ সমতলের যেকোনো বিন্দু P-এর অবস্থান $\overrightarrow{OP}$ দ্বারা নির্দিষ্ট করা যায়। $\overrightarrow{OP}$ কে O বিন্দুর সাপেক্ষে P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বলা হয়। এবং O বিন্দুকে ভেক্টর মূলবিন্দু বলা হয়।
- দুইটি বিন্দু A, B এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}, \underline{b}$ হলে $\overrightarrow{ab} = \underline{b} - \underline{a}$.
- $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ হলে C বিন্দু যদি AB রেখাংশকে $m : n$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে তবে,
  $\underline{c} = \dfrac{m\underline{b} + n\underline{a}}{m+n}$ হবে। যদি বহির্বিভক্ত হয় তবে, $\underline{c} = \dfrac{m\underline{b} - n\underline{a}}{m-n}$ হবে।

৮৫. মূলবিন্দু O এর সাপেক্ষে P এবং Q এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $9\underline{a} - 4\underline{b}$ ও $-3\underline{a} - \underline{b}$ হলে, $\overrightarrow{PQ}$ এর মান কত? (মধ্যম)
ক) $6\underline{a} - 5\underline{b}$ খ) $12\underline{a} - 3\underline{b}$
গ) $-12\underline{a} + 3\underline{b}$ ঘ) $12\underline{a} - 3\underline{b}$ গ

ব্যাখ্যা: $\overrightarrow{PQ}$ এর অবস্থান ভেক্টর $= -3\underline{a} - \underline{b} - 9\underline{a} + 4\underline{b} = -12\underline{a} + 3\underline{b}$

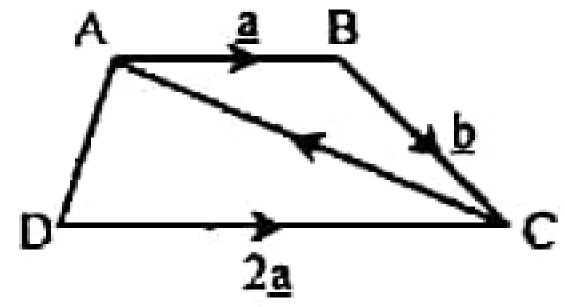
৮৬. কোনো ত্রিভুজের শীর্ষত্রয়ের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}, \underline{b}$ ও $\underline{c}$ হলে, তাদের মধ্যমা তিনটির ছেদ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর কী হবে? (মধ্যম)
ক) $\frac{1}{3}(\underline{a}+\underline{b}+\underline{c})$ খ) $\frac{2}{3}(\underline{a}+\underline{b}+\underline{c})$
গ) $(\underline{a}+\underline{b}+\underline{c})$ ঘ) $3(\underline{a}+\underline{b}+\underline{c})$ ক

৮৭. A, B ও C বিন্দুত্রয়ের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}, \underline{b}$ ও $\underline{c}$. C বিন্দু AB রেখাকে 3 : 2 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করলে C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর কী হবে? (কঠিন)
ক) $\dfrac{3a+2b}{5}$ খ) $\dfrac{2a+3b}{5}$
গ) $\dfrac{3a-2b}{5}$ ঘ) $\dfrac{2b-3a}{5}$ খ

৮৮. A, B ও C বিন্দুত্রয়ের অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}, \underline{b}$ এবং $\underline{c}$. C বিন্দুতে AB রেখা 5 : 2 অনুপাতে বহির্বিভক্ত হলে C এর অবস্থান ভেক্টর কী হবে? (কঠিন)
ক) $\dfrac{2\underline{b}+5\underline{a}}{3}$ খ) $\dfrac{5\underline{a}+2\underline{b}}{3}$ গ) $\dfrac{5\underline{a}-2\underline{b}}{3}$ ঘ) $\dfrac{5\underline{b}-2\underline{a}}{3}$ ঘ

৮৯. $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$ এবং $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$ হলে $\overrightarrow{AB}$ = কত? (মধ্যম)
ক) $\underline{a}-\underline{b}$ খ) $\underline{b}-\underline{a}$ গ) $-(\underline{b}-\underline{a})$ ঘ) $\underline{b}+\underline{a}$ খ

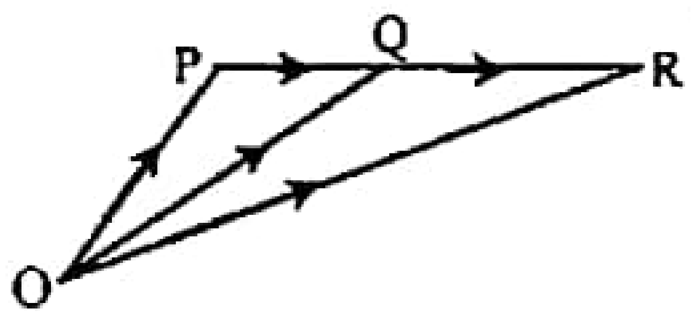
৯০.



চিত্র হতে, $\overrightarrow{CA}$ = কত? (কঠিন)
ক) $\underline{a}-\underline{b}$ খ) $\underline{a}+\underline{b}$ গ) $-\underline{a}+\underline{b}$ ঘ) $-\underline{a}-\underline{b}$ ঘ

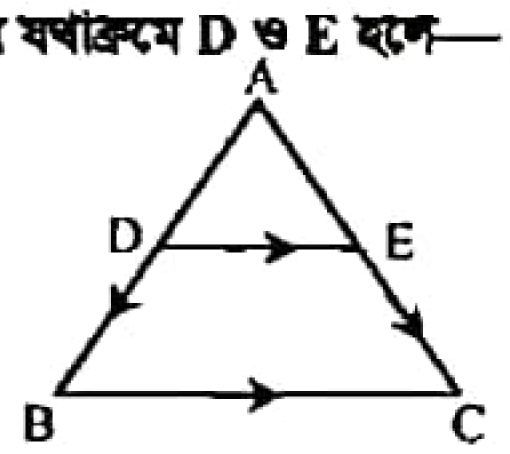
ব্যাখ্যা: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \underline{a} + \underline{b}$
$\therefore \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC} = -(\underline{a}+\underline{b}) = -\underline{a}-\underline{b}$

৯১.



চিত্র হতে, $\overrightarrow{PQ}$ এর অবস্থান ভেক্টর কোনটি? (মধ্যম)
ক) $\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OP}$ খ) $\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$
গ) $\overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OQ}$ ঘ) $\overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OQ}$ খ

৯২. ΔABC এর $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AC}$ এর মধ্যবিন্দুদ্বয় যথাক্রমে D ও E হলে—



i. DE ‖ BC
ii. $DE = \frac{1}{2} BC$
iii. $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}$
নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)
ক) i ও ii খ) i ও iii গ) ii ও iii ঘ) i, ii ও iii ঘ

নিচের তথ্যের আলোকে (৯৩-৯৬) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:
A, B, C এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$।

৯৩. $\overrightarrow{AB}$ = কত? (সহজ)
ক) $\frac{1}{2}(\underline{a}-\underline{b})$ খ) $\frac{1}{2}(\underline{a}+\underline{b})$ গ) $\underline{a}-\underline{b}$ ঘ) $\underline{b}-\underline{a}$ ঘ

৯৪. AB রেখাংশ C বিন্দুতে $m : n$ অনুপাত অন্তর্বিভক্ত করলে $\underline{c}$ = কত? (কঠিন)
ক) $\dfrac{n\underline{a}-m\underline{b}}{m+n}$ খ) $\dfrac{n\underline{a}-m\underline{b}}{m-n}$ গ) $\dfrac{n\underline{a}+m\underline{b}}{m+n}$ ঘ) $\dfrac{m\underline{a}+n\underline{b}}{m+n}$ গ

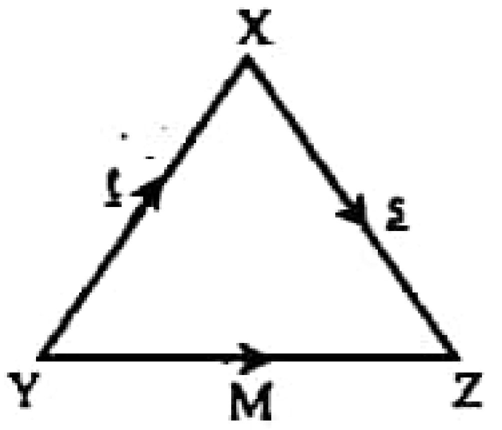
৯৫. AB রেখাংশ C বিন্দুতে $m : n$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত করলে $\underline{c}$ = কত? (কঠিন)
ক) $\dfrac{m\underline{b}-n\underline{a}}{m-n}$ খ) $\dfrac{n\underline{b}-m\underline{a}}{m-n}$ গ) $\dfrac{n\,\underline{a}-m\,\underline{b}}{m-n}$ ঘ) $\dfrac{m\underline{a}-n\underline{b}}{m-n}$ ক

৯৬. C বিন্দুটি AB রেখাংশের মধ্যবিন্দু হলে $\underline{c}$ = কত? (কঠিন)
ক) $\frac{1}{2}(\underline{b}-\underline{a})$ খ) $-\frac{1}{2}(\underline{b}-\underline{a})$
গ) $\frac{1}{2}(\underline{a}-\underline{b})$ ঘ) $\frac{1}{2}(\underline{a}+\underline{b})$ ঘ

★★ ১২.৬-কতিপয় উদাহরণ | Text পৃষ্ঠা-২৬৪

- $-(-\underline{a}) = \underline{a}$
- $-m(\underline{a}) = m(-\underline{a}) = -m\underline{a}$, m একটি স্কেলার
- $\frac{\underline{a}}{|\underline{a}|}$ একটি একক ভেক্টর, যখন $\underline{a} \neq 0$

৯৭.



YZ এর মধ্যবিন্দু M হলে $\overrightarrow{YM}$ = কত? (মধ্যম)

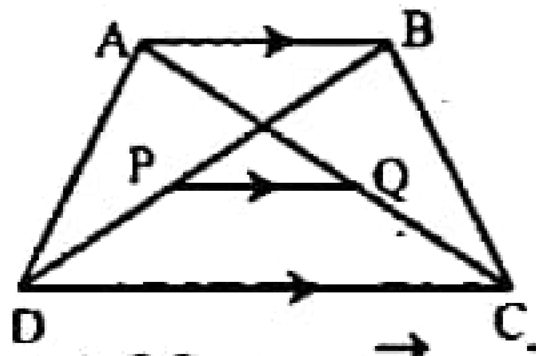
ক $\frac{1}{2}(\underline{t}+\underline{s})$ খ $\frac{1}{2}(\underline{t}-\underline{s})$
গ $(\underline{t}+\underline{s})$ ঘ $(\underline{t}-\underline{s})$ ক

ব্যাখ্যা: $\overrightarrow{YZ} = \overrightarrow{YX} + \overrightarrow{XZ} = \underline{t} + \underline{s}$

$\therefore \frac{1}{2}\overrightarrow{YZ} = \frac{1}{2}(\underline{t}+\underline{s})$

$\therefore \overrightarrow{YM} = \frac{1}{2}(\underline{t}+\underline{s})$

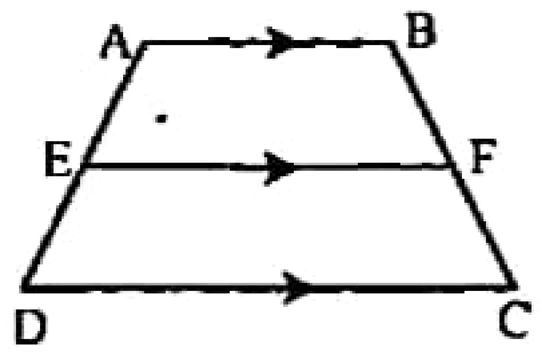
৯৮.



ABCD ট্রাপিজিয়ামের $\overrightarrow{AC}$ ও $\overrightarrow{BD}$ কর্ণের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q হলে $\overrightarrow{PQ}$ = কত? (কঠিন)

ক $\frac{1}{2}(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AB})$ খ $\frac{1}{2}(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AB})$
গ $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$ ঘ $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BC})$ ক

৯৯.



ABCD ট্রাপিজিয়ামের $\overrightarrow{AD}$ ও $\overrightarrow{BC}$ এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E ও F হলে $\overrightarrow{EF}$ = কত? (কঠিন)

ক $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC})$ খ $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})$
গ $\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{DC})$ ঘ $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})$ খ

১০০. একটি ভেক্টর $\underline{a}$ এর দিক বরাবর একক ভেক্টর নিচের কোনটি? (সহজ)

ক $|\underline{a}|$ খ a গ $\frac{\underline{a}}{\underline{a}}$ ঘ $\frac{\underline{a}}{|\underline{a}|}$ ঘ

১০১. $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ দুইটি অশূন্য ভেক্টর হলে—

i. $\underline{a} = m\underline{b}$ হবে যদি $\underline{a}, \underline{b}$ সমান্তরাল হয়।

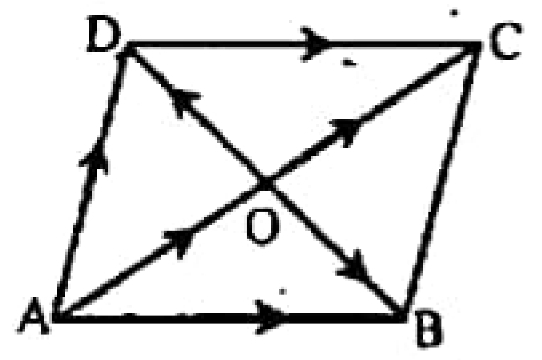
ii. ভেক্টরদ্বয় অসমান্তরাল এবং $m\underline{a} + m\underline{b} = 0$ হলে $m = n = 0$

iii. $-(-\underline{a}) = \underline{a}$

নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii ঘ

নিচের তথ্যের আলোকে (১০২-১০৩) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



১০২. $\overrightarrow{AB}$ কে $\overrightarrow{AD}$ ও $\overrightarrow{BD}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ করলে কী হয়? (সহজ)

ক $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}$ খ $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{BD}$
গ $\frac{1}{2}AD + BD$ ঘ $AD - \frac{1}{2}BD$ খ

ব্যাখ্যা: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} \therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}$

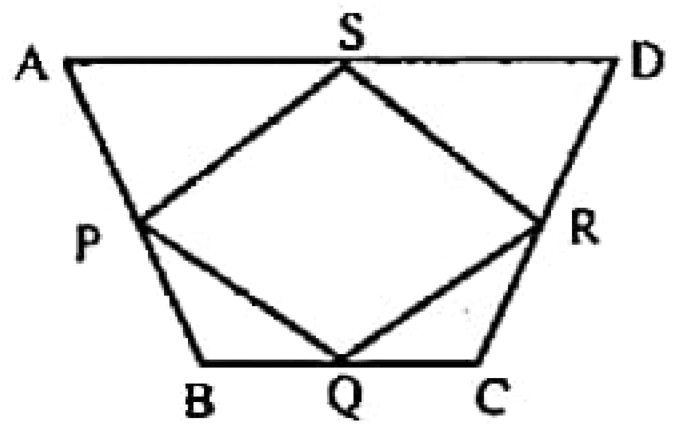
১০৩. $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD}$ = কত? (মধ্যম)

ক $2\overrightarrow{AB}$ খ $2\overrightarrow{BC}$ গ $2\overrightarrow{CD}$ ঘ $2\overrightarrow{AD}$ ক

ব্যাখ্যা: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD})$

$\therefore \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AB}$

নিচের তথ্যের আলোকে (১০৪-১০৬) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



চিত্রে A, B, C ও D বিন্দু চারটির অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ ও $\underline{d}$. এবং PQRS একটি সামান্তরিক।

১০৪. P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর নিচের কোনটি? (মধ্যম)

ক $\frac{a+b}{2}$ খ $\frac{a-b}{2}$ গ $a+b$ ঘ $a-b$ ক

ব্যাখ্যা: যেহেতু PQRS একটি সামান্তরিক কাজেই P, Q, R, S যথাক্রমে AB, BC, CD ও AD এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore$ P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{a+b}{2}$

১০৫. $\overrightarrow{PQ}$ এর অবস্থান ভেক্টর কোনটি? (কঠিন)

ক $\frac{\underline{c}-\underline{a}}{2}$ খ $\frac{\underline{a}+\underline{c}}{2}$ গ $\underline{c}-\underline{a}$ ঘ $\underline{c}+\underline{a}$ ক

ব্যাখ্যা: P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{a+b}{2}$ এবং Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{b+c}{2}$

$\therefore \overrightarrow{PQ} = \frac{\underline{b}+\underline{c}}{2} - \frac{\underline{a}+\underline{b}}{2} = \frac{\underline{b}+\underline{c}-\underline{a}-\underline{b}}{2} = \frac{\underline{c}-\underline{a}}{2}$

১০৬. $\overrightarrow{SR}$ = কত? (মধ্যম)

ক $\frac{\underline{c}-\underline{a}}{2}$ খ $\frac{\underline{c}+\underline{a}}{2}$ গ $\underline{c}-\underline{a}$ ঘ $\underline{c}+\underline{a}$ ক

ব্যাখ্যা: PQRS সামান্তরিকের $\overrightarrow{PQ}$ এবং $\overrightarrow{SR}$ পরস্পর সমান ও সমান্তরাল।

$\therefore \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR} = \frac{\underline{c}-\underline{a}}{2}$

www.bdniyog.com
www.pathagar.com

শ্রেণির কাজের ওপর সৃজনশীল রচনামূলক প্রশ্ন

প্রশ্ন ▶ ১ তোমার বাড়ি হতে স্কুল সোজা দক্ষিণে অবস্থিত। হেঁটে যেতে 1 ঘন্টা ও সাইকেলে আসতে 20 মিনিট সময় লাগে। ▶কাজ, পৃষ্ঠা-২৫৭

ক. বাড়ি হতে স্কুলের দূরত্ব 3 কি.মি. হলে হেঁটে যেতে তোমার গতিবেগ কত? ২

খ. সাইকেলের গতিবেগ হাঁটার গতিবেগের কতগুণ? ৪

গ. বাসের গতিবেগ 45 কি.মি./ ঘন্টা হলে বাড়ি হতে স্কুলে যেতে তোমার কত সময় লাগবে? তিন মাধ্যমে তোমার গড় গতিবেগ কত? ৪

১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক বাড়ির অবস্থানকে H দ্বারা এবং স্কুলের অবস্থানকে S দ্বারা চিহ্নিত করলে, H ├──▷──┤ S

আমার গতিবেগ $\underline{u} = \frac{\text{দূরত্ব}}{\text{সময়}} = \frac{\overrightarrow{HS}}{\text{সময়}} = \frac{3}{1}$ কি.মি./ঘন্টা দক্ষিণ দিকে = 3 কি.মি./ঘন্টা দক্ষিণ দিকে।

খ মোট দূরত্ব = 3 কি.মি.
মোট সময় = 20 মিনিট H ├──◁$\underline{v}$──┤ S
আবার, এক ঘন্টা = 60 মিনিট
20 মিনিটে অতিক্রান্ত দূরত্ব = 3 কি.মি.

60 ,, ,, ,, $= \frac{3 \times 60}{20}$ কি.মি.
$= 9$ কি.মি.

∴ স্কুল থেকে বাড়ি ফেরার সময় আমার গতিবেগ
$\underline{v} = 9$ কি.মি./ঘন্টা।
এখন সাইকেলের গতিবেগ = 9 কি.মি./ঘন্টা
= 3 × 3 কি.মি./ঘন্টা
= 3 × হাঁটার গতিবেগ ['ক' হতে]
সুতরাং সাইকেলের গতিবেগ হাঁটার বেগের তিনগুণ।

গ 'ক' হতে মোট দূরত্ব = 3 কি.মি.
গাড়ির গতিবেগ = 45 কি.মি.
বাসে 45 কি.মি. যায় 1 ঘণ্টায়
" 1 " " $\frac{1}{45}$ "
" 3 " " $\frac{3}{45}$ "
বা, $\frac{1}{15}$ বা, $\frac{60}{15}$ মিনিটে [∵ 1 ঘণ্টা = 60 মিনিট]
বা, 4 মিনিটে
∴ বাড়ি হতে বাসে স্কুলে যেতে আমার 4 মিনিট সময় লাগবে।
হেঁটে যেতে সময় লাগে 1 ঘণ্টা বা 60 মিনিট
সাইকেলে যেতে সময় লাগে 20 মিনিট
বাসে যেতে সময় লাগে 4 মিনিট
তিন মাধ্যমে যেতে মোট সময় লাগে = (60 + 20 + 4) মিনিট
= 84 মিনিট
তিন মাধ্যমে তার অতিক্রান্ত দূরত্ব = (3 + 3 + 3) বা 9 কি.মি.

∴ তিন মাধ্যমে গড় গতিবেগ = $\frac{9 \text{ কি.মি.}}{84 \text{ মিনিট}} = \frac{9 \text{ কি.মি.}}{\frac{84}{60} \text{ ঘণ্টা}}$

$= \frac{9 \times 60}{84}$ কি.মি./ঘণ্টা
= 6.43 কি.মি./ঘণ্টা (প্রায়)

প্রশ্ন ▶ ২ $\underline{u}$ ভেক্টরের দুইটি স্কেলার m ও n হলে,
$(m + n)\underline{u} = m\underline{u} + n\underline{u}$ ▶কাজ, পৃষ্ঠা-২৬৩

ক. বিভিন্ন সংখ্যার জন্য সূত্রটি যাচাই কর। ২

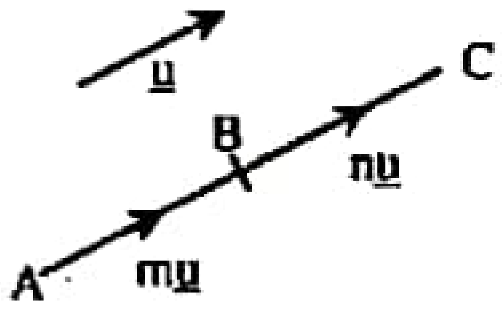
খ. ভেক্টরের সংখ্যা গুণিতক সংক্রান্ত সূত্র হতে এটি প্রমাণ কর। ৪

গ. $\underline{v}$ আরেকটি ভেক্টর হলে $m(\underline{u} + \underline{v}) = m\underline{u} + m\underline{v}$ সূত্রটি প্রমাণ কর। ৪

২ নং প্রশ্নের সমাধান

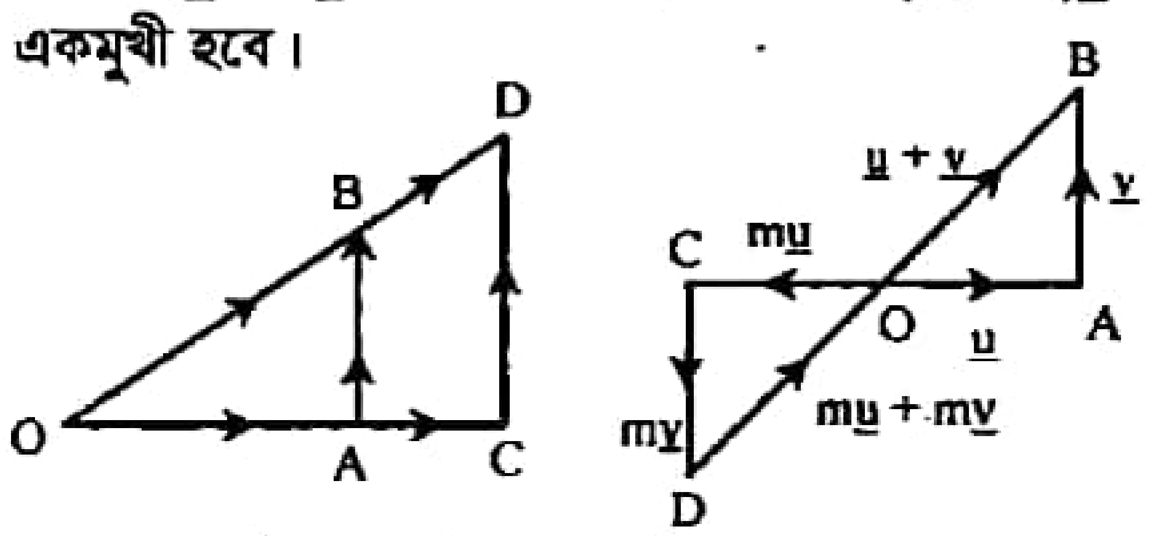
ক $(m + n)\underline{u} = m\underline{u} + n\underline{u}$
$m = 1, n = 2$ হলে, বামপক্ষ $= (1 + 2)\underline{u}$
$= 3\underline{u}$
ডানপক্ষ $= 1\underline{u} + 2\underline{u} = \underline{u} + 2\underline{u} = 3\underline{u}$
∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ
আবার, $m = 2, n = 3$ হলে, বামপক্ষ $= (2 + 3)\underline{u}$
$= 5\underline{u}$
ডানপক্ষ $= 2\underline{u} + 3\underline{u} = 5\underline{u}$
∴ বামপক্ষ = ডানপক্ষ
অতএব, m ও n এর বিভিন্ন প্রকার সাংখ্যিক মান নিয়ে $\underline{u}$ ভেক্টরের জন্য $(m + n)\underline{u} = m\underline{u} + n\underline{u}$ সূত্রটি যাচাই করা হলো।

খ **প্রমাণ:** m বা n শূন্য হলে সূত্রটি অবশ্যই খাটে।
মনে করি, m, n উভয়ে ধনাত্মক এবং $\overrightarrow{AB} = m\underline{u}$
∴ $|\overrightarrow{AB}| = m|\underline{u}|$
AB কে C পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন
$|\overrightarrow{BC}| = n|\underline{u}|$ হয়।
∴ $\overrightarrow{BC} = n\underline{u}$ এবং



$|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| = m|\underline{u}| + n|\underline{u}| = (m + n)|\underline{u}|$
∴ $\overrightarrow{AC} = (m + n)\underline{u}$
কিন্তু $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
∴ $m\underline{u} + n\underline{u} = (m + n)\underline{u}$
m, n উভয়ে ঋণাত্মক হলে $(m + n)\,\underline{u}$ এর দৈর্ঘ্য হবে $|m + n|\,|\underline{u}|$ এবং দিক হবে $\underline{u}$ এর দিকের বিপরীত দিক, তখন $m\underline{u} + n\underline{u}$ ভেক্টরটির দৈর্ঘ্য হবে $|m||\underline{u}| + |n||\underline{u}| = (|m| + |n|)\,|\underline{u}|$ [∵ $m\underline{u}$, $n\underline{u}$ ভেক্টরদ্বয় একই দিকে] এবং দিক হবে $\underline{u}$ এর বিপরীত দিক। কিন্তু $m < 0$ এবং $n < 0$ হওয়ায় $|m| + |n| = |m + n|$ সেহেতু এক্ষেত্রে $(m + n)\underline{u} = m\underline{u} + n\underline{u}$ পাওয়া গেল।
সর্বশেষে m এবং n এর মধ্যে $m > 0, n < 0$ হলে
$(m + n)\underline{u}$ এর দৈর্ঘ্য হবে $|m + n|\,|\underline{u}|$ এবং দিক হবে
(ক) $\underline{u}$ এর দিকের সাথে একমুখী যখন $|m| > |n|$
(খ) $\underline{u}$ এর বিপরীত দিক যখন $|m| < |n|$
তখন $m\underline{u} + n\underline{u}$ ভেক্টরটিও দৈর্ঘ্য ও দিকে $(m + n)\underline{u}$ এর সাথে একমুখী হবে।

গ



মনে করি $\overrightarrow{OA} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{v}$
তাহলে $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \underline{u} + \underline{v}$

www.bdniyog.com
www.pathagar.com

OA কে C পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন OC = m. OA হয়। C বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত AB এর সমান্তরাল CD রেখা OB এর বর্ধিতাংশকে D বিন্দুতে ছেদ করে। যেহেতু OAB এবং OCD ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ,

সেহেতু $\frac{|\overrightarrow{OC}|}{|\overrightarrow{OA}|} = \frac{|\overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{|\overrightarrow{OD}|}{|\overrightarrow{OB}|} = m$

$\therefore \overrightarrow{CD} = m\overrightarrow{AB} = m\underline{v}$

চিত্র-১ এ m ধনাত্মক, চিত্র-২ এ m ঋণাত্মক

$\therefore OC = m.\ OA,\ CD = m.\ AB,\ OD = m.OB$

এক্ষণে $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD}$ বা, $m(\overrightarrow{OA}) + m(\overrightarrow{AB}) = m(\overrightarrow{OB})$

$\therefore m\underline{u} + m\underline{v} = m(\underline{u} + \underline{v})$

প্রশ্ন ▶ ৩ **O কে মূলবিন্দু ধরে বিভিন্ন অবস্থানে A, B, C, D ও E পাঁচটি বিন্দু নেই।** ▶কাজ, পৃষ্ঠা-২৬৪

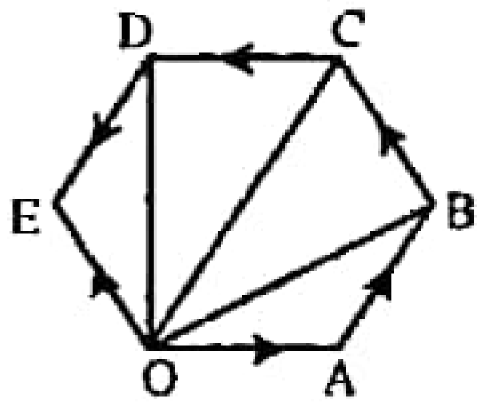
ক. চিত্র এঁকে O বিন্দুর সাপেক্ষে বিন্দুগুলোর অবস্থান চিহ্নিত কর। ২

খ. দেখাও যে, $\overrightarrow{OC}$ ভেক্টর $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ ভেক্টরত্রয়ের যোগফলের সমান। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$ ৪

৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, OABCDE ষড়ভুজের মূলবিন্দু O. মূলবিন্দু O এর সাপেক্ষে A, B, C, D, E এই পাঁচটি বিভিন্ন বিন্দুর অবস্থান



ভেক্টর যথাক্রমে $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$, $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$, $\overrightarrow{OC} = \underline{c}$, $\overrightarrow{OD} = \underline{d}$ এবং

$\overrightarrow{OE} = \underline{e}$.

খ 'ক' হতে, $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$, $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$ এবং $\overrightarrow{OC} = \underline{c}$

এখন, ΔOAB-এ

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$ [ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি]

বা, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$= \underline{b} - \underline{a}$

আবার, ΔOBC-এ

$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}$ [ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি]

বা, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$

$= \underline{c} - \underline{b}$

সুতরাং $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \underline{a} + \underline{b} - \underline{a} + \underline{c} - \underline{b}$

$= \underline{c}$

$= \overrightarrow{OC}$

অর্থাৎ $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$\therefore \overrightarrow{OC}$ ভেক্টর $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{BC}$ ভেক্টরত্রয়ের যোগফলের সমান। **(দেখানো হলো)**

গ $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$

$= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$ ['খ' হতে]

এখন, ΔOCD-এ

$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD}$ [ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি]

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$

$= \underline{d} - \underline{c}$ ['ক' হতে]

আবার, ΔODE-এ

$\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OE}$ [ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি]

বা, $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD}$

$= \underline{e} - \underline{d}$ ['ক' হতে]

সুতরাং $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \underline{c} + \underline{d} - \underline{c} + \underline{e} - \underline{d}$

$= \underline{e} = \overrightarrow{OE}$

বা, $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$

$\therefore \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$ **(প্রমাণিত)**

মাস্টার ট্রেইনার প্রণীত আরও সৃজনশীল রচনামূলক প্রশ্ন

প্রশ্ন ▶ ৪ **A, B, C ও D বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ ও $\underline{d}$** [ঝিনাইদহ সরকারী বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়]

ক. দেখাও যে, $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$।

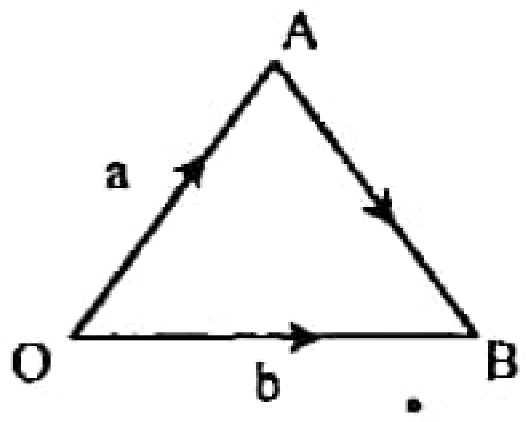
খ. দেখাও যে, ABCD সামান্তরিক হবে যদি ও কেবল যদি $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$ হয়।

গ. AB রেখাংশ C বিন্দুতে m : n অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হলে, দেখাও যে, C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{c} = \frac{m\underline{b} + n\underline{a}}{m + n}$

৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মনে করি, কোনো সমতলে O বিন্দুর সাপেক্ষে A বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$ এবং B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর

$\overrightarrow{OB} = \underline{b}$



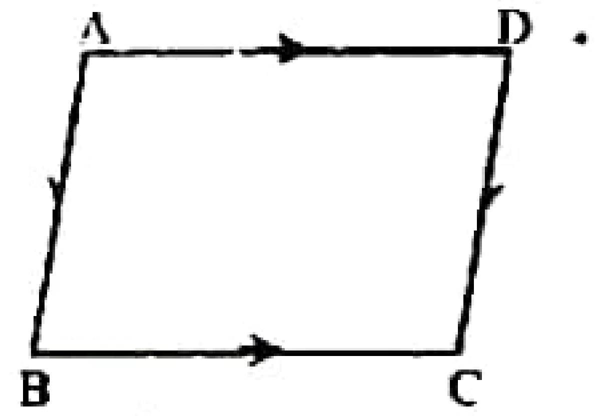
তাহলে $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$

বা, $\underline{a} + \overrightarrow{AB} = \underline{b}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$ **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে, A, B, C, D বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, $\underline{d}$.

দেখাতে হবে যে, ABCD সামান্তরিক হবে যদি ও কেবল যদি $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$ হয়।



A, B, C ও D বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ ও $\underline{d}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$ এবং $\overrightarrow{DC} = \underline{c} - \underline{d}$

মনে করি, ABCD একটি সামান্তরিক।

তাহলে AB ও DC পরস্পর সমান ও সমান্তরাল হবে।

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\therefore \underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$

বিপরীতক্রমে, মনে করি, $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

www.bdniyog.com

www.pathagar.com

সুতরাং AB ও DC রেখা দুটি পরস্পর সমান ও সমান্তরাল অর্থাৎ ABCD একটি সামান্তরিক।

∴ ABCD একটি সামান্তরিক হবে যদি ও কেবল যদি $\underline{b}-\underline{a}=\underline{c}-\underline{d}$ হয়। **(দেখানো হলো)**

গ মনে করি, কোনো মূলবিন্দু O এর সাপেক্ষে A ও B এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$। AB রেখাংশ C বিন্দুতে m : n অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হলে দেখাতে হবে যে, C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{c}=\frac{m\underline{b}+n\underline{a}}{m+n}$

প্রমাণ: $\frac{AC}{CB}=\frac{m}{n}$

[∵ AB রেখাংশ C বিন্দুতে m : n অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়েছে]

বা, $\frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{CB}|}=\frac{m}{n}$

বা, $\frac{|\overrightarrow{CB}|}{|\overrightarrow{AC}|}=\frac{n}{m}$ [ব্যস্তকরণ করে]

বা, $\frac{|\overrightarrow{CB}|+|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AC}|}=\frac{n+m}{m}$ [যোজন করে]

বা, $\frac{AC+CB}{AC}=\frac{n+m}{m}$

বা, $\frac{AB}{AC}=\frac{n+m}{m}$

বা, $\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AC}|}=\frac{m+n}{m}$

বা, $\frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{m}{m+n}$ [ব্যস্তকরণ করে]

বা, $|\overrightarrow{AC}|=\left(\frac{m}{m+n}\right)|\overrightarrow{AB}|$

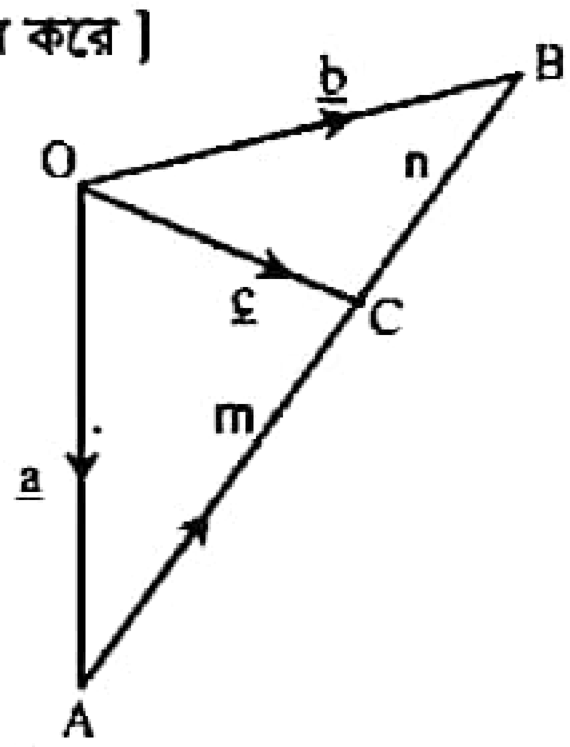
বা, $\overrightarrow{AC}=\left(\frac{m}{m+n}\right)\overrightarrow{AB}$ [∵ $\overrightarrow{AC}$ এবং $\overrightarrow{AB}$ এর দিক একই]

বা, $\underline{c}-\underline{a}=\frac{m}{m+n}(\underline{b}-\underline{a})$

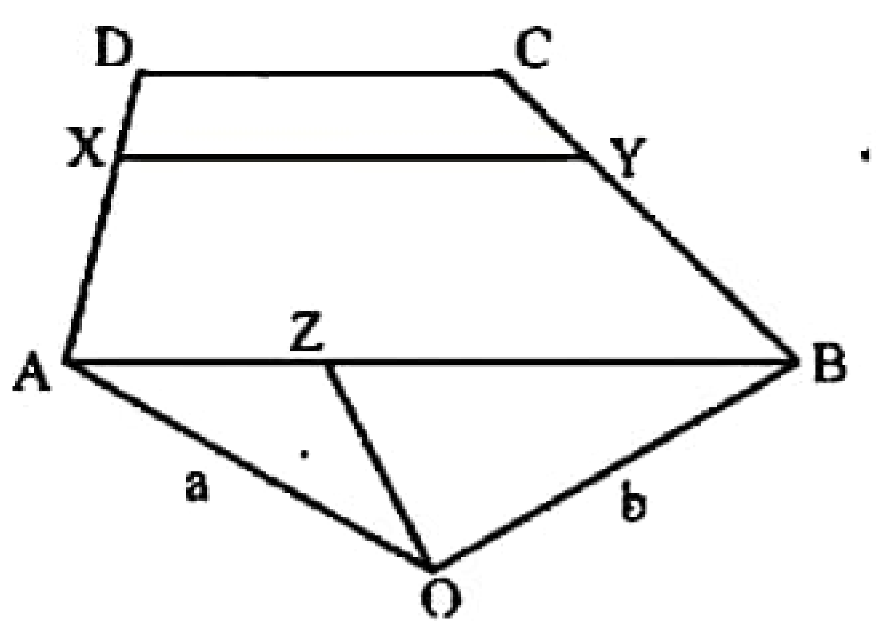
বা, $\underline{c}=\frac{m}{m+n}(\underline{b}-\underline{a})+\underline{a}$

বা, $\underline{c}=\frac{m\underline{b}-m\underline{a}+m\underline{a}+n\underline{a}}{m+n}$

∴ $\underline{c}=\frac{n\underline{a}+m\underline{b}}{m+n}$ **(দেখানো হলো)**



প্রশ্ন ▶৫ চিত্রে ABCD একটি ট্রাপিজিয়াম। X, Y ও Z বিন্দু তিনটি AD, BC এবং BA-এর প্রত্যেকে 2 : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে। O বিন্দুর সাপেক্ষে A, B, C ও D এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ও $\vec{d}$।



ক. $\overrightarrow{AB}$ কে অবস্থান ভেক্টর $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. Z বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় কর। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{XY}=\frac{\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{DC}}{3}$ ৪

৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সংজ্ঞানুসারে,

A বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর, $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$

B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$

ΔOAB-এ ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি প্রয়োগ করে পাই,

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$

বা, $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$

বা, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

বা, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$ .... (i)

খ আবার, z বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর = $\overrightarrow{OZ}$

BA বাহু Z বিন্দুতে 2 : 1 অনুপাতে অন্তঃর্বিভক্ত হয়।

∴ $AZ=\frac{1}{3}AB$ এবং $ZB=\frac{2}{3}AB$

ΔOAZ-এ ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি প্রয়োগ করে পাই,

$\overrightarrow{OZ}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AZ}$

$\overrightarrow{OZ}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ .... (ii)

ΔOBZ-এ ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি প্রয়োগ করে পাই,

$\overrightarrow{OZ}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BZ}$

বা, $\overrightarrow{OZ}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{ZB}$

বা, $\overrightarrow{OZ}=\overrightarrow{OB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ .... (iii)

(ii) ও (iii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$2\overrightarrow{OZ}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

বা, $2\overrightarrow{OZ}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

বা, $2\overrightarrow{OZ}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\frac{1}{3}(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})$ [(i) নং হতে]

বা, $2\overrightarrow{OZ}=\vec{a}+\vec{b}-\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{a}$

বা, $2\overrightarrow{OZ}=\frac{4}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$

বা, $\overrightarrow{OZ}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$

গ AD বাহু X বিন্দুতে 2 : 1 অনুপাতে অন্তঃর্বিভক্ত।

সুতরাং, X বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর = $\overrightarrow{OX}$

$\overrightarrow{OX}=\frac{2}{3}\vec{d}+\frac{1}{3}\vec{a}$

অনুরূপভাবে, BC বাহু Y বিন্দুতে 2 : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত।

সুতরাং Y বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর = $\overrightarrow{OY}$

$\overrightarrow{OY}=\frac{2}{3}\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{b}$

অতএব, $\overrightarrow{XY}$ = Y বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর −X বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর

$=\overrightarrow{OY}-\overrightarrow{OX}$

$=\frac{2}{3}\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{2}{3}\vec{d}-\frac{1}{3}\vec{a}$

$=\frac{1}{3}(\vec{b}-\vec{a})+\frac{2}{3}(\vec{c}-\vec{d})$

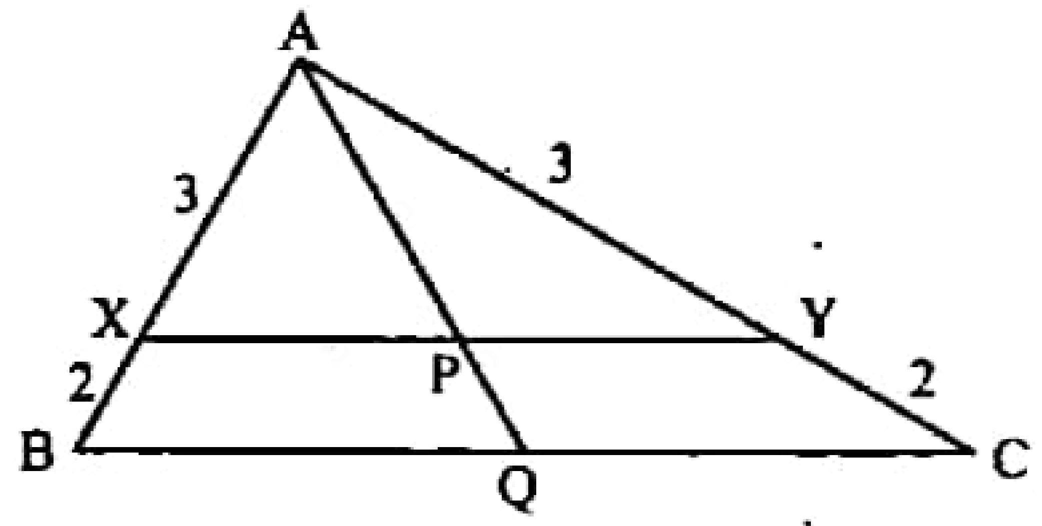
www.bdniyog.com
www.pathagar.com

$=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$ [(i) নং হতে]

$=\frac{\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{DC}}{3}$

$\therefore\ \overrightarrow{XY}=\frac{\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{DC}}{3}$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ৬ X ও Y বিন্দুদ্বয় AB ও AC বাহুদ্বয়কে 3 : 2 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে এবং Q বিন্দু BC এর মধ্যবিন্দু।



ক. $\overrightarrow{AQ}$-কে $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AC}$-এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. $\overrightarrow{BC}$ এবং $\overrightarrow{XY}$ নির্ণয় করে দেখাও যে, BC ∥ XY ৪

গ. দেখাও যে, P বিন্দু XY-এর মধ্যবিন্দু। ৪

৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ΔABQ-এ ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি প্রয়োগ করে পাই,

$\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AQ}$

ΔACQ-এ ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি প্রয়োগ করে পাই,

$\overrightarrow{QC}=\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{QC}=-\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{AC}$

যেহেতু BC-এর মধ্যবিন্দু Q।

$\therefore\ \overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{QC}$

$\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AQ}=-\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{AC}$

$2\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AQ}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$

খ ΔABC-এ ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি প্রয়োগ করে পাই,

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$ .... (i)

ΔAXY-এ ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি প্রয়োগ করে পাই,

$\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{AY}$ .... (ii)

আবার, X বিন্দু AB বাহুকে 3 : 2 অনুপাতে অন্তঃর্বিভক্ত করে

$\overrightarrow{XA}=\frac{3}{5}\overrightarrow{BA}$

অনুরূপভাবে, Y বিন্দু AC বাহুকে 3 : 2 অনুপাতে অন্তঃর্বিভক্ত করে

$\overrightarrow{AY}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$

(ii) নং সমীকরণ থেকে পাই,

$\overrightarrow{XY}=\frac{3}{5}\overrightarrow{BA}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{XY}=\frac{3}{5}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})$

$\therefore\ \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{XY}}=\frac{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}}{\frac{3}{5}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})}=\frac{5}{3}$ [(i) ও (ii) নং হতে]

$\overrightarrow{BC}=\frac{5}{3}\overrightarrow{XY}$

এখানে, $\frac{5}{3}$ একটি ধ্রুব সংখ্যা।

$\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{XY}$ সমান্তরাল

$\therefore$ BC ∥ XY **(দেখানো হলো)**

গ মনে করি, $\overrightarrow{AQ}=n.\overrightarrow{AP}$

আমরা পাই, $\overrightarrow{AQ}=\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}$

বা, $2\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

বা, $2.n.\overrightarrow{AP}=\frac{5}{3}\overrightarrow{AX}+\frac{5}{3}\overrightarrow{AY}$

বা, $2.n.\overrightarrow{AP}=\frac{5}{3}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PX})+\frac{5}{3}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PY})$

বা, $2.n.\overrightarrow{AP}=\frac{5}{3}\overrightarrow{AP}+\frac{5}{3}\overrightarrow{PX}+\frac{5}{3}\overrightarrow{AP}+\frac{5}{3}\overrightarrow{PY}$

বা, $2.n.\overrightarrow{AP}-2.\frac{5}{3}.\overrightarrow{AP}-\frac{5}{3}(\overrightarrow{PX}+\overrightarrow{PY})=0$

বা, $2.\overrightarrow{AP}\left(n-\frac{5}{3}\right)+\frac{5}{3}(\overrightarrow{XP}-\overrightarrow{PY})=0$

এখানে XP ও PY একই সরলরেখায় অবস্থিত, কিন্তু AP এদের সমান্তরাল নয়।

সুতরাং, $2.\overrightarrow{AP}\left(n-\frac{5}{3}\right)$ ও $\frac{5}{3}(\overrightarrow{XP}-\overrightarrow{PY})$-কে পৃথকভাবে 0 হতে হবে।

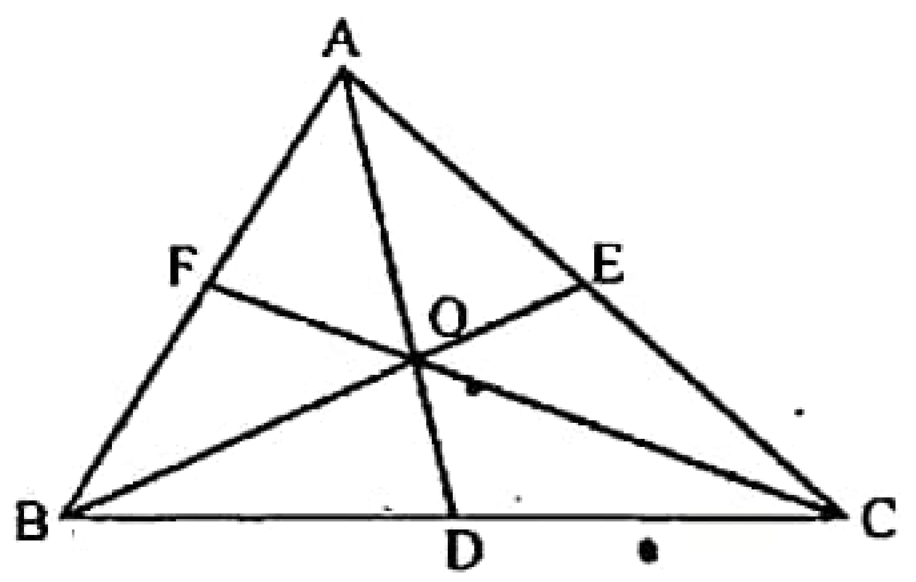
$2.\overrightarrow{AP}\left(n-\frac{5}{3}\right)=0$ হলে $n=\frac{5}{3}$

এবং $\frac{5}{3}(\overrightarrow{XP}-\overrightarrow{PY})=0$ হলে- $\overrightarrow{XP}=\overrightarrow{PY}$

$\therefore$ XP = PY

অতএব, P বিন্দু XY-এর মধ্যবিন্দু। **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ৭ ΔABC-এর তিনটি মধ্যমা যথাক্রমে AD, BE এবং CF.



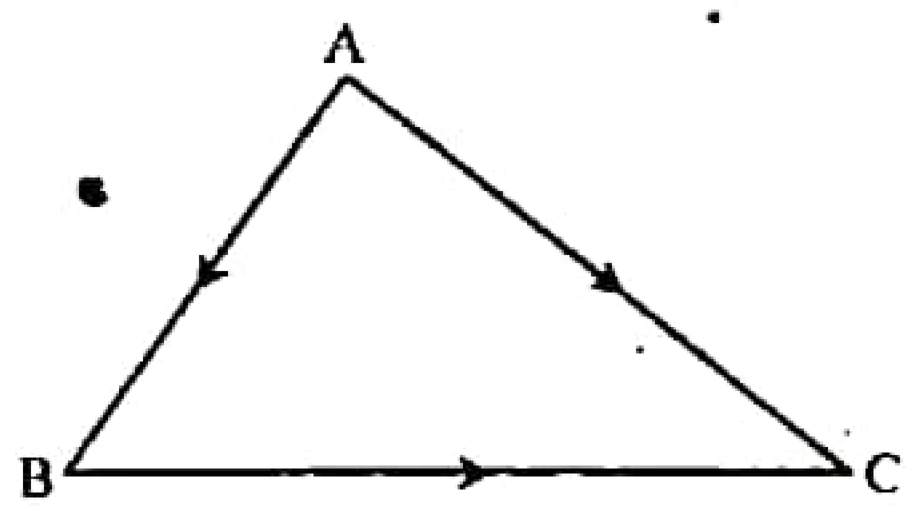
ক. ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধির সাহায্যে দেখাও যে, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=0$ ২

খ. মধ্যমা তিনটির ভেক্টর যোগফল অর্থাৎ $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় পরস্পরকে 2 ঃ 1 অনুপাতে অন্তঃর্বিভক্ত করে। ৪

৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি প্রয়োগ করে পাই,

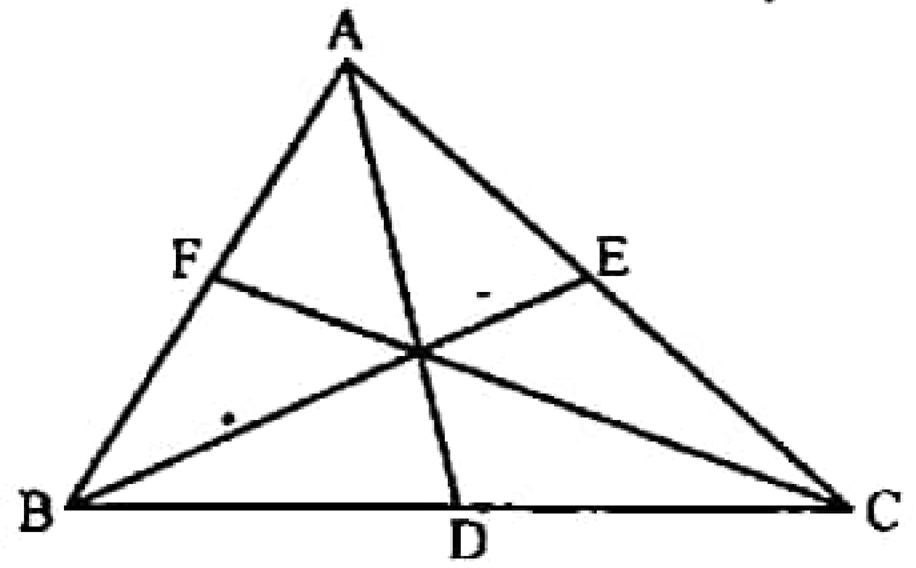
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

বা, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{CA}$

$\therefore\ \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=0$ **(দেখানো হলো)**

www.bdniyog.com
www.pathagar.com

ঘ



ΔABD-এ ভেক্টর যোগের ত্রিভুজবিধি প্রয়োগ করে পাই,

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$ .... (i)

আবার, ΔACD-এ ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি প্রয়োগ করে পাই,

$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}$

বা, $\overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}$ .... (ii)

যেহেতু, D বিন্দু BC এর মধ্যবিন্দু।

সুতরাং, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC}$

অতএব, (i) ও (ii) নং সমীকরণ থেকে পাই,

$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}$

$2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA}$

$2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AD} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$

অনুরূপভাবে, অপর মধ্যমা,

$\overrightarrow{BE} = \dfrac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}}{2}$

এবং $\overrightarrow{CF} = \dfrac{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}}{2}$

সুতরাং, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2} + \dfrac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}}{2} + \dfrac{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}}{2}$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$

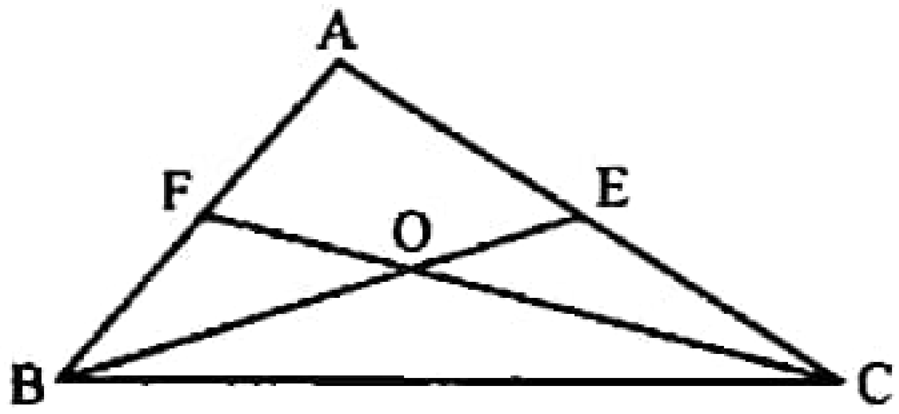
$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BC})$

$= \frac{1}{2} \times \underline{0}$

$= \underline{0}$

অতএব, মধ্যমাত্রয়ের ভেক্টর যোগফলের মান = 0

গ



মনে করি, $\overrightarrow{BO} = m\overrightarrow{BE}$ .... (i)

এবং $\overrightarrow{CO} = m\overrightarrow{CF}$ .... (ii)

ΔBOC-এ ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি প্রয়োগ করে পাই,

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}$

$= m\overrightarrow{BE} + m\overrightarrow{FC}$ [(i) ও (ii) নং সমীকরণ হতে]

$= m(\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{FC})$

আবার, ΔBCE-এ ভেক্টর যোগের ত্রিভুজবিধি প্রয়োগ করে পাই,

$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE}$

এবং ΔBCF -এ ভেক্টর যোগের ত্রিভুজবিধি প্রয়োগ করে পাই,

$\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BC}$

অতএব, $\overrightarrow{BC} = m(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BC})$

$= m(2\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB})$

[∵ E ও F বিন্দুদ্বয়, AC ও AB এর মধ্যবিন্দু।]

$m(2\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB})$ [∵ $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$]

$= m(2\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC})$

$\therefore \overrightarrow{BC} = m \times \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$

$\therefore m = \frac{2}{3}$

$\therefore \overrightarrow{BO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BE}$

$\overrightarrow{BO} = 2\overrightarrow{OE}$

$\dfrac{\overline{BO}}{\overline{OE}} = 2$

$\therefore BO : OE = 2 : 1$

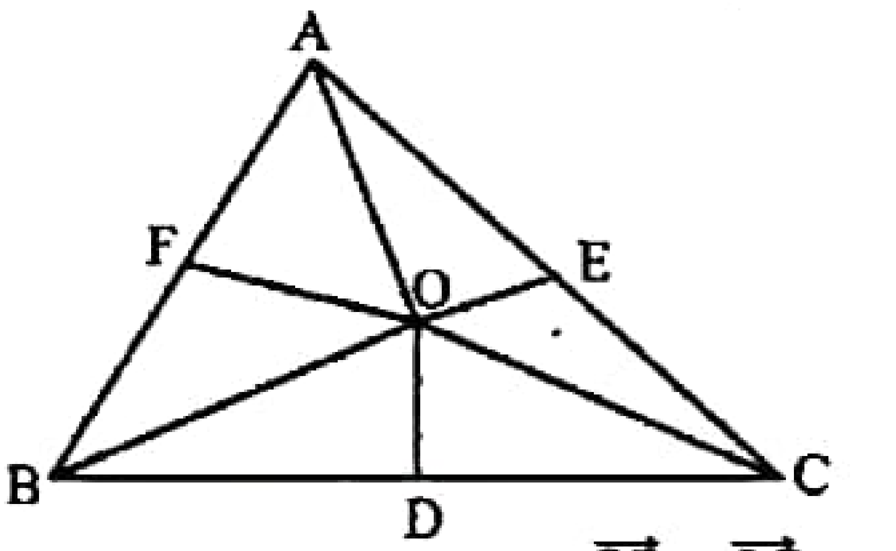
অনুরূপভাবে, $CO : OF = 2 : 1$

এবং AD মধ্যমা একে দেখানো যায়,

$AO : OD = 2 : 1$

সুতরাং, ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় পরস্পরকে 2 : 1 অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে।

প্রশ্ন ▶ ৮ D, E ও F যথাক্রমে BC, AC, ও AB-এর মধ্যবিন্দু এবং O, ΔABC-এর অভ্যন্তরে যেকোনো একটি বিন্দু।



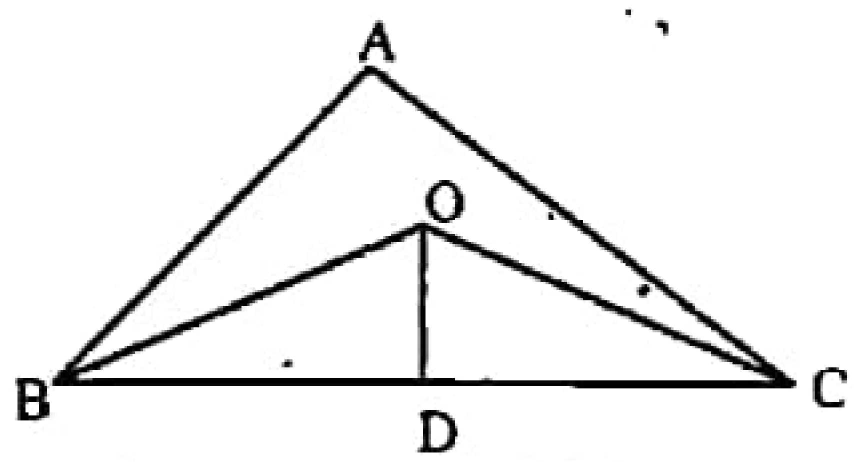
ক. ΔOBC-এর জন্য দেখাও যে, $\overrightarrow{OD} = \dfrac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2}$ ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$ ৪

গ. $\overrightarrow{OD}$-কে $\overrightarrow{OF}$, $\overrightarrow{OE}$ এবং $\overrightarrow{OA}$-এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ৪

৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



ΔOBD-এ ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি প্রয়োগ করে পাই,

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OD}$ .... (i)

আবার, ΔOCD-এ ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি প্রয়োগ করে পাই,

$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC}$ .... (ii)

এখানে, D বিন্দু BC বাহুর মধ্যবিন্দু।

$\therefore \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC}$

(i) ও (ii) নং সমীকরণ থেকে পাই,

$\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC}$

বা, $\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{BO}$

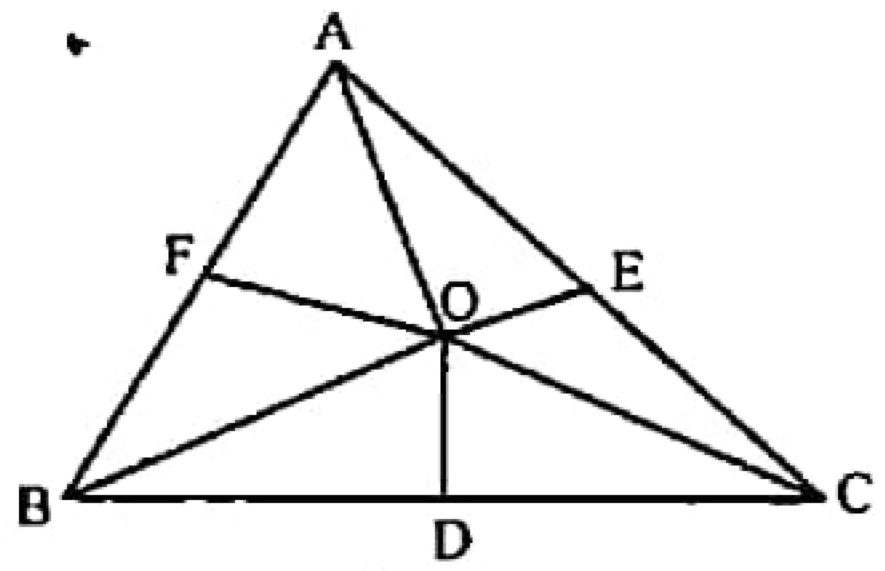
বা, $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}$

বা, $2\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}$

$\therefore \overrightarrow{OD} = \dfrac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2}$ **(দেখানো হলো)**

www.bdniyog.com
www.pathagar.com

খ



ΔOBC- থেকে আমরা পাই,

$\overrightarrow{OD} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2}$ .... (i)

অনুরূপভাবে, $\overrightarrow{OE} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}{2}$ .... (ii)

এবং $\overrightarrow{OF} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$ .... (iii)

(i), (ii), (iii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$$\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2} + \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}{2} + \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$$

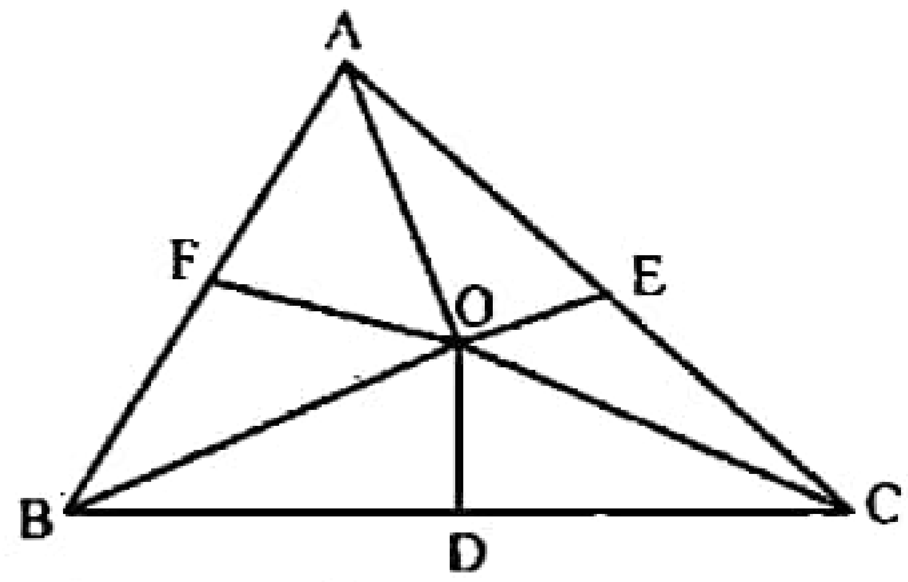
$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

$$= \frac{1}{2}(2\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC})$$

$$= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

$\therefore$ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$ **(প্রমাণিত)**

গ



ΔOBC- থেকে আমরা পাই,

$\overrightarrow{OD} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2}$ .... (i)

আবার, ΔOBF- ত্রিভুজ থেকে পাই,

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FB}$ .... (ii)

এবং ΔOCE- ত্রিভুজ থেকে পাই,

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EC}$ .... (iii)

কিন্তু E ও F যথাক্রমে AC ও AB এর মধ্যবিন্দু

সুতরাং, AE = EC এবং AF = FB .... (iv)

$\therefore$ $\overrightarrow{OD} = \frac{\overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EC}}{2}$ [(i) ও (ii) নং থেকে]

$= \frac{\overrightarrow{OF} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{AE}}{2}$ [(iv) নং থেকে]

আবার, ΔAOF- ত্রিভুজ থেকে পাই,

$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OF}$

এবং ΔAOE- ত্রিভুজ থেকে পাই,

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OE}$

সুতরাং, $\overrightarrow{OD} = \frac{\overrightarrow{OF} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OE}}{2}$

$= \frac{2\overrightarrow{OF} + 2\overrightarrow{OE} - 2\overrightarrow{OA}}{2} = \frac{2(\overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OA})}{2}$

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OA}$

ইহাই নির্ণেয় প্রকাশ।

প্রশ্ন ▶৯ A, B, C ও D একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষবিন্দু। ABCD চতুর্ভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুর যথাক্রমে P, Q, R ও S।

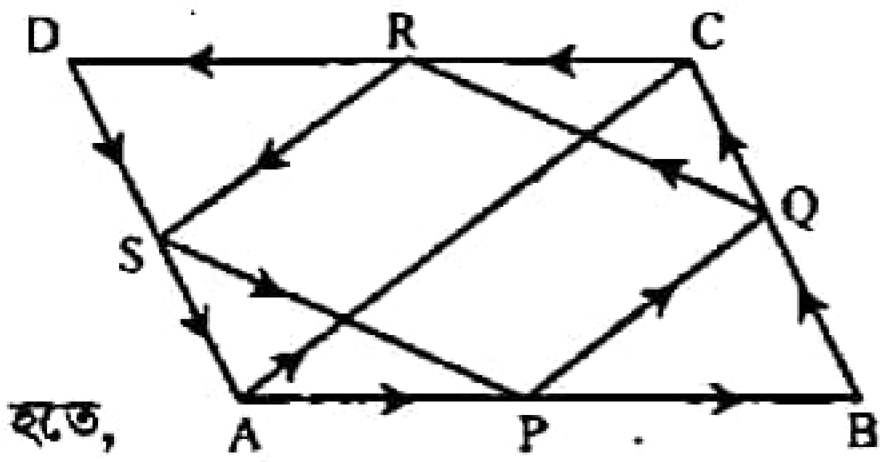
ক. PQ-এর অবস্থান ভেক্টর AB ও BC-এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, PQRS- একটি সামান্তরিক। ৪

গ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, PQRS-এর কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। ৪

৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



চিত্র হতে,

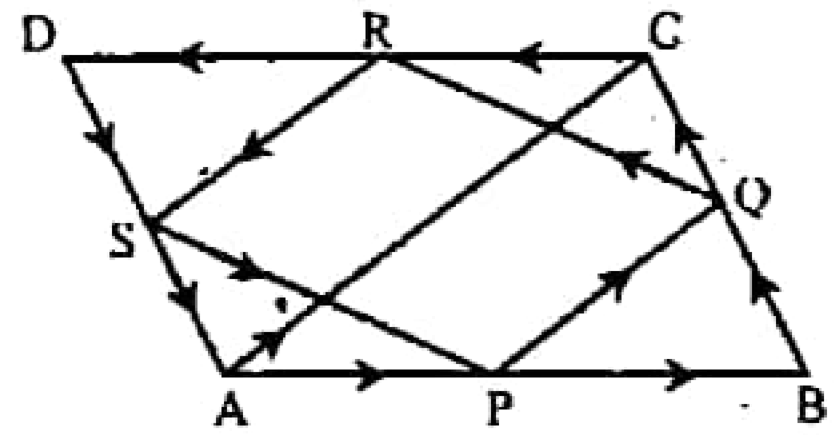
$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)$$

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)$$

খ দেওয়া আছে, ABCD চতুর্ভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q, R ও S। প্রমাণ করতে হবে যে, PQRS একটি সামান্তরিক।



প্রমাণ: মনে করি, $\overrightarrow{AB} = \underline{a}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{b}$, $\overrightarrow{CD} = \underline{c}$ এবং $\overrightarrow{DA} = \underline{d}$

'ক' হতে পাই, $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)$

$= \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$

অনুরূপভাবে, $\overrightarrow{QR} = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c})$

$\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$ এবং $\overrightarrow{SP} = \frac{1}{2}(\underline{d} + \underline{a})$

আবার, $\overrightarrow{AC} = (\underline{a} + \underline{b})$

এবং $\overrightarrow{CA} = (\underline{c} + \underline{d})$ [ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুসারে]

$\therefore$ $(\underline{a} + \underline{b}) + (\underline{c} + \underline{d}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} = \underline{0}$

$[\because \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA}]$

অর্থাৎ $(\underline{a} + \underline{b}) = -(\underline{c} + \underline{d})$

$\frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b}) = -\frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$

$\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{RS}$

$\therefore$ $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$

$\therefore$ PQ এবং SR সমান ও সমান্তরাল।

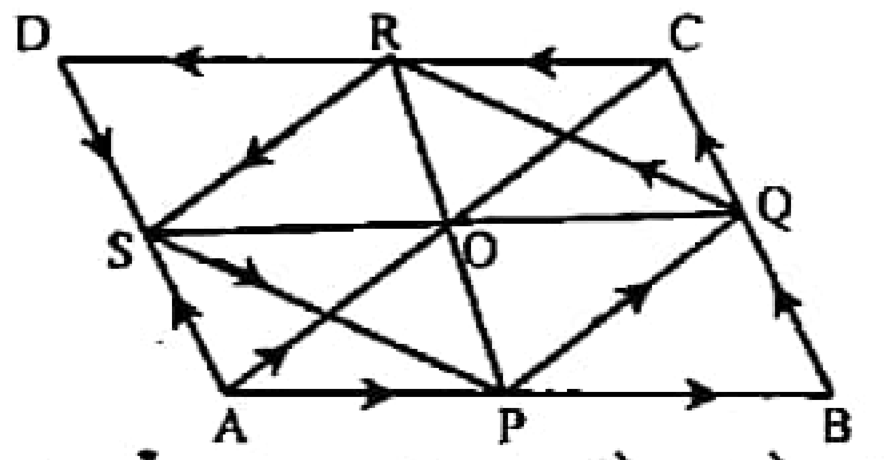
অনুরূপভাবে, QR এবং PS সমান ও সমান্তরাল।

$\therefore$ PQRS-একটি সামান্তরিক।

www.bdniyog.com

www.pathagar.com

গ



মনে করি, PQRS-সামান্তরিকের $\overrightarrow{PR}$ ও $\overrightarrow{QS}$ কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে।

মনেকরি, $\overrightarrow{PO} = \underline{a}, \overrightarrow{QO} = \underline{b}, \overrightarrow{OR} = \underline{c}$ এবং $\overrightarrow{OS} = \underline{d}$

প্রমাণ করতে হবে যে, $|\underline{a}| = |\underline{c}|, |\underline{b}| = |\underline{d}|$

প্রমাণ : $\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{PS}$ এবং $\overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{QR}$

'খ' হতে পাই, $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{QR}$

অর্থাৎ $\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OR}$

বা, $\underline{a} + \underline{d} = \underline{b} + \underline{c}$

বা, $\underline{a} + \underline{d} - \underline{c} - \underline{d} = \underline{b} + \underline{c} - \underline{c} - \underline{d}$ [উভয় পক্ষে $-\underline{c} - \underline{d}$ যোগ করে]

$\therefore \underline{a} - \underline{c} = \underline{b} - \underline{d}$

এখানে, $\underline{a}$ ও $\underline{c}$ এর ধারক PR. $\therefore \underline{a} - \underline{c}$ এর ধারক PR.

আবার, $\underline{b}$ ও $\underline{d}$ এর ধারক QS. $\therefore \underline{b} - \underline{d}$ এর ধারক QS.

$\underline{a} - \underline{c}$ ও $\underline{b} - \underline{d}$ দুইটি সমান সমান অশূন্য ভেক্টর হলে তাদের ধারক রেখা একই অথবা সমান্তরাল হবে। কিন্তু PR ও QS দুইটি পরস্পরছেদী অসমান্তরাল সরলরেখা।

সুতরাং $\underline{a} - \underline{c}$ ও $\underline{b} - \underline{d}$ ভেক্টরদ্বয় অশূন্য হতে পারে না বিধায় এদের মান শূন্য হবে।

$\therefore \underline{a} - \underline{c} = 0$ বা, $\underline{a} = \underline{c}$ এবং $\underline{b} - \underline{d} = 0$ বা, $\underline{b} = \underline{d}$

$\therefore |\underline{a}| = |\underline{c}|$ এবং $|\underline{b}| = |\underline{d}|$

$\therefore$ PQRS-এর কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ১০ ABCD চতুর্ভুজের AC ও BD কর্ণের ছেদবিন্দু O। P ও Q বিন্দুদ্বয় BD ও AC কর্ণদ্বয়কে সমদ্বিখণ্ডিত করেছে।

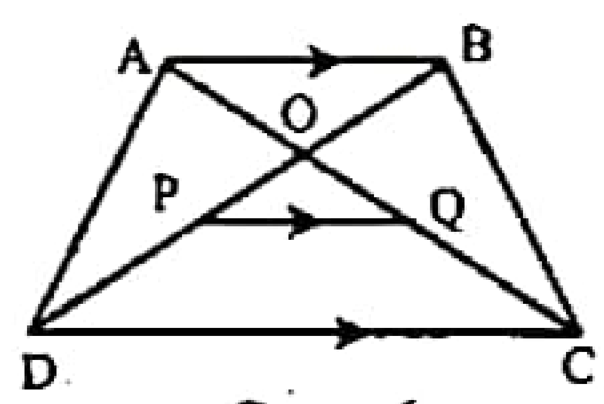
ক. O-এর সাপেক্ষে A, B, C ও D বিন্দু চারটির অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় কর। ২

খ. ABCD ট্রাপিজিয়াম হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $PQ \,||\, AB \,||\, DC$ এবং $PQ = \frac{1}{2}(DC - AB)$ ৪

গ. O যদি P ও Q বিন্দুর সাথে মিলে যায় অর্থাৎ O যদি কর্ণদ্বয়কে সমদ্বিখণ্ডিত করে তাহলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ABCD একটি সামান্তরিক। ৪

১০ নং প্রশ্নের সমাধান

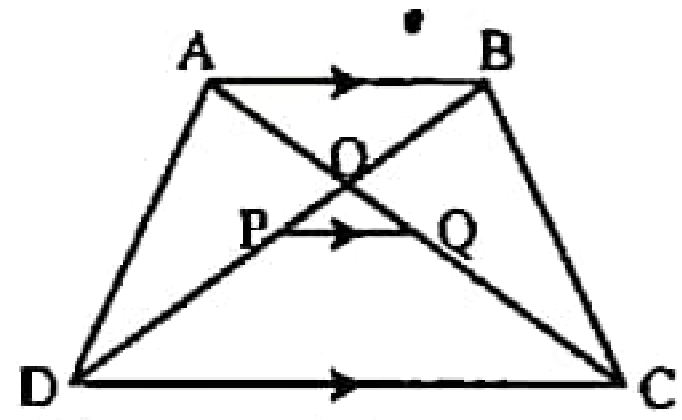
ক



মনে করি, ABCD একটি চতুর্ভুজ যার কর্ণদ্বয় AC ও BD এর ছেদ বিন্দু O এবং P ও Q যথাক্রমে BD ও AC কর্ণের মধ্যবিন্দু।

O বিন্দুর সাপেক্ষে A, B,C ও D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে, $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ ও $\overrightarrow{OD}$.

খ



মনে করি, ABCD ট্রাপিজিয়ামের AB||CD এবং AC ও BD কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে Q ও P. P, Q যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, $PQ = \frac{1}{2}(DC - AB)$

এবং $PQ \,||\, AB \,||\, CD$.

প্রমাণ: মনে করি, কোনো ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে A, B, C, D এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$.

$\overline{AB} = \underline{b} - \underline{a}$

$\overline{DC} = \underline{c} - \underline{d}$

$\therefore$ P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{d})$ [$\because$ P, BD এর মধ্যবিন্দু]

Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{c})$ [$\because$ Q, AC এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{c}) - \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{d})$

$= \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{c} - \underline{b} - \underline{d})$

বা, $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\{(\underline{c} - \underline{d}) - (\underline{b} - \underline{a})\}$

$\therefore \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB})$

$AB \,||\, CD$ হওয়ায় $\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB}$ ভেক্টরটিও $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ ভেক্টরের সমান্তরাল হবে। তাহলে $\overrightarrow{PQ}$ ভেক্টরটিও $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ ভেক্টরদ্বয়ের সমান্তরাল হবে কারণ

$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB})$

$\therefore |\overrightarrow{PQ}| = \frac{1}{2}|(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB})| = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{DC}| - |\overrightarrow{AB}|)$

বা, $PQ = \frac{1}{2}(DC - AB)$

অর্থাৎ $PQ \,||\, AB \,||\, DC$

$\therefore PQ = \frac{1}{2}(DC - AB)$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, ABCD চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় BD ও AC এর মধ্যবিন্দু P ও Q এবং কর্ণদ্বয়ের ছেদবিন্দু O একই বিন্দু। অর্থাৎ O কর্ণদ্বয়কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

প্রমাণ করতে হবে যে, ABCD একটি সামান্তরিক।

প্রমাণ : 'খ' হতে পাই, $AB \,||\, DC$

যেহেতু O, AC ও BD এর মধ্য বিন্দু।

$\therefore \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OB}$ এবং $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$

এখন, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$ [ত্রিভুজ বিধি অনুসারে]

$= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{DO}$

$= \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC}$ [$\because \underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$]

$= \overrightarrow{DC}$ [ত্রিভুজ বিধি অনুসারে]

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\therefore AB = DC$ এবং $AB \,||\, DC$

$\therefore$ ABCD একটি সামান্তরিক। **(প্রমাণিত)**

www.bdniyog.com
www.pathagar.com

প্রশ্ন ▶ ১১ **ABCD সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় যথাক্রমে AC ও BD.**

[সাতক্ষীরা সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়, সাতক্ষীরা; সিলেট সরকারী পাইলট উচ্চ বিদ্যালয়, সিলেট]

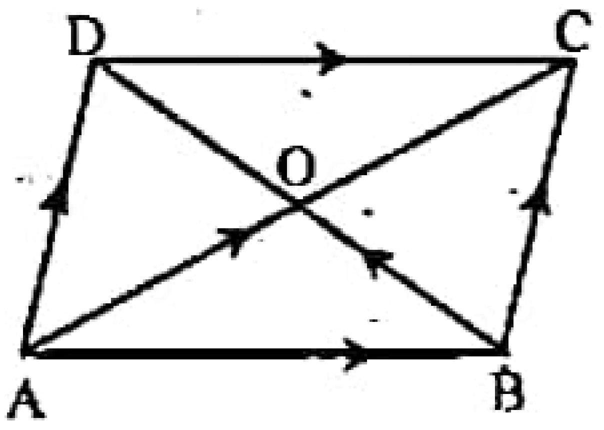
ক. A বিন্দুর সাপেক্ষে B, C ও D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর নির্দেশ কর।

খ. $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টরদ্বয়কে $\overrightarrow{AD}$ ও $\overrightarrow{BD}$ ভেক্টরদ্বয়ের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

গ. দেখাও যে, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$ এবং $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AB}$.

১১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



ABCD-সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় AC ও BD।

A বিন্দুর সাপেক্ষে B, C ও D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ ও $\overrightarrow{AD}$.

খ $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টরদ্বয়কে $\overrightarrow{AD}$ ও $\overrightarrow{BD}$ ভেক্টরদ্বয়ের মাধ্যমে প্রকাশ করতে হবে।

প্রমাণ : ΔABD-তে $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$ [ত্রিভুজ বিধি]

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}$ .... (i)

আবার, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ [ত্রিভুজ বিধি]

$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$

[ABCD সামান্তরিক বলে $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$]

$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}$ [সমীকরণ (i) হতে]

$\therefore \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}$ .... (ii)

অতএব, (i) ও (ii) নং সমীকরণ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টরদ্বয়কে $\overrightarrow{AD}$ ও $\overrightarrow{BD}$ ভেক্টরদ্বয়ের মাধ্যমে প্রকাশ করে।

গ দেখাতে হবে যে, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\,\overrightarrow{BC}$.

এবং $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\,\overrightarrow{AB}$

'খ' হতে পাই,

$\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}$

বা, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BD}$

[উভয় পক্ষে $\overrightarrow{BD}$ যোগ করে]

$= 2\,\overrightarrow{AD}$

$\therefore \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\,\overrightarrow{BC}$ .... (iii)

[ABCD সামান্তরিক বলে $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$]

আবার, $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = (2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}) - \overrightarrow{BD}$ [(ii) ব্যবহার করে]

$= 2\,\overrightarrow{AD} - 2\,\overrightarrow{BD}$

$= 2(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD})$

$= 2(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB})$ [$\because \overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{BD}$]

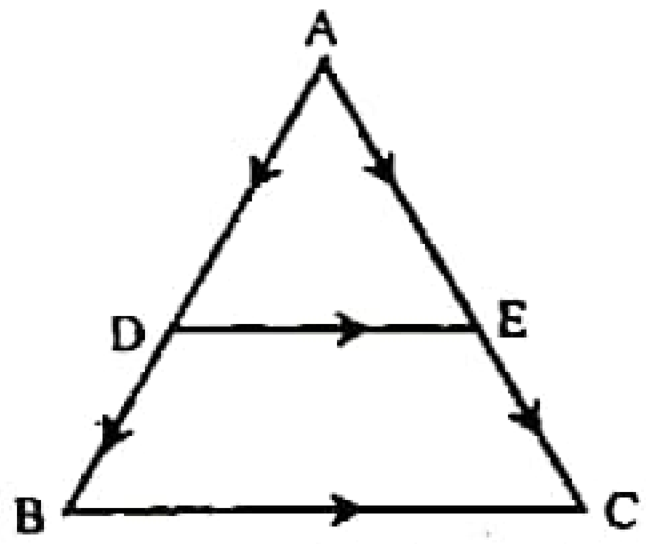
$= 2\,\overrightarrow{AB}$ [ত্রিভুজ বিধি অনুসারে $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB}$]

$\therefore \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AB}$ .... (iv)

সমীকরণ (iii) ও (iv) হতে পাই;

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$ এবং $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\,\overrightarrow{AB}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ১২



ΔABC-এর AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E.

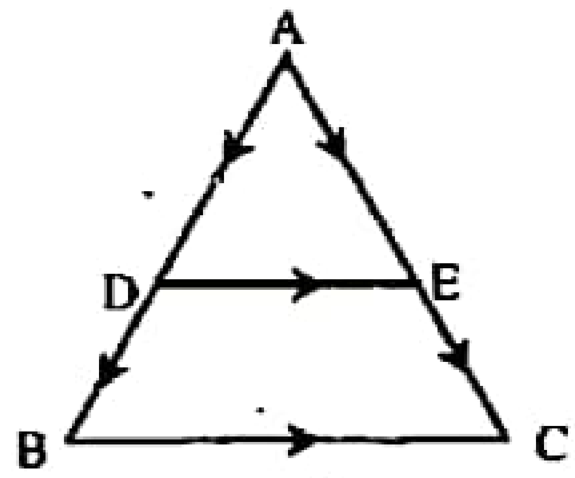
ক. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}$-এর মান কত? $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ কেন? ব্যাখ্যা কর।

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $DE \parallel BC$ এবং $DE = \frac{1}{2}BC$

গ. DBCE ট্রাপিজিয়ামের DB ও EC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P ও Q হলে, ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $PQ \parallel DE \parallel BC$ এবং $PQ = \frac{1}{2}(BC + DE)$

১২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক



ABC ত্রিভুজের AB বাহুর মধ্যবিন্দু D এবং $DE \parallel BC$.

ΔADE-এ $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$ [ত্রিভুজ বিধি অনুসারে]

আবার, D, AB-এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore AD = \frac{1}{2}AB$

$\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; কারণ $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}$ এর ধারক রেখা এবং দিক একই।

খ দেওয়া আছে, ΔABC-এর AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E।

ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ করতে হবে যে, $DE \parallel BC$ এবং $DE = \frac{1}{2}BC$

প্রমাণ : 'ক' হতে পাই, $AD = \frac{1}{2}AB$ [চিত্র : 'ক' দেখ।]

যেহেতু E, AC-এর মধ্যবিন্দু।

$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ $\therefore \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AE}$ এবং $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AD}$

ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজ বিধি অনুসারে, $\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DE}$ ...... (i)

এবং $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$

$\therefore\ 2\overrightarrow{AE} - 2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

বা, $2(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{BC}$

বা, $2\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BC}$ [(i) নং হতে]

$\therefore\ \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

আবার, $|\overrightarrow{DE}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$ বা, $DE = \frac{1}{2}BC$

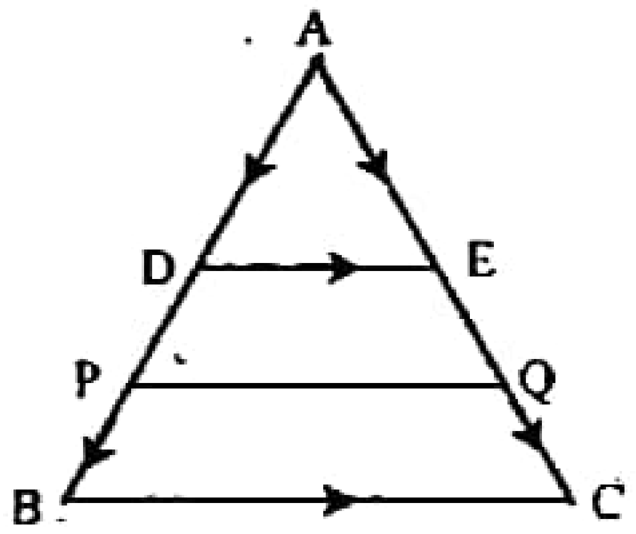
সুতরাং $\overrightarrow{DE}$ ও $\overrightarrow{BC}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল। কিন্তু এখানে ধারক রেখা এক নয়। সুতরাং DE ও BC সমান্তরাল।

সুতরাং $DE \parallel BC$ এবং $DE = \frac{1}{2}BC$ **(প্রমাণিত)**

www.bdniyog.com

www.pathagar.com

গ



DBCE ট্রাপিজিয়ামে P ও Q যথাক্রমে BD ও CE-এর মধ্যবিন্দু। ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ করতে হবে যে, PQ ∥ DE ∥ BC এবং $PQ = \frac{1}{2}(BC + DE)$

প্রমাণ : মনে করি, কোনো ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে D, B, C ও E বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{d}, \underline{b}, \underline{c}$ ও $\underline{e}$.

$\therefore \overrightarrow{BC} = \underline{c} - \underline{b}$ এবং $\overrightarrow{DE} = \underline{e} - \underline{d}$

$\therefore$ P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{d} + \underline{b})$ [∵ P, BD-এর মধ্যবিন্দু]

এবং Q বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{e} + \underline{c})$ [∵ Q, EC-এর মধ্যবিন্দু]

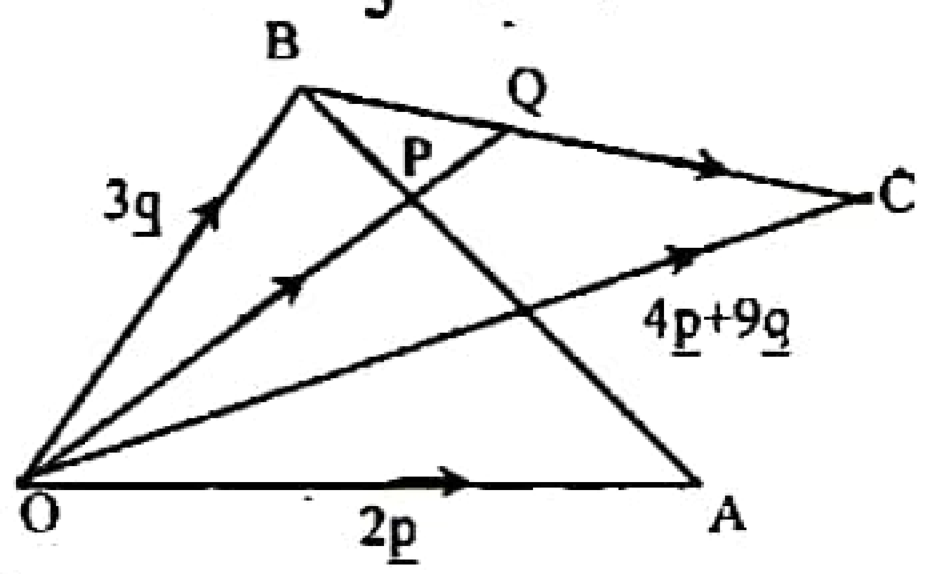
$$\therefore \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\underline{e} + \underline{c}) - \frac{1}{2}(\underline{d} + \underline{b})\}$$
$$= \frac{1}{2}(\underline{e} + \underline{c} - \underline{d} - \underline{b})$$
$$= \frac{1}{2}\{(\underline{c} - \underline{b}) + (\underline{e} - \underline{d})\}$$
$$\therefore \overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE})$$

কিন্তু $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{DE}$ পরস্পর সমান্তরাল হওয়ায় $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE}$ ভেক্টরটি ও তাদের সমান্তরাল হবে।

$\therefore$ PQ ∥ BC ∥ DE এবং $PQ = \frac{1}{2}(BC + DE)$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ব্যাংক উত্তরসহ সৃজনশীল রচনামূলক প্রশ্ন

প্রশ্ন ▶ ১৩ **O বিন্দুর সাপেক্ষে A, B এবং C বিন্দু তিনটির অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $2\underline{p}$, $3\underline{q}$ এবং $4\underline{p} + 9\underline{q}$ । P এবং Q বিন্দু দুটি যথাক্রমে এমন যে, $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OQ} = \lambda\overrightarrow{OP}$, যেখানে, $\lambda > 1$**



ক. $\overrightarrow{AP}$ কে $\underline{p}$ ও $\underline{q}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

খ. $\overrightarrow{OP}$ ভেক্টরকে $\underline{p}$ ও $\underline{q}$ এবং $\overrightarrow{OQ}$ ও $\overrightarrow{BQ}$ ভেক্টরদ্বয়কে $\underline{p}, \underline{q}$ ও λ এর মধ্যমে প্রকাশ কর।

গ. $\overrightarrow{BQ} = \mu\overrightarrow{BC}$ হলে, λ, μ এবং BQ : BC এর মান নির্ণয় কর।

উত্তর: ক. $\frac{-4}{3}\underline{p} + 2\underline{q}$; **খ.** $\overrightarrow{OP} = \frac{2}{3}\underline{p} + 2\underline{q}$, $\overrightarrow{OQ} = \frac{2}{3}\lambda\underline{p} + 2\lambda\underline{q}$,

$\overrightarrow{BQ} = \frac{2}{3}\lambda\underline{p} + (2\lambda - 3)\underline{q}$; **গ.** BQ : QC = 1 : 1

প্রশ্ন ▶ ১৪ **ত্রিভুজ OAB এর O কে ভেক্টর মূলবিন্দু ধরে A, B এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে a, b। P ও R, AB কে এবং Q ও S, OB কে 3 : 1 অনুপাতে যথাক্রমে অন্তর্বিভক্ত ও বহির্বিভক্ত করে।**

ক. তথ্যানুযায়ী দিক নির্দেশক চিত্রটি অঙ্কন কর এবং বর্ণনা দাও।

খ. P, Q, R, S এর অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় কর।

গ. দেখাও যে, OA ∥ QP ∥ RS.

উত্তর: খ. $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}(3\underline{b} + \underline{a})$; $\overrightarrow{OQ} = \frac{3}{4}\underline{b}$; $\overrightarrow{OR} = \frac{1}{2}(3\underline{b} - \underline{a})$; $\overrightarrow{OS} = \frac{3}{2}\underline{b}$

প্রশ্ন ▶ ১৫ **O বিন্দুর সাপেক্ষে A, B, C এবং D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $6\underline{a}$, $8\underline{a}$, $2\underline{b}$ এবং $8\underline{b}$ । K বিন্দু AD এবং BC কে যথাক্রমে 1 : m এবং 1 : n অনুপাতে বিভক্ত করে।**

ক. তথ্যের আলোকে দিক নির্দেশক চিত্র আঁক।

খ. $\overrightarrow{OK}$ এর অবস্থান ভেক্টরের জন্য দুটি রাশি নির্ণয় কর।

গ. a ও b অসমান্তরাল হলে m এবং n এর মান নির্ণয় কর।

উত্তর : খ. $\frac{6m}{1+m}\underline{a} + \frac{8}{1+m}\underline{b}$ এবং $\frac{8n}{1+n}\underline{a} + \frac{2}{1+n}\underline{b}$.

গ. $m = 12, n = 2\frac{1}{4}$

প্রশ্ন ▶ ১৬ **দেওয়া আছে, $\overrightarrow{OP} = 2\underline{a} + \underline{b}$, $\overrightarrow{OQ} = 3\underline{a} - 2\underline{b}$ ও $\overrightarrow{OR} = h\underline{a} + 5\underline{b}$ এবং P, Q, R বিন্দু তিনটি সমরেখ।**

ক. তথ্যের আলোকে দিক নির্দেশক চিত্র আঁক।

খ. $\overrightarrow{PQ}$ এবং $\overrightarrow{PR}$ এর মান নির্ণয় কর।

গ. h এর মান নির্ণয় কর।

উত্তর: গ. $h = \frac{2}{3}$

প্রশ্ন ▶ ১৬ **PQRS একটি সামান্তরিক। যার কর্ণ $\overline{PR}$ ও $\overline{QS}$।**

[যশোর জিলা স্কুল, যশোর]

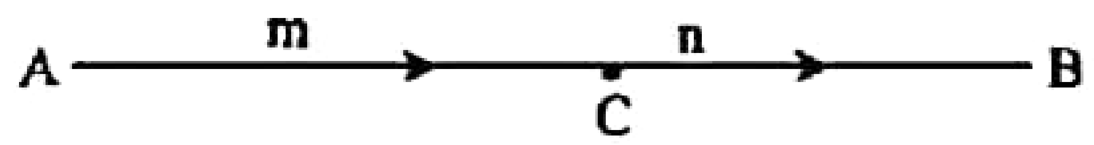
ক. $\overline{PQ}$ ভেক্টরকে $\overline{PS}$ ও $\overline{QS}$ ভেক্টরদ্বয়ের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

খ. দেখাও যে, $\overline{PR} + \overline{QS} = 2\overline{QR}$ এবং $\overline{PR} + \overline{QS} = 2\overline{PQ}$.

গ. ভেক্টর পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

উত্তর: ক. $\overline{PQ} = \overline{PS} - \overline{QS}$

প্রশ্ন ▶ ১৮



[মাতৃপীঠ সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, চাঁদপুর]

ক. A বিন্দুর সাপেক্ষে B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর কি? ২

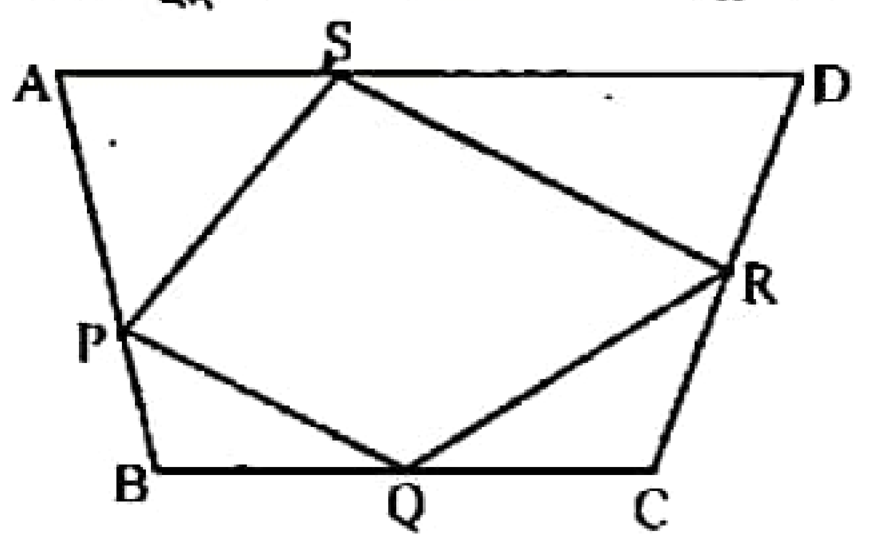
খ. চিত্রে AB রেখাংশে অন্তঃস্থ বিন্দু C এর ক্ষেত্রে যদি AC : CB = m : n হয় তবে দেখাও যে, $n\overrightarrow{AC} = m\overrightarrow{CB}$. ৪

গ. যদি A, B, C এর অবস্থান ভেক্টর $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ হয় তবে দেখাও যে, $\underline{c} = \frac{na + mb}{m + n}$ ৪

উত্তর: ক. $\underline{b} - \underline{a}$

www.bdniyog.com
www.pathagar.com

প্রশ্ন ▶১৯ **নিচের চতুর্ভুজটি লক্ষ্য কর এবং প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও:**



ABCD চতুর্ভুজের AB, BC, CD এবং BD বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে P, Q, R এবং S. A, B, C এবং D বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে **a, b, c এবং d.** [নাটোর সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়, নাটোর]

ক. R বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, PQRS একটি সামান্তরিক। ৪

গ. PBDS ট্রাপিজিয়ামের PB ও SD এর তীর্যক বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, MN ∥ BD ∥ PS এবং $MN = \frac{1}{2}(BD + PS)$ ৪

প্রশ্ন ▶২০ **ABC ত্রিভুজের AD, BE ও CF তিনটি মধ্যমা B ও C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর b ও c এবং A বিন্দুটির অবস্থান মূলবিন্দুতে।** [ঝালকাঠি সরকারি হরচন্দ্র বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, ঝালকাঠি]

ক. উদ্দীপকের তথ্যটিকে চিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ করে $\overrightarrow{BD}$ নির্ণয় কর। ২

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, মধ্যমাত্রয় সমবিন্দু। ৪

গ. ΔABC এর ∠C সমকোণ। C থেকে অতিভুজের উপর অঙ্কিত লম্ব CD হলে জ্যামিতিক পদ্ধতিতে প্রমাণ কর যে, CD2 = AD.BD. ৪

উত্তর: ক. $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}(\underline{c} - \underline{b})$

প্রশ্ন ▶২১ **ABCD একটি সামান্তরিক যার কর্ণদ্বয় AC ও BD পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করেছে।** [আইইটি গভঃ হাইস্কুল, নারায়ণগঞ্জ]

ক. ভেক্টর যোগের সামান্তরিক বিধি বর্ণনা কর। ২

খ. $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{AD}$ ভেক্টরদ্বয়কে $\overrightarrow{AC}$ ও $\overrightarrow{BD}$ ভেক্টরদ্বয়ের মাধ্যমে প্রকাশ কর। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, সামান্তরিকটির কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। ৪

প্রশ্ন ▶২২ **ABC ত্রিভুজের BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F.** [জামালপুর সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়]

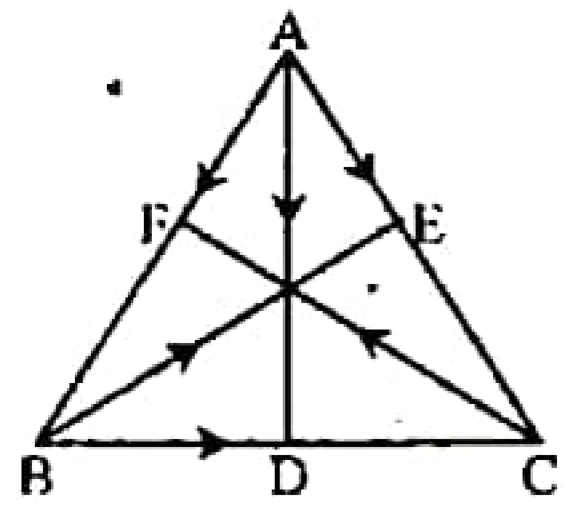
ক. $\overrightarrow{BC}$ কে $\overrightarrow{BE}$ ও $\overrightarrow{CF}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{BF} = 0$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, AD, BE ও CF সমবিন্দু এবং তাদের ছেদবিন্দুতে প্রত্যেকে 2 : 1 অনুপাতে বিভক্ত হয়। ৪

উত্তর: ক. $\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BE} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CF}$

প্রশ্ন ▶২৩ **ΔABC এর BC, CA, AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F.**



[বাগেরহাট সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়, বাগেরহাট]

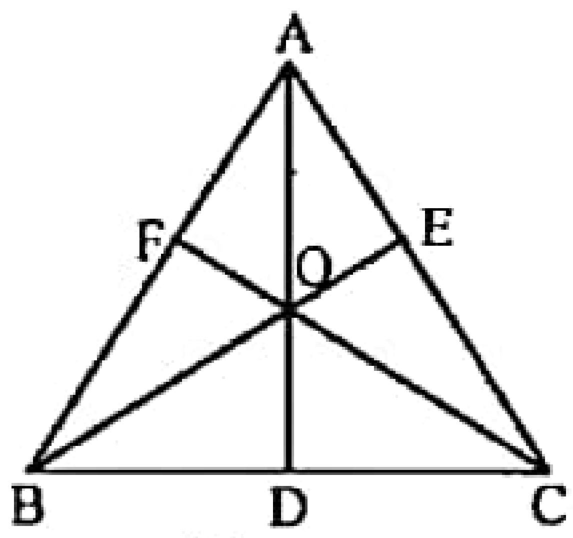
ক. $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টরকে $\overrightarrow{BE}$ ও $\overrightarrow{CF}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = 0$ ৪

গ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, F বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত BC এর সমান্তরাল রেখা অবশ্যই E বিন্দুগামী হবে। ৪

উত্তর: ক. $\overrightarrow{AB} = \frac{-2}{3}\overrightarrow{CF} - \frac{4}{3}\overrightarrow{BE}$

প্রশ্ন ▶২৪



চিত্রে AB = BC = CA = 3 সে.মি. [ফয়জুর রহমান আইডিয়াল ইনস্টিটিউট]

ক. ΔABC এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। ২

খ. প্রমাণ কর যে, AO.OD = BO.OE = CO.OF ৪

গ. ভেক্টর ব্যবহার করে প্রমাণ কর যে, $FE = \frac{1}{2}BC$ এবং EF ∥ BC. ৪

প্রশ্ন ▶২৫ **একটি ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু A(2, 1), B(–1, 1) ও C(2, 5)** [যশোর জিলা স্কুল, যশোর]

ক. ত্রিভুজটির বাহু তিনটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। ২

খ. ত্রিভুজটির BC, CA, AB বাহুত্রয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F হলে $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{CF}$ ভেক্টরগুলোকে $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AC}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ৪

গ. ত্রিভুজের AB ও AC বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু D ও E হলে ভেক্টরের মাধ্যমে প্রমাণ কর যে, DE || BC এবং $DE = \frac{1}{2}BC$. ৪

উত্তর: ক. AB = 3; BC = 5; AC = 4;

খ. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CF} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

internet-linked

প্রশ্ন ব্যাংকের আরও প্রশ্ন ও উত্তরের জন্যে নিচের ওয়েব অ্যাড্রেসটি টাইপ করুন

ssc.panjeree.com/hmt/hm12qbs.pdf

REVISION R

এ অংশে অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ তথ্য ও সূত্র, পরীক্ষার আগে যার উপর চোখ বুলিয়ে নেওয়া প্রয়োজন বা অবশ্যই মনে রাখতে হবে এমন বিষয়সমূহ একনজরে উল্লেখ করা হয়েছে। পরীক্ষার আগে এ বিষয়গুলো রিভিশন দিলে পরীক্ষায় নির্ভুলভাবে অঙ্ক সমাধান করতে পারবে।

- যে রাশি কেবলমাত্র এককসহ পরিমাণ দ্বারা সম্পূর্ণরূপে প্রকাশ করা যায়, তাকে স্কেলার বা অদিক বা নির্দিক রাশি বলা হয়। দৈর্ঘ্য, ভর, সময়, আয়তন, দ্রুতি, তাপমাত্রা ইত্যাদি প্রত্যেকেই স্কেলার রাশি।
- যে রাশিকে সম্পূর্ণরূপে প্রকাশ করার জন্য তার পরিমাণ ও দিক উভয়ের প্রয়োজন হয়, তাকে ভেক্টর বা সদিক রাশি বলা হয়। সরণ, বেগ, ত্বরণ, ওজন, বল, তড়িৎ প্রাবল্য ইত্যাদি প্রত্যেকেই ভেক্টর রাশি।

www.bdniyog.com

www.pathagar.com

- AB একটি ভেক্টর হলে একে $\overrightarrow{AB}$ বা $\underline{AB}$ বা $\overline{AB}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
- কোনো ভেক্টরের দৈর্ঘ্য একক হলে, তাকে একক ভেক্টর বলা হয়। $\underline{a}$ একটি একক ভেক্টর হলে তাকে $\hat{\underline{a}}$ আকারে লিখা যায়।
- কোনো ভেক্টরের দৈর্ঘ্য শূন্য হলে, তাকে শূন্য ভেক্টর বলা হয় এবং $\underline{0}$ প্রতীক দ্বারা সূচিত হয়। সুতরাং বলা যায় যে কোনো রেখা শূন্য ভেক্টরের ধারক রেখা।
- দুটি ভেক্টরের দিক একই এবং তাদের ধারক রেখা একই রেখা বা সমান্তরাল রেখা হলে তাদের সদৃশ ভেক্টর বলা হয়।
- সমজাতীয় দুইটি ভেক্টর যদি একই দিকে ক্রিয়া না করে তবে তাদেরকে বিসদৃশ ভেক্টর বলে।
- যদি দুইটি ভেক্টরের দিক একই, দৈর্ঘ্য সমান এবং তাদের ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল হয় তাহলে তাদেরকে সমান ভেক্টর বলে।
- $\vec{u}$ যে কোনো ভেক্টর হলে যদি অপর একটি ভেক্টর $\vec{v}$ নির্ণয় করা যায় যাতে $\vec{v} = -\vec{u}$ হয় তাহলে $\vec{v}$ বা $-\vec{u}$ কে $\vec{u}$ ভেক্টরের বিপরীত ভেক্টর বলে।

  দুইটি ভেক্টর পরস্পর বিপরীত হবে যদি তাদের –

১. দৈর্ঘ্য সমান হয়।
২. ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল হয় এবং
৩. দিক বিপরীত হয়।

- $\underline{u}$ এবং $\underline{v}$ দুইটি ভেক্টর হলে এদের যোগফল বা লব্ধিকে $\underline{u} + \underline{v}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং $\underline{u}$ ভেক্টরের প্রান্তবিন্দুতে $\underline{v}$ ভেক্টরের আদিবিন্দু স্থাপন করে $\underline{u}$ এর আদি বিন্দুর সাথে $\underline{v}$ এর প্রান্তবিন্দু যোগ করলে যে ভেক্টর পাওয়া যায় তাই $\underline{u} + \underline{v}$।
- কোনো সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু দ্বারা দুইটি ভেক্টর $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ এর মান ও দিক সূচিত হলে, ঐ সামন্তরিকের যে কর্ণ $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ ভেক্টরদ্বয়ের সূচক রেখার ছেদবিন্দুগামী তা দ্বারা $\underline{u} + \underline{v}$ ভেক্টরের মান ও দিক সূচিত হয়। ইহা ভেক্টর যোগের সামন্তরিক বিধি।
- দুই বা ততোধিক ভেক্টরের যোগফলকে তাদের লব্ধি বলে। বল বা বেগের লব্ধি নির্ণয়ের ক্ষেত্রে ভেক্টর যোজন পদ্ধতি অনুসরণ করা যায়।
- $\underline{u}$, $\underline{v}$ সমান্তরাল না হলে $\underline{u}$, $\underline{v}$ এবং $\underline{u} + \underline{v}$ ভেক্টরের দ্বারা ত্রিভুজ উৎপন্ন হয় বলে উপরোক্ত যোজন পদ্ধতিকে ত্রিভুজ বিধি বলে।
- দুটি ভেক্টর সমান্তরাল হলে তাদের যোগের ক্ষেত্রে সামন্তরিক বিধি প্রযোজ্য নয়।
- $\underline{u}$ এবং $\underline{v}$ ভেক্টরদ্বয়ের বিয়োগফল বলতে $\underline{u}$ এবং $(-\underline{v})$ ভেক্টরদ্বয়ের যোগফলকে বোঝায়। $\underline{u}$ এবং $\underline{v}$ এর আদিবিন্দু একই হলে, $\underline{v}$ এর অন্তবিন্দু থেকে $\underline{u}$ এর অন্তবিন্দু পর্যন্ত রেখাংশ দ্বারা $\underline{u} - \underline{v}$ ভেক্টরকে সূচিত করা হয়:
- যে ভেক্টরের দৈর্ঘ্য 1 একক, তাকে (দিক নির্দেশক) একক ভেক্টর বলে।
- যে কোনো দুইটি ভেক্টর $\underline{u}$ এবং $\underline{v}$ এর জন্য $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$ ইহা ভেক্টর যোগের বিনিময় বিধি।
- যেকোনো তিনটি ভেক্টর $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ এর জন্য $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$ ইহা ভেক্টর যোজনের সংযোগ বিধি।
- যে কোনো তিনটি ভেক্টর $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ এর জন্য $\underline{u} + \underline{v} = \underline{u} + \underline{w}$ হলে, $\underline{v} = \underline{w}$ হবে। ইহা ভেক্টর যোগের বর্জন বিধি।
- m, n দুটি স্কেলার এবং $\underline{u}$, $\underline{v}$ দুটি ভেক্টর হলে,

  ১. $(m + n)\underline{v} = m\underline{v} + n\underline{v}$ (বণ্টন সূত্র)

  ২. $m(\underline{u} + \underline{v}) = m\underline{u} + m\underline{v}$ (বণ্টন সূত্র)
- সমতলস্থ কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু O-এর সাপেক্ষে ঐ সমতলের যেকোনো বিন্দু P-এর অবস্থান $\overrightarrow{OP}$ দ্বারা নির্দিষ্ট করা যায়। $\overrightarrow{OP}$ কে O বিন্দুর সাপেক্ষে P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বলা হয় এবং O বিন্দুকে ভেক্টর মূলবিন্দু বলা হয়।
- অবস্থান ভেক্টর সংক্রান্ত কতিপয় প্রতিজ্ঞা:

(i) দুইটি বিন্দু A, B এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$ হলে $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$

(ii) A, B, C-এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ হলে A, B, C সমরেখ হবে যদি এবং কেবলমাত্র যদি $\overrightarrow{AC} = K.\overrightarrow{AB}$ হয়। অর্থাৎ, যদি $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টরটি $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টরের সংখ্যা গুণিতক হয়।

(iii) A, B, C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ হলে C বিন্দু যদি AB রেখাংশকে m : n অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে তবে, $\underline{c} = \dfrac{m\underline{b} + n\underline{a}}{m + n}$ হবে। যদি বহির্বিভক্ত হয় তবে, $\underline{c} = \dfrac{m\underline{b} - n\underline{a}}{m - n}$ হবে।

SUGGESTION

এখানে অধ্যায়টির অনুশীলনী, বহুনির্বাচনি ও সৃজনশীল প্রশ্নগুলো বিশ্লেষণ করে স্টার মার্কসহ সাজেশন দেওয়া হয়েছে। পরীক্ষার আগে অবশ্যই এ অঙ্কগুলো সমাধান করবে। তাহলে পরীক্ষায় যেকোনো অঙ্কের সমাধান সহজেই করতে পারবে।

সাজেশন | বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

	প্রশ্ন নম্বর
★★★	২, ৪, ৫, ৬, ৯, ১৩, ১৬, ১৮, ১৯, ২৭, ২৯, ৩০, ৩১, ৩৩, ৩৪, ৩৬, ৩৭, ৪৪, ৪৫, ৪৭, ৫০, ৫১, ৫২, ৫৩, ৫৫, ৫৬, ৫৮, ৬১, ৬২, ৬৩, ৬৪, ৬৭, ৬৯, ৭৭, ৭৮, ৮০, ৮২, ৮৬, ৮৭, ৮৯, ৯১, ৯২, ৯৩, ৯৪, ৯৫, ৯৬, ৯৯, ১০২, ১০৩
★★	৭, ৮, ১০, ১১, ১৫, ২৩, ২৪, ২৫, ৩২, ৩৫, ৫৪, ৫৭, ৬৫, ৬৬, ৭৫, ৭৬, ৮৪, ৮৮, ৯০, ৯৭

সাজেশন সৃজনশীল রচনামূলক প্রশ্ন

	প্রশ্ন নম্বর
★★★	৩, ৪, ৫, ৭, ৯, ১০, ১১, ১২
★★	৬, ৮

www.bdniyog.com

www.pathagar.com