অধ্যায়-২

বীজগাণিতিক রাশি

অনুশীলনী-২

গ্রীক গণিতবিদ ডায়োফ্যান্টাস (*Diophantus*, আনুমানিক 200–284) কে অনেক সময় বীজগণিতের জনকও বলা হয়। তিনি প্রথম ভগ্নাংশ সংজ্ঞায়িত করেন এবং মূলদ সংখ্যাকে সমীকরণের সমাধান ও সহগ হিসাবে অনুমোদন করেন।

অধ্যায়টি পড়ে যা জানতে পারবে—

১. বহুপদীর ধারণা ব্যাখ্যা।
২. উদাহরণের সাহায্যে এক চলকবিশিষ্ট বহুপদী ব্যাখ্যা।
৩. বহুপদীর গুণ ও ভাগ ব্যাখ্যা।
৪. ভাগশেষ উপপাদ্য ও উৎপাদক উপপাদ্য ব্যাখ্যা এবং তা প্রয়োগ করে বহুপদীর উৎপাদক বিশ্লেষণ।

PRACTICE

১৭টি অনুশীলনীর প্রশ্ন |
১১০টি বহুনির্বাচনি প্রশ্ন ■ ৬৩টি সাধারণ বহুনির্বাচনি ■ ১৭টি বহুপদী সমাপ্তিসূচক ■ ৩০টি অভিন্ন তথ্যভিত্তিক
৪২টি সৃজনশীল প্রশ্ন ■ ৪টি অনুশীলনী ■ ৮টি শ্রেণির কাজ ■ ১৬টি মাস্টার ট্রেইনার প্রণীত ■ ১৪টি প্রশ্নব্যাংক

অনুশীলনীর সৃজনশীল বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

১. নিচের কোনো রাশিটি প্রতিসম?

(ক) $a^2 + b + c$ (খ) $xy + yz + zx$
(গ) $x^2 - y^2 + z^2$ (ঘ) $2a^2 - 5bc - c^2$ **খ**

ব্যাখ্যা: $xy + yz + zx$ রাশিটিতে দুইটি চলকের স্থান বিনিময় করে পূর্বের রাশি পাওয়া যায়।

২. (i) যদি $a + b + c = 0$ হয়, তবে $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

(ii) $P(x, y, z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ রাশিটি চক্রক্রমিক

(iii) $\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{x^4-1}$ এর সরল মান $\frac{1}{x-1}$

উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) ii ও iii
(গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii **ঘ**

ব্যাখ্যা: (i) দেওয়া আছে; $a + b + c = 0$ বা, $a + b = -c$

বামপক্ষ $= a^3 + b^3 + c^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) + c^3$
$= (-c)^3 - 3ab.(-c) + c^3 = -c^3 + 3abc + c^3 = 3abc.$

(ii) $P(x, y, z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$.

তাহলে x এর স্থলে y, y এর স্থলে z এবং z এর স্থলে x লিখে পাই,

$P(y, z, x) = \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{x}{y} = P(x, y, z).$

(iii) $\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{x^2+1}$

$= \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} + \frac{2}{1+x^2} - \frac{4}{1-x^2} + \frac{1}{1-x}$
$= \frac{2}{1-x^2} + \frac{2}{1+x^2} - \frac{4}{1-x^2} + \frac{1}{1-x}$
$= \frac{4}{1-x^4} - \frac{4}{1-x^4} + \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x}$

বহুপদী $x^3 + px^2 - x - 7$ এর একটি উৎপাদক $x + 7$।

এই তথ্যের আলোকে নিচের ৩ এবং ৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

৩. p এর মান কত?

(ক) –7 (খ) 7
(গ) $\frac{54}{7}$ (ঘ) 477 **খ**

ব্যাখ্যা : মনে করি, $Q(x) = x^3 + px^2 - x - 7$
$x + 7$, $Q(x)$ এর একটি উৎপাদক হলে, $Q(-7) = 0$
বা, $(-7)^3 + p.(-7)^2 - (-7) - 7 = 0.$
বা, $-343 + 49p + 7 - 7 = 0$ বা, $49p = 343$
বা, $p = \frac{343}{49}$ $\therefore p = 7.$

৪. বহুপদীটির অপর উৎপাদকগুলোর গুণফল কত?

(ক) $(x-1)(x-1)$ (খ) $(x+1)(x-2)$
(গ) $(x-1)(x+3)$ (ঘ) $(x+1)(x-1)$ **ঘ**

ব্যাখ্যা: $Q(x) = x^3 + 7x^2 - x - 7 = x^2(x+7) - 1(x+7)$
$= (x+7)(x^2-1) = (x+7)(x+1)(x-1)$
$\therefore$ অপর উৎপাদকগুলোর গুণফল $= (x+1)(x-1)$

অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

৫. $x^4 - 5x^3 + 7x^2 - a$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $x - 2$ হলে, দেখাও যে, $a = 4$

সমাধান: ধরি, $P(x) = x^4 - 5x^3 + 7x^2 - a$

$x - 2$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক হলে, $P(2) = 0$ হবে।

বা, $(2)^4 - 5(2)^3 + 7(2)^2 - a = 0$
বা, $16 - 40 + 28 - a = 0$
$\therefore$ $a = 4$ **(দেখানো হলো)**

www.bdniyog.com

৬. মনে কর, $P(x) = x^n - a^n$, যেখানে n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং a একটি ধ্রুবক

(ক) দেখাও যে, $(x - a)$ বহুপদীটির একটি উৎপাদক এবং এমন $Q(x)$ নির্ণয় কর যেন $P(x) = (x - a)\,Q(x)$ হয়।

(খ) n জোড় সংখ্যা হলে দেখাও যে, $(x + a)$ বহুপদীটির একটি উৎপাদক এবং এমন $Q(x)$ নির্ণয় কর যেন $P(x) = (x + a)\,Q(x)$ হয়।

সমাধান:

(ক) দেওয়া আছে, $P(x) = x^n - a^n$

উৎপাদক উপপাদ্য অনুসারে যদি $P(a) = 0$ হয় তবে $(x - a)$ প্রদত্ত বহুপদীটির একটি উৎপাদক হবে।

$P(a) = a^n - a^n = 0$

$\therefore (x - a)$, $P(x) = x^n - a^n$ এর একটি উৎপাদক। **(দেখানো হলো)**

দেওয়া আছে, $P(x) = (x - a)\,Q(x)$ ... ... (i)

এখানে $P(x)$ এ x চলকের মাত্রা n

এবং $(x - a)$ এ x চলকের মাত্রা 1

$\therefore Q(x)$ এর x চলকের মাত্রা হবে $n - 1$

এখন, $P(x) = x^n - a^n$

$= (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \ldots \ldots + a^{n-2}x + a^{n-1})$ .... (ii)

$[\because x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1})]$

(i) নং ও (ii) নং সমীকৃত করে পাই,

$\therefore Q(x) = x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + a^3x^{n-4} + \ldots \ldots \ldots + a^{n-1}$

Ans. $Q(x) = x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + a^3x^{n-4} + \ldots\ldots + a^{n-1}$

(খ) উৎপাদক উপপাদ্য অনুসারে $(x + a)$, $P(x) = x^n - a^n$ (যেখানে n জোড় সংখ্যা)এর উৎপাদক হবে যদি $P(-a) = 0$ হয়।

এখন, $P(-a) = (-a)^n - a^n$

$= (-1)^n a^n - a^n$

$= a^n - a^n$ [$\because$ n জোড় $\therefore (-1)^n = 1$]

$= 0$

$\therefore (x + a)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক। **(দেখানো হলো)**

দেওয়া আছে, $P(x) = (x + a)\,Q(x)$ ..... (i)

এখানে, $P(x)$ এ x চলকের মাত্রা n

$(x + a)$ এ x চলকের মাত্রা 1

$\therefore Q(x)$ এর x চলকের মাত্রা হবে $n - 1$

এখন, $P(x) = x^n - a^n$

$= (x + a)\,[x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \ldots\ldots + (-1)^{n-2}\,a^{n-2}\,x + (-1)^{n-1}a^{n-1}]$ ..... (ii)

$[\because x^n - y^n = (x + y)\,\{x^{n-1} - x^{n-2}\,y + x^{n-3}\,y^2 - \ldots. + (-1)^{n-2}\,xy^{n-2} + (-1)^{n-1}y^{n-1}\}]$

(i) নং ও (ii) নং সমীকৃত করে পাই,

$\therefore Q(x) = x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - a^3x^{n-4} + \ldots.. + (-1)^{n-1}\,a^{n-1}$

Ans. $Q(x) = x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - a^3x^{n-4} + \ldots + (-1)^{n-1}\,a^{n-1}$

৭. মনে কর, $P(x) = x^n + a^n$, যেখানে n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং a একটি ধ্রুবক। n বিজোড় সংখ্যা হলে দেখাও যে, $(x + a)$ বহুপদীটির একটি উৎপাদক এবং এমন $Q(x)$ নির্ণয় কর যেন, $P(x) = (x + a)\,Q(x)$ হয়।

সমাধান: দেওয়া আছে, $P(x) = x^n + a^n$

যেখানে n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং a একটি ধ্রুবক।

এখানে, $P(-a) = (-a)^n + a^n$

$= (-1)^n\,a^n + a^n$

$= -a^n + a^n$ [$\because$ n বিজোড় হলে $(-1)^n = -1$]

$= 0$

$\therefore \{x - (-a)\}$

অর্থাৎ $(x + a)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক। **(দেখানো হলো)**

দেওয়া আছে, $P(x) = (x + a)\,Q(x)$ ... ... (i)

এখানে, $P(x)$ এর x চলকের মাত্রা n

$(x + a)$ -এ x চলকের মাত্রা 1

$\therefore Q(x)$ -এ x চলকের মাত্রা হবে $n - 1$

আবার, $P(x) = x^n + a^n$

$= (x + a)\,[x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \ldots + (-1)^{n-2}.\,a^{n-2}.\,x + (-1)^{n-1}\,a^{n-1}]$

.....(ii)

$[\because x^n + y^n = (x + y)\,\{x^{n-1} - x^{n-2}\,y + x^{n-3}\,y^2 - \ldots. + (-1)^{n-2}\,xy^{n-2} + (-1)^{n-1}y^{n-1}\}]$

(i) ও (ii) নং সমীকরণ সমীকৃত করে পাই,

$\therefore Q(x) = x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - a^3x^{n-4} + \ldots. + (-1)^{n-1}\,a^{n-1}$

Ans. $Q(x) = x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - a^3x^{n-4} + \ldots. + (-1)^{n-1}\,a^{n-1}$

৮. মনে কর, $P(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a$, যেখানে a, b, c ধ্রুবক এবং $a \neq 0$, দেখাও যে, $(x - r)$ যদি $P(x)$ এর একটি উৎপাদক হয়, তবে $(rx - 1)$ ও $P(x)$ এর একটি উৎপাদক।

সমাধান: দেওয়া আছে, $P(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a$

$(x - r)$ যদি $P(x)$ এর উৎপাদক হয় তবে, $P(r) = 0$

বা, $ar^5 + br^4 + cr^3 + cr^2 + br + a = 0$ .....(i)

আবার, $P\left(\frac{1}{r}\right) = a\left(\frac{1}{r}\right)^5 + b\left(\frac{1}{r}\right)^4 + c\left(\frac{1}{r}\right)^3 + c\left(\frac{1}{r}\right)^2 + b\left(\frac{1}{r}\right) + a$

$= \frac{a}{r^5} + \frac{b}{r^4} + \frac{c}{r^3} + \frac{c}{r^2} + \frac{b}{r} + a$

$= \frac{a + br + cr^2 + cr^3 + br^4 + ar^5}{r^5}$

$= \frac{0}{r^5}$ [(i) নং এর সাহায্যে]

$= 0$

$\therefore x - \frac{1}{r} = \frac{1}{r}(rx - 1)$

অর্থাৎ, $(rx - 1)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক। **(দেখানো হলো)**

৯. উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর:

(i) $x^4 + 7x^3 + 17x^2 + 17x + 6$

সমাধান: ধরি, $f(x) = x^4 + 7x^3 + 17x^2 + 17x + 6$

$\therefore f(-1) = (-1)^4 + 7(-1)^3 + 17(-1)^2 + 17(-1) + 6$

$= 1 - 7 + 17 - 17 + 6$

$= 24 - 24 = 0$

$\therefore \{x - (-1)\}$ অর্থাৎ $(x+1)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $x^4 + 7x^3 + 17x^2 + 17x + 6$

$= x^4 + x^3 + 6x^3 + 6x^2 + 11x^2 + 11x + 6x + 6$

$= x^3(x + 1) + 6x^2(x + 1) + 11x\,(x + 1) + 6(x + 1)$

$= (x + 1)\,(x^3 + 6x^2 + 11x + 6)$

আবার ধরি, $g(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

$\therefore g(-1) = (-1)^3 + 6\,(-1)^2 + 11\,(-1) + 6$

$= -1 + 6 - 11 + 6$

$= 12 - 12 = 0$

$\therefore \{x - (-1)\}$ অর্থাৎ $(x + 1)$, $g(x)$ এর একটি উৎপাদক।

www.bdniyog.com

এখন, $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$
$= x^3 + x^2 + 5x^2 + 5x + 6x + 6$
$= x^2(x+1) + 5x(x+1) + 6(x+1)$
$= (x+1)(x^2 + 5x + 6)$
$= (x+1)(x^2 + 3x + 2x + 6)$
$= (x+1)\{x(x+3) + 2(x+3)\}$
$= (x+1)(x+2)(x+3)$
$\therefore x^4 + 7x^3 + 7x^2 + 17x + 6 = (x+1)(x^3 + 6x^2 + 11x + 6)$
$= (x+1)(x+1)(x+2)(x+3)$
$= (x+1)^2(x+2)(x+3)$
Ans. $(x+1)^2(x+2)(x+3)$

(ii) $4a^4 + 12a^3 + 7a^2 - 3a - 2$

সমাধান: ধরি, $P(a) = 4a^4 + 12a^3 + 7a^2 - 3a - 2$
$\therefore P(-1) = 4(-1)^4 + 12(-1)^3 + 7(-1)^2 - 3(-1) - 2$
$= 4 - 12 + 7 + 3 - 2$
$= 14 - 14 = 0$
$\therefore \{a - (-1)\}$ অর্থাৎ $(a+1)$, $P(a)$ এর একটি উৎপাদক।
এখন, $4a^4 + 12a^3 + 7a^2 - 3a - 2$
$= 4a^4 + 4a^3 + 8a^3 + 8a^2 - a^2 - a - 2a - 2$
$= 4a^3(a+1) + 8a^2(a+1) - a(a+1) - 2(a+1)$
$= (a+1)(4a^3 + 8a^2 - a - 2)$
ধরি, $P_1(a) = 4a^3 + 8a^2 - a - 2$
$P_1(-2) = 4(-2)^3 + 8(-2)^2 - (-2) - 2$
$= 4(-8) + 8.4 + 2 - 2$
$= -32 + 32 + 2 - 2$
$= 34 - 34 = 0$
$\therefore \{a - (-2)\}$ অর্থাৎ $(a+2)$, $P_1(a)$ এর একটি উৎপাদক।
এখন, $4a^3 + 8a^2 - a - 2 = 4a^2(a+2) - 1(a+2)$
$= (a+2)(4a^2 - 1)$
$= (a+2)\{(2a)^2 - (1)^2\}$
$= (a+2)(2a-1)(2a+1)$
$\therefore 4a^4 + 12a^3 + 7a^2 - 3a - 2$
$= (a+1)(4a^3 + 8a^2 - a - 2)$
$= (a+1)(a+2)(2a-1)(2a+1)$
Ans. $(a+1)(a+2)(2a-1)(2a+1)$

(iii) $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

সমাধান: ধরি, $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$
$\therefore f(-1) = (-1)^3 + 2(-1)^2 + 2(-1) + 1$
$= -1 + 2 - 2 + 1 = 0$
$\therefore \{x - (-1)\}$ অর্থাৎ $(x+1)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।
এখন, $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$
$= x^3 + x^2 + x^2 + x + x + 1$
$= x^2(x+1) + x(x+1) + 1(x+1)$
$= (x+1)(x^2 + x + 1)$
Ans. $(x+1)(x^2 + x + 1)$

(iv) $x(y^2 + z^2) + y(z^2 + x^2) + z(x^2 + y^2) + 3xyz$

সমাধান: $x(y^2 + z^2) + y(z^2 + x^2) + z(x^2 + y^2) + 3xyz$
$= xy^2 + z^2x + yz^2 + x^2y + zx^2 + y^2z + 3xyz$
$= (xy^2 + x^2y + xyz) + (y^2z + yz^2 + xyz) + (zx^2 + z^2x + xyz)$
$= xy(y + x + z) + yz(y + z + x) + zx(x + z + y)$
$= (x + y + z)(xy + yz + zx)$
Ans. $(x + y + z)(xy + yz + zx)$
[বি: দ্র: পাঠ্যবইয়ের প্রশ্নে $2xyz$ এর স্থলে $3xyz$ হবে।

(v) $(x+1)^2(y-z) + (y+1)^2(z-x) + (z+1)^2(x-y)$

সমাধান: $(x+1)^2(y-z) + (y+1)^2(z-x) + (z+1)^2(x-y)$
$= (x^2 + 2x + 1)(y-z) + (y^2 + 2y + 1)(z-x) + (z^2 + 2z + 1)(x-y)$
$= x^2(y-z) + 2x(y-z) + (y-z) + y^2(z-x) + 2y(z-x) + (z-x) + z^2(x-y) + 2z(x-y) + (x-y)$
$= x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) + 2xy - 2zx + 2yz - 2xy + 2zx - 2yz + y - z + z - x + x - y$
$= x^2y - zx^2 + y^2z - xy^2 + z^2(x-y)$
$= x^2y - xy^2 - zx^2 + y^2z + z^2(x-y)$
$= xy(x-y) - z(x^2 - y^2) + z^2(x-y)$
$= (x-y)\{xy - z(x+y) + z^2\}$
$= (x-y)(xy - zx - yz + z^2)$
$= (x-y)\{x(y-z) - z(y-z)\}$
$= (x-y)(y-z)(x-z)$
$= -(x-y)(y-z)(z-x)$
Ans. $-(x-y)(y-z)(z-x)$

(vi) $b^2c^2(b^2 - c^2) + c^2a^2(c^2 - a^2) + a^2b^2(a^2 - b^2)$

সমাধান: $b^2c^2(b^2 - c^2) + c^2a^2(c^2 - a^2) + a^2b^2(a^2 - b^2)$
$= b^4c^2 - b^2c^4 + c^4a^2 - c^2a^4 + a^2b^2(a^2 - b^2)$
$= c^4a^2 - b^2c^4 - c^2a^4 + b^4c^2 + a^2b^2(a^2 - b^2)$
$= c^4(a^2 - b^2) - c^2(a^4 - b^4) + a^2b^2(a^2 - b^2)$
$= (a^2 - b^2)\{c^4 - c^2(a^2 + b^2) + a^2b^2\}$
$= (a^2 - b^2)(c^4 - c^2a^2 - b^2c^2 + a^2b^2)$
$= (a^2 - b^2)\{c^2(c^2 - a^2) - b^2(c^2 - a^2)\}$
$= (a^2 - b^2)(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)$
$= -(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)$
$= -(a-b)(b-c)(c-a)(a+b)(b+c)(c+a)$
Ans. $-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b)(b+c)(c+a)$

১০. যদি $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{3}{abc}$ হয়, তবে দেখাও যে, $bc + ca + ab = 0$ অথবা, $a = b = c$

সমাধান: $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{3}{abc}$
বা, $\left(\frac{1}{a}\right)^3 + \left(\frac{1}{b}\right)^3 + \left(\frac{1}{c}\right)^3 - 3\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c} = 0$
বা, $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left\{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2 + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right)^2\right\} = 0$
$[\because x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\}]$
$\therefore$ হয় $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$
বা, $\frac{bc + ca + ab}{abc} = 0$
$\therefore bc + ca + ab = 0$
অথবা, $\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2 + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right)^2 = 0$
কিন্তু দুই বা ততোধিক বর্গ রাশির সমষ্টি শূন্য হলে এদের প্রত্যেকটির মান পৃথক পৃথকভাবে শূন্য হবে।

সুতরাং $\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 = 0$
বা, $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 0$
বা $\frac{1}{a} = \frac{1}{b}$
$\therefore a = b$

আবার, $\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2 = 0$
বা, $\frac{1}{b} - \frac{1}{c} = 0$
বা, $\frac{1}{b} = \frac{1}{c}$
$\therefore b = c$

www.bdniyog.com

$\therefore a = b = c$

সুতরাং $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{3}{abc}$ হলে, $bc + ca + ab = 0$ অথবা $a = b = c$

(দেখানো হলো)

১১. যদি $x = b + c - a$, $y = c + a - b$ এবং $z = a + b - c$ হয়, তবে দেখাও যে, $x^3+y^3+z^3-3xyz=4(a^3+b^3+c^3-3abc)$

সমাধান:

বামপক্ষ $= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

$=\frac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}$

$=\frac{1}{2}(b+c-a+c+a-b+a+b-c)$

$\{(b+c-a-c-a+b)^2+(c+a-b-a-b+c)^2$

$+(a+b-c-b-c+a)^2\}$ [x, y, z এর মান বসিয়ে]

$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(2b-2a)^2+(2c-2b)^2+(2a-2c)^2\}$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{4(a-b)^2+4(b-c)^2+4(c-a)^2\}$

$=4\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

$= 4(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$

$\left[\because \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc\right]$

= ডানপক্ষ

অর্থাৎ, $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$

(দেখানো হলো)

১২. সরল কর: (a) $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$

সমাধান: প্রদত্ত রাশি $=\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$

$=\frac{a^2}{-(a-b)(c-a)}+\frac{b^2}{-(b-c)(a-b)}+\frac{c^2}{-(c-a)(b-c)}$

$=\frac{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$

কিন্তু $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b) = -(a-b)(b-c)(c-a)$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $=\frac{-(a-b)(b-c)(c-a)}{-(a-b)(b-c)(c-a)} = 1$

Ans. 1

(b) $\frac{a}{(a-b)(a-c)(x-a)}+\frac{b}{(b-a)(b-c)(x-b)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)(x-c)}$

সমাধান: প্রদত্ত রাশি $=\frac{a}{(a-b)(a-c)(x-a)}+\frac{b}{(b-a)(b-c)(x-b)}+\frac{c}{(c-a)(c-b)(x-c)}$

$=\frac{a}{-(a-b)(c-a)(x-a)}+\frac{b}{-(a-b)(b-c)(x-b)}+\frac{c}{-(c-a)(b-c)(x-c)}$

$=\frac{a(b-c)(x-b)(x-c)+b(c-a)(x-c)(x-a)+c(a-b)(x-a)(x-b)}{-(a-b)(b-c)(c-a)(x-a)(x-b)(x-c)}$

$=\frac{a(b-c)\{x^2-(b+c)x+bc\}+b(c-a)\{x^2-(c+a)x+ca\}+c(a-b)\{x^2-(a+b)x+ab\}}{-(a-b)(b-c)(c-a)(x-a)(x-b)(x-c)}$

$=\frac{x^2\{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)\}-x\{a(b-c)(b+c)+b(c-a)(c+a)+c(a+b)(a-b)\}+abc\{(b-c)+(c-a)+(a-b)\}}{-(a-b)(b-c)(c-a)(x-a)(x-b)(x-c)}$

কিন্তু এর লবের $a(b-c)+b(c-a)+c(a-b) = ab - ca + bc - ab + ca - bc = 0$

একইভাবে $a(b-c)(b+c)+b(c+a)(c-a)+c(a+b)(a-b)$

$= a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$

$= -(a-b)(b-c)(c-a)$

এবং $abc\{(b-c)+(c-a)+(a-b)\} = abc \times 0 = 0$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $=\frac{-x\{(a-b)(b-c)(c-a)\}}{-(a-b)(b-c)(c-a)(x-a)(x-b)(x-c)}=\frac{-x(a-b)(b-c)(c-a)}{-(a-b)(b-c)(c-a)(x-a)(x-b)(x-c)}=\frac{x}{(x-a)(x-b)(x-c)}$

Ans. $\frac{x}{(x-a)(x-b)(x-c)}$

(c) $\frac{(a+b)^2-ab}{(b-c)(a-c)}+\frac{(b+c)^2-bc}{(c-a)(b-a)}+\frac{(c+a)^2-ca}{(a-b)(c-b)}$

সমাধান: প্রদত্ত রাশি

$=\frac{(a+b)^2-ab}{(b-c)(a-c)}+\frac{(b+c)^2-bc}{(c-a)(b-a)}+\frac{(c+a)^2-ca}{(a-b)(c-b)}$

$=\frac{(a+b)^2-ab}{-(b-c)(c-a)}+\frac{(b+c)^2-bc}{-(c-a)(a-b)}+\frac{(c+a)^2-ca}{-(a-b)(b-c)}$

$=\frac{(a-b)\{(a+b)^2-ab\}+(b-c)\{(b+c)^2-bc\}+(c-a)\{(c+a)^2-ca\}}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$

$=\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)+(b-c)(b^2+bc+c^2)+(c-a)(c^2+ca+a^2)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$

$=\frac{a^3-b^3+b^3-c^3+c^3-a^3}{-(a-b)(b-c)(c-a)}=\frac{0}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$

$= 0$

Ans. 0

(d) $\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}+\frac{16}{x^{16}-1}$

সমাধান:

প্রদত্ত রাশি $=\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}+\frac{16}{x^{16}-1}$

www.bdniyog.com

$$= \frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}+\frac{16}{(x^8+1)(x^8-1)}$$

$$= \frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\left\{\frac{8(x^8-1)+16}{(x^8+1)(x^8-1)}\right\}$$

$$= \frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8(x^8+1)}{(x^8+1)(x^8-1)}$$

$$= \frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{x^8-1}$$

$$= \frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\left\{\frac{4(x^4-1)+8}{(x^4+1)(x^4-1)}\right\}$$

$$= \frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4(x^4+1)}{(x^4+1)(x^4-1)}$$

$$= \frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{x^4-1}$$

$$= \frac{1}{1+x}+\left\{\frac{2(x^2-1)+4}{(x^2+1)(x^2-1)}\right\}$$

$$= \frac{1}{1+x}+\frac{2(x^2+1)}{(x^2-1)(x^2+1)}$$

$$= \frac{1}{1+x}+\frac{2}{x^2-1} = \frac{x-1+2}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} = \frac{1}{x-1}$$

Ans. $\frac{1}{x-1}$

১৩. আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর:

(a) $\frac{5x+4}{x(x+2)}$

সমাধান: ধরি, $\frac{5x+4}{x(x+2)} \equiv \frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}$ .....(1)

(1) এর উভয়পক্ষকে $x(x+2)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$5x+4 \equiv A(x+2)+Bx$ .....(2)

যা x এর সকল মানের জন্য সত্য।

(2) এর উভয়পক্ষে $x=0$ বসিয়ে পাই,

$0+4=2A+0$

$\therefore A=2$

আবার (2) এর উভয়পক্ষে $x=-2$ বসিয়ে পাই,

$-10+4=0-2B$

বা, $-6=-2B$

$\therefore B=3$

A ও B এর মান (1) এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{5x+4}{x(x+2)}=\frac{2}{x}+\frac{3}{x+2}$$

$\therefore$ প্রদত্ত ভগ্নাংশটি আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করা হলো।

Ans. $\frac{2}{x}+\frac{3}{x+2}$

(b) $\frac{x+2}{x^2-7x+12}$

সমাধান: এখানে, $x^2-7x+12 = x^2-3x-4x+12$

$= (x-3)(x-4)$

সুতরাং, $\frac{x+2}{x^2-7x+12} = \frac{x+2}{(x-3)(x-4)}$

ধরি, $\frac{x+2}{(x-3)(x-4)} \equiv \frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-4}$ .....(1)

(1) এর উভয়পক্ষকে $(x-3)(x-4)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x+2 \equiv A(x-4)+B(x-3)$.....(2)

যা x এর সকল মানের জন্য সত্য।

এখন, (2) এর উভয়পক্ষে $x=3$ বসিয়ে পাই,

$3+2=A(3-4)+B(3-3)$

বা, $5=-A$

$\therefore A=-5$

আবার (2) এর উভয়পক্ষে $x=4$ বসিয়ে পাই,

$4+2=A(4-4)+B(4-3)$

বা, $6=0+B$

$\therefore B=6$

A ও B এর মান (1) এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{x+2}{(x-3)(x-4)}=\frac{-5}{x-3}+\frac{6}{x-4}=\frac{6}{x-4}-\frac{5}{x-3}$$

$\therefore$ প্রদত্ত ভগ্নাংশটি আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করা হলো।

Ans. $\frac{6}{x-4}-\frac{5}{x-3}$

(c) $\frac{x^2-9x-6}{x(x-2)(x+3)}$

সমাধান: ধরি, $\frac{x^2-9x-6}{x(x-2)(x+3)} \equiv \frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+3}$ .....(1)

(1) নং এর উভয়পক্ষকে $x(x-2)(x+3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x^2-9x-6 \equiv A(x-2)(x+3)+Bx(x+3)+Cx(x-2)$.....(2)

যা x এর সকল মানের জন্য সত্য।

এখন (2) নং এর উভয়পক্ষে $x=0$ বসিয়ে পাই,

$-6=A(-2)(3)+0+0$

$\therefore A=1$

আবার (2) নং এর উভয়পক্ষে $x=2$ বসিয়ে পাই,

$4-18-6=0+B\cdot 2(5)+0$

বা, $-20=10B$

$\therefore B=-2$

(2) নং এর উভয়পক্ষে $x=-3$ বসিয়ে পাই,

$9+27-6=0+0+C(-3)(-5)$

বা, $30=15C$

$\therefore C=2$

A, B ও C এর মান (1) এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^2-9x-6}{x(x-2)(x+3)}=\frac{1}{x}-\frac{2}{x-2}+\frac{2}{x+3}$$

$\therefore$ প্রদত্ত ভগ্নাংশটি আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করা হলো।

Ans. $\frac{1}{x}-\frac{2}{x-2}+\frac{2}{x+3}$

(d) $\frac{x^2-4x-7}{(x+1)(x^2+4)}$

সমাধান: ধরি $\frac{x^2-4x-7}{(x+1)(x^2+4)} \equiv \frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$ ..... (1)

(1) এর উভয় পক্ষকে $(x+1)(x^2+4)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x^2-4x-7 \equiv A(x^2+4)+(Bx+c)(x+1)$ ..... (2)

যা x এর সকল মানের জন্য সত্য।

এখন (2) এ $x=-1$ বসিয়ে পাই,

$(-1)^2-4.(-1)-7=A(1+4)$

বা, $1+4-7=5A$

www.bdniyog.com

বা, $5A = -2$

$\therefore A = -\frac{2}{5}$

আবার, (2) নং থেকে x^2, x এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$A + B = 1$

বা, $-\frac{2}{5} + B = 1$

বা, $B = 1 + \frac{2}{5}$

$B = \frac{7}{5}$

এবং $B + C = -4$

বা, $\frac{7}{5} + C = -4$

বা, $C = -4 - \frac{7}{5}$

$C = -\frac{27}{5}$

(1) নং এ A, B, C এর মান বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^2 - 4x - 7}{(x+1)(x^2+4)} = \frac{-\frac{2}{5}}{x+1} + \frac{\frac{7}{5}x - \frac{27}{5}}{x^2+4}$$

$$= \frac{1}{5}\left(-\frac{2}{x+1} + \frac{7x-27}{x^2+4}\right)$$

∴ প্রদত্ত ভগ্নাংশটি আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করা হলো।

Ans. $\frac{1}{5}\left(-\frac{2}{x+1} + \frac{7x-27}{x^2+4}\right)$

(e) $\frac{x^2}{(2x+1)(x+3)^2}$

সমাধান: ধরি,

$$\frac{x^2}{(2x+1)(x+3)^2} \equiv \frac{A}{2x+1} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{(x+3)^2} \quad \ldots\ldots (1)$$

(1) এর উভয় পক্ষকে $(2x+1)(x+3)^2$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x^2 \equiv A(x+3)^2 + B(2x+1)(x+3) + C(2x+1)$ ..... (2)

যা x এর সকল মানের জন্য সত্য।

এখন, (2) এ $x = -3$ বসিয়ে পাই,

$(-3)^2 = C\{2.(-3) + 1\}$

বা, $9 = C(-6+1)$

বা, $-5C = 9$

$\therefore C = -\frac{9}{5}$

আবার, (2) নং এ $x = -\frac{1}{2}$ বসিয়ে পাই,

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = A\left(-\frac{1}{2}+3\right)^2$$

বা, $\frac{1}{4} = A\left(\frac{-1+6}{2}\right)^2$

বা, $\frac{1}{4} = A \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2$

বা, $\frac{1}{4} = A \cdot \frac{25}{4}$

বা, $25A = 1$

$\therefore A = \frac{1}{25}$

আবার, (2) নং থেকে x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$A + 2B = 1$

বা, $\frac{1}{25} + 2B = 1$

বা, $2B = 1 - \frac{1}{25}$

বা, $2B = \frac{25-1}{25}$

বা, $2B = \frac{24}{25}$

বা, $B = \frac{24}{25 \times 2}$

$\therefore B = \frac{12}{25}$

A, B, C এর মান (1) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^2}{(2x+1)(x+3)^2} = \frac{\frac{1}{25}}{2x+1} + \frac{\frac{12}{25}}{x+3} + \frac{\frac{-9}{5}}{(x+3)^2}$$

$$= \frac{1}{25(2x+1)} + \frac{12}{25(x+3)} - \frac{9}{5(x+3)^2}$$

∴ প্রদত্ত ভগ্নাংশটি আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করা হলো।

Ans. $\frac{1}{25(2x+1)} + \frac{12}{25(x+3)} - \frac{9}{5(x+3)^2}$

অনুশীলনীর সৃজনশীল রচনামূলক প্রশ্ন

১৪. চলক x এর একটি বহুপদী $P(x) = 7x^2 - 3x + 4x^4 - a + 12x^3$.

ক. বহুপদীর আদর্শরূপটি লেখ এবং একটি তৃতীয় মাত্রার উল্টা বহুপদীর উদাহরণ দাও।

খ. P (x) বহুপদীটির একটি উৎপাদক (x + 2) হলে a এর মান নির্ণয় কর।

গ. যদি $Q(x) = 6x^3 - x^2 - 5x + 2$ এর ক্ষেত্রে $Q\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ হয়, তবে P (x) এবং Q (x) এর সাধারণ উৎপাদক দুইটি নির্ণয় কর।

১৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $P(x) = 7x^2 - 3x + 4x^4 - a + 12x^3$

বহুপদীটির আদর্শরূপ :

$P(x) = 4x^4 + 12x^3 + 7x^2 - 3x - a$

এবং তৃতীয় মাত্রার উল্টা বহুপদীর উদাহরণ: $4x - 3x^2 + 4x^3$

খ 'ক' থেকে পাই, $P(x) = 4x^4 + 12x^3 + 7x^2 - 3x - a$

x + 2, P(x) এর একটি উৎপাদক হলে, $P(-2) = 0$

বা, $4.(-2)^4 + 12.(-2)^3 + 7.(-2)^2 - 3.(-2) - a = 0$

বা, $4.16 + 12.(-8) + 7.4 + 6 - a = 0$

বা, $64 - 96 + 28 + 6 - a = 0$

বা, $2 - a = 0$

$\therefore a = 2.$

∴ নির্ণেয় মান = 2

গ a = 2, (i) নং বসিয়ে পাই,

$P(x) = 4x^4 + 12x^3 + 7x^2 - 3x - 2$

P(x) এর ধ্রুব পদ –2 এর উৎপাদকসমূহের সেট, $F_1 = \{1, -1, 2, -2\}$

P(x) এর মূখ্য সহগ 4 এর উৎপাদকসমূহের সেট,

$F_2 = \{1, -1, 2, -2, 4, -4\}$

www.bdniyog.com

এখন P(a) বিবেচনা করি, যেখানে $a = \frac{r}{S}$ এবং $r \in F_1, S \in F_2$

$a = \frac{1}{2}$ হলে, $P\left(\frac{1}{2}\right) = 4.\left(\frac{1}{2}\right)^4 + 12.\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 7.\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3.\left(\frac{1}{2}\right) - 2$

$= 4.\frac{1}{16} + 12.\frac{1}{8} + 7.\frac{1}{4} - \frac{3}{2} - 2$

$= \frac{1}{4} + \frac{3}{2} + \frac{7}{4} - \frac{3}{2} - 2$

$= \frac{1+7-8}{4} = \frac{8-8}{4} = 0$

সুতরাং $(2x - 1)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক।

$a = -\frac{1}{2}$ হলে, $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 4.\left(-\frac{1}{2}\right)^4 + 12.\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 7.\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 3.\left(-\frac{1}{2}\right) - 2$

$= 4.\frac{1}{16} - 12.\frac{1}{8} + 7.\frac{1}{4} + \frac{3}{2} - 2$

$= \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + \frac{7}{4} + \frac{3}{2} - 2$

$= \frac{1+7-8}{4} = \frac{8-8}{4} = 0$

অর্থাৎ $(2x + 1)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক।

$a = -1$ হলে, $P(-1)$

$= 4(-1)^4 + 12.(-1)^3 + 7.(-1)^2 - 3.(-1) - 2$

$= 4 - 12 + 7 + 3 - 2$

$= 14 - 14 = 0$

অর্থাৎ $(x + 1)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এবং দেওয়া আছে, $(x + 2)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক। $P(x)$ এর মাত্রা 4 এবং চারটি এক মাত্রার উৎপাদক পাওয়া গেছে। সুতরাং $P(x)$ এর ধ্রুবক উৎপাদক K বিবেচনা করি।

$\therefore P(x) = K(x + 1)(2x + 1)(2x - 1)(x + 2)$

উভয়পক্ষে x-এর সর্বোচ্চ ঘাতের সহগ বিবেচনা করে দেখা যায় যে, $k = 1$

সুতরাং, $P(x) = (x + 1)(2x + 1)(2x - 1)(x + 2)$

আবার, $Q(x) = 6x^3 - x^2 + 5x + 2$ এর ক্ষেত্রে $Q\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

অর্থাৎ $(2x - 1)$, $Q(x)$ এর একটি উৎপাদক।

$Q(x) = 6x^3 - x^2 + 5x + 2$

$= 6x^3 - 3x^2 + 2x^2 - x - 4x + 2$

$= 3x^2(2x - 1) + x(2x - 1) - 2(2x - 1)$

$= (2x - 1)(3x^2 + x - 2)$

$= (2x - 1)(3x^2 + 3x - 2x - 2)$

$= (2x - 1)(x + 1)(3x - 2)$

সুতরাং $P(x)$ এবং $Q(x)$ এর সাধারণ উৎপাদক দুইটি $(2x - 1)$ এবং $(x + 1)$ **(Ans.)**

১৫. x, y, z এর একটি বহুপদী হলো, $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

ক. দেখাও যে, $F(x, y, z)$ হলো একটি চক্র-ক্রমিক রাশি।

খ. $F(x, y, z)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর এবং যদি $F(x, y, z) = 0$, $x + y + z \neq 0$ হয়, তবে দেখাও যে, $(x^2 + y^2 + z^2) = (xy + yz + zx)$

গ. যদি $x = b + c - a$, $y = c + a - b$ এবং $z = a + b - c$ হয়, তবে দেখাও যে, $F(a, b, c) : F(x, y, z) = 1 : 4$

১৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

প্রদত্ত রাশিটি x, y, z চলকের বহুপদী।

x এর স্থলে y, y এর স্থলে z এবং z এর স্থলে x বসিয়ে পাই,

$F(y, z, x) = y^3 + z^3 + x^3 - 3.y.z.x$

$= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

দেখা যায় যে, চলকগুলো স্থান পরিবর্তন করলেও রাশিটি একই থাকে।

অর্থাৎ $F(x, y, z) = F(y, z, x)$

সুতরাং $F(x, y, z)$ একটি চক্র-ক্রমিক রাশি। **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে,

$F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

$= (x + y)^3 - 3xy(x + y) + z^3 - 3xyz$

$= (x + y)^3 + z^3 - 3xy(x + y + z)$

$= (x + y + z)\{(x + y)^2 - (x + y).z + z^2\} - 3xy(x + y + z)$

$= (x + y + z)(x^2 + 2xy + y^2 - zx - yz + z^2) - 3xy(x + y + z)$

$= (x + y + z)(x^2 + 2xy + y^2 - zx - yz + z^2 - 3xy)$

$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$. **(Ans.)**

প্রশ্নমতে, $F(x, y, z) = 0$

বা, $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 0$

বা, $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0$ [$\because x + y + z \neq 0$]

$\therefore x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে,

$x = b + c - a$

$y = c + a - b$

এবং $z = a + b - c$

'খ' হতে পাই

$F(x, y, z)$

$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$= \frac{1}{2}(x + y + z)(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2zx)$

$= \frac{1}{2}(x + y + z)\{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\}$

$= \frac{1}{2}(b + c - a + c + a - b + a + b - c)\{(b + c - a - c - a + b)^2 + (c + a - b - a - b + c)^2 + (a + b - c - b - c + a)^2\}$

[x, y, z এর মান বসিয়ে]

$= \frac{1}{2}(a + b + c)\{(2b - 2a)^2 + (2c - 2b)^2 + (2a - 2c)^2\}$

$= \frac{1}{2}(a + b + c)\{4(a - b)^2 + 4(b - c)^2 + 4(c - a)^2\}$

$= 4.\frac{1}{2}(a + b + c)\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}$

$= 4(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$ [$\because \frac{1}{2}(a + b + c)\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\} = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$]

$= 4.F(a, b, c)$.

বা, $F(x, y, z) = 4F(a, b, c)$

বা, $\frac{F(x, y, z)}{F(a, b, c)} = 4$

বা, $\frac{F(a, b, c)}{F(x, y, z)} = \frac{1}{4}$ [বিপরীতকরণ করে]

$\therefore F(a, b, c) : F(x, y, z) = 1 : 4$ **(দেখানো হলো)**

১৬. চলক x এর চারটি রাশি হলো, $(x + 3)$, $(x^2 - 9)$, $(x^3 + 27)$ এবং $(x^4 - 81)$

ক. উপরিউক্ত রাশিগুলো হতে একটি প্রকৃত মূলদ ভগ্নাংশ এবং একটি অপ্রকৃত মূলদ ভগ্নাংশ তৈরি কর।

খ. $\frac{x^3 + 27}{x^2 - 9}$ কে সম্ভাব্য আংশিক ভগ্নাংশের সমষ্টিরূপে উপস্থাপন কর।

গ. উপরের প্রথম, দ্বিতীয় এবং চতুর্থ রাশিসমূহের প্রত্যেকের গুণাত্মক বিপরীত রাশির সমষ্টিকে সরলরূপে প্রকাশ কর।

www.bdniyog.com

১৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত চারটি রাশি হলো, $(x+3)$, (x^2-9), (x^3+27) এবং (x^4-81)

প্রকৃত মূলদ ভগ্নাংশ $=\frac{x+3}{x^2-9}$

এবং অপ্রকৃত মূলদ ভগ্নাংশ $=\frac{x^4-81}{x^3+27}$

খ প্রদত্ত ভগ্নাংশ $=\frac{x^3+27}{x^2-9}$

$=\frac{x^3+3^3}{x^2-3^2}$

$=\frac{(x+3)(x^2-x.3+3^2)}{(x+3)(x-3)}$

$=\frac{x^2-3x+9}{x-3}$

$=\frac{x(x-3)+9}{x-3}$

$=x+\frac{9}{x-3}$

$\therefore \frac{x^3+27}{x-9}=x+\frac{9}{x-3}$ (Ans.)

গ এখানে, প্রথম রাশি $=x+3$

দ্বিতীয় রাশি $=x^2-9$ এবং চতুর্থ রাশি $=x^4-81$

রাশিসমূহের প্রত্যেকের গুণাত্মক বিপরীত রাশি যথাক্রমে

$\frac{1}{x+3}$, $\frac{1}{x^2-9}$ এবং $\frac{1}{x^4-81}$

$\therefore$ রাশিসমূহের সমষ্টি $=\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x^2-9}+\frac{1}{x^4-81}$

$=\frac{1}{x+3}+\frac{1}{(x+3)(x-3)}+\frac{1}{x^4-81}$

$=\frac{x-3+1}{(x+3)(x-3)}+\frac{1}{(x^2)^2-9^2}$

$=\frac{x-2}{x^2-9}+\frac{1}{(x^2+9)(x^2-9)}$

$=\frac{(x-2)(x^2+9)+1}{(x^2+9)(x^2-9)}$

$=\frac{x^3+9x-2x^2-18+1}{x^4-81}$

$=\frac{x^3-2x^2+9x-17}{x^4-81}$

Ans. $\frac{x^3-2x^2+9x-17}{x^4-81}$

১৭. $(x+1)^3y+(y+1)^2$ রাশিটিকে

ক. x চলকের বহুপদীর আদর্শ আকারে বর্ণনা কর এবং x চলকের বহুপদী রূপে তার মাত্রা, মুখ্য সহগ ও ধ্রুব পদ নির্ণয় কর।

খ. y চলকের বহুপদীর আদর্শ আকারে বর্ণনা কর এবং y চলকের বহুপদীরূপে তার মাত্রা, মুখ্য সহগ ও ধ্রুবপদ নির্ণয় কর।

গ. x ও y চলকের বহুপদীরূপে বিবেচনা করে তার মাত্রা নির্ণয় কর।

১৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত রাশি $=(x+1)^3y+(y+1)^2$

$=(x^3+3x^2+3x+1)y+y^2+2y+1$

$=x^3y+3x^2y+3xy+y^2+3y+1$

এখানে, x কে অনির্দেশক এবং y কে ধ্রুবক হিসেবে বিবেচনা x চলকের বহুপদীর আদর্শ আকার।

এখানে, x চলকের মাত্রা $=3$

মুখ্য সহগ $=y$

এবং ধ্রুবপদ $=y^2+3y+1$

খ এক্ষেত্রে y ছাড়া অন্য সব প্রতীককে ধ্রুবক বিবেচনা করতে হবে।

প্রদত্ত রাশি $=(x+1)^3y+(y+1)^2$

$=(x+1)^3y+y^2+2y+1$

$=y^2+\{2+(x+1)^3\}y+1$

$=y^2+(x^3+3x^2+3x+3)y+1$

[এখানে y কে অনির্দেশক এবং x কে ধ্রুবক হিসেবে বিবেচনা করা হয়েছে।]

এটি y চলকের বহুপদীর আদর্শ আকার।

এখানে, y চলকের মাত্রা $=2$

মুখ্য সহগ $=1$

এবং ধ্রুবপদ $=1$

গ প্রদত্ত রাশি $=(x+1)^3y+(y+1)^2$

$=(x^3+3x^2+3x+1)y+y^2+2y+1$

$=x^3y+3x^2y+3xy+y^2+3y+1$

এখানে x ও y এর ঘাতের যোগফলের সর্বোচ্চ মান 4 যা x^3y পদে পাওয়া যায়।

$\therefore$ রাশিটিকে x ও y চলকের বহুপদী বিবেচনা করলে বহুপদীটির মাত্রা 4.

মাস্টার ট্রেইনার প্রণীত সৃজনশীল বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

★★ বহুপদী [Text পৃষ্ঠা-৪১]

- বহুপদী বিশেষ ধরনের বীজগাণিতিক রাশি। এরূপ রাশিতে এক বা একাধিক পদ থাকে।
- বহুপদী রাশির পদগুলো এক বা একাধিক চলকের শুধুমাত্র অঋণাত্মক পূর্ণসাংখ্যিক ঘাত ও ধ্রুবকের গুণফল।
- যে বহুপদী একটি চলক বিশিষ্ট, তাই এক চলকের বহুপদী।
- x একটি চলক হলে ax^n, $ax+b$, ax^2+bx+c ইত্যাদি আকারের রাশি x চলকের বহুপদী।
- x চলকের বহুপদীর পদসমূহ Cx^P আকারে হয় যেকানে C একটি x বর্জিত নির্দিষ্ট সংখ্যা এবং P একটি অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।
- Cx^q পদে C কে x^p এর সহগ এবং p কে এই পদের মাত্রা ও ঘাত বলা হয়।
- ax^3+bx^2+cx+d বহুপদীর এর মাত্রা 3, মুখ্য পদ ax^3, মুখ্য সহগ a এবং ধ্রুবপদ d.

উত্তর

- যে বহুপদী দুই চলক বিশিষ্ট, তাই দুই চলক বিশিষ্ট বহুপদী।
- Cx^py^q আকারের হয় যেখানে C হচ্ছে সহগ এবং $(p+q)$ হচ্ছে এই পদের মাত্রা।
- উল্লেখিত পদসমূহের গরিষ্ঠ মাত্রাই ঐ বহুপদীর মাত্রা।
- P(x, y) আকারে প্রকাশ করা হয়।
- $Cx^py^qz^r$ আকারে হয়।
- পদের মাত্রা $(p+q+r)$ এবং উল্লেখিত পদসমূহের গরিষ্ঠ মাত্রাই হলো বহুপদীটির মাত্রা।

১. $2x^3+2x^2+5x-2$ রাশিতে চলক কোনটি? (সহজ)

ক x^1 খ x^2 গ x ঘ 2 **গ**

২. $5x^2+3y^2-2b+\sqrt{2}$ রাশিটিতে কয়টি পদ বিদ্যমান? (সহজ)

ক 4 খ 5 গ 7 ঘ 10 **ক**

৩. $5y \times 3y+2y+3x-4$ রাশিটিতে কয়টি পদ আছে? (সহজ)

www.bdniyog.com

ক 5 খ 4 গ 3 ঘ 2 — গ

৪. $3x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - x + 5$ বহুপদীটিতে ধ্রুবক কোনটি? (সহজ)

ক 2 খ 3 গ 4 ঘ 5 — খ

৫. $x(x^5 - 2x + 2 + x)$ বহুপদীর ধ্রুবক কত? (সহজ)

ক 0 খ 2. গ 5 ঘ 6 — খ

ব্যাখ্যা: $x^6 - 2x^2 + 2 \times \frac{1}{x} \times x = x^6 - 2x^2 + 2$ অর্থাৎ ধ্রুবক 2।

৬. $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ বহুপদীর ধ্রুবপদ নিচের কোনটি? (সহজ)

ক −6 খ 1 গ 6 ঘ 11 — ক

৭. নিচের কোনটির x চলকের ঘাত শূন্য? (সহজ) [রাজশাহী গভঃ ল্যাবরেটরী হাই স্কুল, রাজশাহী]

ক $4x^2$ খ $4x$ গ $\frac{3}{x}$ ঘ 2 — ঘ

ব্যাখ্যা: $2 = 2 \times 1 = 2 \times x^0$

৮. $3 + x^3 \times x^4 + x^6 \times 2 \div x^5 + x^2$ বহুপদীর মাত্রা কত? (মধ্যম)

ক 2 খ 3 গ 4 ঘ 6 — ক

ব্যাখ্যা: $3 \times \frac{1}{x^3} \times x^4 + x^6 \times 2 \times \frac{1}{x^5} + x^2 = 3x + 2x + x^2$

$= x^2 + 5x$ অর্থাৎ মাত্রা 2.

৯. $x^2(3 - 2x - x^3)$ বহুপদীর মুখ্য সহগের মান কত? (সহজ) [সিলেট সরকারী পাইলট উচ্চ বিদ্যালয়, সিলেট]; [কাদিরাবাদ ক্যান্টনমেন্ট পাবলিক স্কুল, নাটোর]

ক −3 খ −1 গ 1 ঘ 3 — খ

ব্যাখ্যা: $3x^2 - 2x^3 - x^5$ অর্থাৎ মুখ্য সহগের মান − 1

১০. $2(1 + 2x).(1 - 2x)$ বহুপদীর চলকের মুখ্য সহগ কত? (মধ্যম) [রাজশাহী গভঃ ল্যাবরেটরী হাই স্কুল, রাজশাহী]; [রাজশাহী সরকারী বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, হেলেনাবাদ]

ক −8 খ 2 গ 4 ঘ 8 — ক

ব্যাখ্যা: $2(1 - 4x^2) = 2 - 8x^2$ অর্থাৎ সহগ −8

১১. $x^3 - x^7 \times 2 + x^6 - 2$ বহুপদীর মুখ্যপদ কত? (সহজ)

ক x^3 খ $-x^7$ গ x^6 ঘ $-x$ — ক

ব্যাখ্যা: $x^3 - x^7 \times 2 \times \frac{1}{x^6} - 2 = x^3 - 2x - 2$ অর্থাৎ মুখ্যপদ x^3।

১২. এক চলকের বহুপদী নিচের কোনটি? (সহজ)

ক $ax + b$ খ $ax + by$

গ $ax + by + cz$ ঘ $ax + by + cz + 5$ — ক

১৩. $x^2 - 4xy + y^2 - 5x + 7y + 1$ বহুপদীটি কয় চলকের বহুপদী? (সহজ)

ক 1 খ 2 গ 3 ঘ 4 — খ

১৪. $2x + 3y - 1$ বহুপদীটি কোন চলকের বহুপদী? (সহজ)

ক x খ y গ x ও y ঘ z — গ

১৫. দুই চলকের বহুপদী নিচের কোনটি? (সহজ)

ক $x^2 - 1$ খ $x^2 - 2$ গ $x + y$ ঘ $x - 4$ — গ

১৬. দ্বিচলক বহুপদী $8x^3 + y^3 - 2xy$ এর মাত্রা কত? (সহজ) [সিলেট সরকারী পাইলট উচ্চ বিদ্যালয়, সিলেট]

ক 8 খ 3 গ 2 ঘ −2 — খ

১৭. দুই চলকের তিন মাত্রা বিশিষ্ট বহুপদী নিচের কোনটি? (সহজ)

ক $x^4 + y^3 \div y$ খ $x^3 + x - y^3 + y^2$

গ $x^4 \div x - y^4 \div y$ ঘ $x^6 \div x^3 - y^6 + y^2$ — গ

ব্যাখ্যা: $x^4 \times \frac{1}{x} - y^4 \times \frac{1}{y} = x^3 - y^3$ যা দুই চলকের তিন মাত্রা বিশিষ্ট বহুপদী।

১৮. তিন চলকের বহুপদী নিচের কোনটি? (সহজ) [সরকারি করোনেশন মাধ্যমিক বালিকা বিদ্যালয়, খুলনা]

ক $x + y + 1$ খ $2 + y + z$

গ $3 + x + z$ ঘ $4x + 2y + 3z$ — ঘ

১৯. $P(x) = 2x^2 + 7x + 5$ হলে, $P(b)$ এর মান কত? (মধ্যম)

ক $2b^2 + 7b + 5$ খ $2x^2 + 7x + 5$

গ $2x^2 + 7b$ ঘ $2a^2 + 7b$ — ক

২০. $P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 7x + 8$ হলে, $P(0)$ এর মান কত? (মধ্যম) [নাটোর সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়, নাটোর]

ক 8 খ 3 গ 2 ঘ −7 — ক

ব্যাখ্যা: $P(0) = 3(0)^3 + 2(0)^2 - 7(0) + 8 = 8$

২১. $P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 7x + 8$ হলে $P\left(\frac{1}{2}\right)$ এর মান কত? (মধ্যম)

ক $\frac{21}{8}$ খ $\frac{43}{8}$ গ $\frac{53}{8}$ ঘ $\frac{63}{4}$ — খ

ব্যাখ্যা: $P\left(\frac{1}{2}\right) = 3\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 7\left(\frac{1}{2}\right) + 8$

$= 3.\frac{1}{8} + 2.\frac{1}{4} - \frac{7}{2} + 8 = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} - \frac{7}{2} + 8$

$= \frac{3 + 4 - 28 + 64}{8} = \frac{71 - 28}{8} = \frac{43}{8}$

২২. $P(x) = 2x^2 - 3x + 5$ হলে $P(-1) =$ কত? (মধ্যম)

ক 5 খ 10 গ 15 ঘ 25 — খ

ব্যাখ্যা: $p(-1) = 2(-1)^2 - 3(-1) + 5$

$= 2.1 + 3 + 5 = 5 + 5 = 10$

২৩. $P(x, y) = 8x^3 + y^3 - 4x^2 + 7xy + 2y - 5$ হলে, $P(1, 0)$ এর মান কত? (মধ্যম)

ক −2 খ −1 গ 1 ঘ 2 — খ

ব্যাখ্যা: $P(1, 0) = 8(1)^3 + (0)^3 - 4(1)^2 + 7.1.0 + 2.0 - 5$

$= 8.1 + 0 - 4.1 + 0 + 0 - 5 = 8 - 4 - 5 = 8 - 9 = -1$

২৪. $P(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ হলে, $P(1, 1, -2) =$ কত? (মধ্যম) [রাজশাহী সরকারী বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, হেলেনাবাদ; আল-আমিন একাডেমী (স্কুল এন্ড কলেজ) চাঁদপুর]

ক −1 খ 0 গ 1 ঘ 2 — খ

ব্যাখ্যা: $p(1, 1, -2) = (1)^3 + (1)^3 + (-2)^3 - 3.1.1(-2)$

$= 1 + 1 - 8 + 6 = 8 - 8 = 0$

২৫. $P(x) = 2x^2 - 7x + 5$ হলে $P(2) =$ কত? (সহজ)

ক −2 খ −1 গ 1 ঘ 4 — গ

২৬. x, y, a, b, p প্রত্যেকে চলক হলে তিনমাত্রার বহুপদী নিচের কোনটি? (মধ্যম)

ক $ax^2 + 2pxy + by^2$ খ $(ax + by)^2$

গ $p(ax + b^2y)$ ঘ $x(ap + byp)$ — ক

২৭. $18x^3 + 15x^2 - x - 2$ বহুপদীর মুখ্য সহগ নিচের কোনটি? (সহজ)

ক −2 খ −1 গ 15 ঘ 18 — ঘ

২৮. $(m^3 - m) + (m^2 + m)$ বহুপদীর সমান মান নিচের কোনটি? (সহজ) [রাজশাহী সরকারী বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, হেলেনাবাদ]

ক $m + 1$ খ $m - 1$ গ $\frac{1}{m + 1}$ ঘ $\frac{1}{m - 1}$ — খ

২৯. $y \times y + 2y \times 2 - 5 + 5$ রাশিটিতে—

i. পদ সংখ্যা 3

ii. ধ্রুবকের মান − 1

iii. y এর সহগ 4.

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ) [হবিগঞ্জ সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়, হবিগঞ্জ]

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii — ঘ

৩০. $x^5 \times x^2 + x^5 + x^2$ বহুপদীর—

i. মাত্রা 5

ii. x^3 এর সহগ 1

iii. ধ্রুবপদ নেই

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম) [হবিগঞ্জ সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়, হবিগঞ্জ]

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii — গ

ব্যাখ্যা: $x^7 + x^5 \times \frac{1}{x^2} = x^7 + x^3$

৩১. $2 \times x^5 + x^2 - 3x^2 + x^3 \times 2 \times x$ বহুপদীর—

www.bdniyog.com

i. মূখ্যপদের সহগ 2
ii. মূখ্য পদ $2x^4$
iii. মাত্রা 3
নিচের কোনটি সঠিক ?(মধ্যম)
ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **ক**

ব্যাখ্যা: $2 \times x^5 \times \frac{1}{x^2} - 3x^2 + 2x^4 = 2x^4 + 2x^3 - 3x^2$

৩২. $x^3 - 4x^2 + 4x - 3$ রাশিটি x চলকের একটি বহুপদী হলে—
i. $(x-3)$ রাশিটির একটি উৎপাদক।
ii. ধ্রুবপদ 3.
iii. মূখ্যপদ x^3.
নিচের কোনটি সঠিক ? (মধ্যম)
ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **খ**

নিম্নের তথ্যের আলোকে (৩৩-৩৬) নং প্রশ্নের উত্তর দাও :
$2x - 5 - x^3 - 3x^5 - x^6$ একটি বহুপদী রাশি।

৩৩. বহুপদীর মূখ্য পদে সহগ কত? (সহজ)
ক −3 খ −1 গ 1 ঘ 3 **খ**

৩৪. বহুপদীর ধ্রুবপদ কত? (সহজ)
ক 5 খ 3 গ 2 ঘ −5 **ঘ**

৩৫. বহুপদী রাশির মূখ্যপদ নিচের কোনটি? (সহজ)
ক $-x^6$ খ x^6 গ $3x^5$ ঘ $5x^3$ **ক**

৩৬. বহুপদী রাশিটিতে কয়টি পদ আছে? (সহজ)
ক −6 খ 4 গ 5 ঘ 6 **গ**

নিচের তথ্যের আলোকে (৩৭-৪০) নং প্রশ্নের উত্তর দাও।
$P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 7x + 8$.

৩৭. প্রদত্ত বহুপদীর ধ্রুবপদ কত? (সহজ)
ক 2 খ 3 গ 7 ঘ 8 **ঘ**

৩৮. $x = 0$ হলে $P(x) =$ কত? (সহজ)
ক 8 খ 6 গ −6 ঘ −8 **ক**

৩৯. x-এর কোন দুইটি মানের জন্য P(x) এর মান শূন্য? (সহজ)
ক 0 ও 1 খ 1 ও 2 গ 1 ও −2 ঘ −1 ও 2 **গ**

৪০. যদি $p(x) = 3x^3 - 4x^2 + 4x - 3$ হয়, তবে p(x) কে $(x-2)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ নিচের কোনটি? (সহজ)
ক p(1) খ p(2) গ p(3) ঘ p(4) **খ**

★★ ভাগ সূত্র ও সমতা সূত্র। Text পৃষ্ঠা-88

- যদি D(x) ও N(x) উভয়ই x চলকের বহুপদী হয় এবং D(x) এর মাত্রা ≤ (N(x) এর মাত্রা) হয়, তবে সাধারণ নিয়মে D(x) কে ভাগ করে ভাগফল Q(x) ভাগশেষ R(x) পাওয়া যায়। যেখানে,
  (১) Q(x) ও R(x) উভয়ই x চলকের বহুপদী
  (২) Q(x) এর মাত্রা = N(x) এর মাত্রা −D(x) এর মাত্রা
  (৩) R(x) = 0 অথবা R(x) এর মাত্রা < (D(x) এর মাত্রা
  (৪) সকল x এর জন্য $N(x) = D(x)\,Q(x) + R(x)$
- যদি সকল x এর জন্য $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots a_{n-1}x + a_n = P_0x^n + P_1x^{n-1} + \ldots + P_{n-1}x + P_n$ হয়, তবে $a_0 = P_0, a_1 = P_1, \ldots, a_{n-1} = P^{n-1}\ a_n = P_n$ অর্থাৎ, সমতা চিহ্নের উভয় পক্ষে x এর একই ঘাতযুক্ত সহগদ্বয় পরস্পর সমান।

৪১. $9x - 2 = bx + a$ তুলনা করলে b এর মান কত? (সহজ)
ক −9 খ −2 গ 2 ঘ 9 **ঘ**

৪২. $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-1}x + a_n$
$= P_0x^n + P_1x^{n-1} + \ldots\ldots + P_{n-1}x + P_n$ হলে, P_n এর মান কত? (সহজ)
ক a_0 খ a_1 গ a_2 ঘ a_n **ঘ**

৪৩. এক চলকের বহুপদী $5x^2 - 3x - 2 = px^2 + qx + r$ এ সহগগুলোর তুলনা করলে r এর মান কত? (সহজ) [রাজশাহী গভঃ ল্যাবরেটরী হাই স্কুল, রাজশাহী]
ক −2 খ −1 গ 2 ঘ 5 **গ**

৪৪. ভাগের নিয়মে $(x^2 - 2)(x^2 + 2) + 4$ বহুপদীর ভাগশেষ শূন্য হলে ভাজ্য কত? (মধ্যম)
ক $x^4 - 4$ খ x^4 গ $x^4 + 4$ ঘ $x^4 + 8$ **খ**

ব্যাখ্যা: $(x^2)^2 - (2)^2 + 4 = x^4 - 4 + 4 = x^4$

৪৫. $x^2 - 1 = (x+1)(x-1) - 1$ হলে (−1) কে কী বলে? (সহজ)
ক ভাজক খ ভাগফল গ ভাগশেষ ঘ ভাজ্য **গ**

৪৬. $7x^2 - 5x + 6 = ax^2 + cx + b$ এ সহগগুলো সমীকৃত করলে—
i. $b = 6$
ii. $c = -5$
iii. $a = 7$
নিচের কোনটি সঠিক ?(মধ্যম)
ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **ঘ**

৪৭. $ax^2 + bx + c = x^2 + 2x + 1$ হলে—
i. $a = 1$
ii. $b = 2$
iii. $a + b + c = 4$
নিচের কোনটি সঠিক ?(সহজ)
ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **ঘ**

★★★ ভাগশেষ ও উৎপাদক উপপাদ্য। Text পৃষ্ঠা-88

- P(x) বহুপদীকে $x - a$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ P(a) হবে।
- P(x) বহুপদীকে $ax + b$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $P\left(-\frac{b}{a}\right)$
- $P(a) = 0$ হলে $(x - a)$ হচ্ছে P(x) এর একটি উৎপাদক।
- P(x) বহুপদীর $x - a$ একটি উৎপাদক হলে $P(a) = 0$।

৪৮. $P(x) = 4x^4 - 12x^3 + 7x^2 + 3x - 2$ এর একটি উৎপাদক $(2x + 1)$ হলে $P\left(-\frac{1}{2}\right) =$ কত? (সহজ) [সরকারি মুসলিম উচ্চ বিদ্যালয়, চট্টগ্রাম]
ক 0 খ $\frac{1}{2}$ গ 4 ঘ 12 **ক**

৪৯. $18x^3 + 15x^2 - x - 2$ বহুপদীর ধ্রুবপদের গুণনীয়কের সেট নিচের কোনটি? (মধ্যম) [বিদ্যাময়ী গভঃ গার্লস হাই স্কুল, ময়মনসিংহ]; [রাজশাহী গভঃ ল্যাবরেটরী হাই স্কুল, রাজশাহী]
ক $\{-2, 2\}$ খ $\{-2\}$
গ $\{1, -1, 2, -2\}$ ঘ $\{1, -1\}$ **গ**

৫০. যদি $p(x) = 3x^3 - 4x^2 + 4x - 3$ হয়, তবে p(x) কে $(x - 2)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ নিচের কোনটি? (সহজ)
ক p(1) খ p(2) গ p(3) ঘ p(4) **খ**

৫১. $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $(x - 1)$ হলে, নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম) [ঝিনাইদা সরকারী বালক উচ্চ বিদ্যালয়]
ক $a + b - c - d = 0$ খ $a + b + c - d = 0$
গ $a + b + c + d = 0$ ঘ $a - b + c - d = 0$ **গ**

৫২. বহুপদীর একটি উৎপাদক $(x - 1)$ হবে যদি ও কেবল যদি বহুপদীর সহগসমূহের সমষ্টি নিচের কোনটি? (সহজ)
ক −1 খ 0 গ 1 ঘ 2 **খ**

৫৩. $Q(x) = ax^2 + 2bx + c$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $(x - 1)$ হলে নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)
ক $a^2 + 2b + c = 0$ খ $a + b + c = 0$
গ $2a + b + c = 0$ ঘ $a + 2b + c = 0$ **ঘ**

৫৪. $x^4 - 5x^3 + 7x^2 - a$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $(x - 2)$ হলে a = কত? (মধ্যম) [সরকারি করোনেশন মাধ্যমিক বালিকা বিদ্যালয়, খুলনা]; [রাজশাহী গভঃ ল্যাবরেটরী হাই স্কুল, রাজশাহী]

www.bdniyog.com

ক 6 খ 4 গ 3 ঘ −4 **খ**

ব্যাখ্যা: $2^4 - 5.2^3 + 7.2^2 - a = 44 - 40 - a$
$= 4 - a$
অর্থাৎ, $4 - a = 0 \therefore a = 4$

৫৫. $Q(y) = y^2 - 5y + 6$ বহুপদীর y এর কোন মানের জন্য $Q(y) = 2$ হবে? (মধ্যম)

ক 2 খ 4 গ 5 ঘ 6 **খ**

ব্যাখ্যা: $Q(4) = 4^2 - 5.4 + 6 = 2$ অর্থাৎ $y = 4$

৫৬. যদি $A(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 4$ হয় তবে $(x - 3)$ দ্বারা $A(x)$ কে ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে? (সহজ)

ক 2 খ 1 গ 0 ঘ −1 **ঘ**

ব্যাখ্যা: $(3)^3 - 4.(3)^2 + 4.3 - 4 = 27 - 36 + 12 - 4$
$= 39 - 40 = -1$ অর্থাৎ -1.

৫৭. $Q(x) = 5x^3 + 6x^2 - ax + 6$ কে $(x - 2)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ 6 হলে a এর মান কত? (কঠিন) [বিদ্যাময়ী গভঃ গার্লস হাই স্কুল, ময়মনসিংহ]; [ময়মনসিংহ জিলা স্কুল, ময়মনসিংহ]; [রাজশাহী গভঃ ল্যাবরেটরী হাই স্কুল, রাজশাহী]

ক 30 খ 32 গ 34 ঘ 36 **খ**

ব্যাখ্যা: $5(2)^3 + 6(2)^2 - 2a + 6 = 70 - 2a$ অর্থাৎ $70 - 2a = 6$
সুতরাং $a = 32$

৫৮. $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ হলে $P(x)$ এর একটি উৎপাদক নিচের কোনটি? (সহজ) [রাজশাহী গভঃ ল্যাবরেটরী হাই স্কুল, রাজশাহী]

ক $(x + 3)$ খ $(x + 2)$ গ $(x + 1)$ ঘ $(x - 1)$ **ঘ**

ব্যাখ্যা: $(1)^3 - 6.(1)^2 + 11.1 - 6 = 12 - 12 = 0$ অর্থাৎ
$(x - 1)$ এর একটি উৎপাদক।

৫৯. $P(x) = x^3 - x - 2$ হলে—

i. $(x + 1)$ রাশিটির একটি উৎপাদক।
ii. $x = 2$ এর জন্যে রাশিটির মান শূন্য।
iii. একে $(x - 4)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ 10 হয়।

নিচের কোনটি সঠিক ? (মধ্যম)

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **ঘ**

৬০. $P(x) = x^2 - 5x + 4$ হলে—

i. $p(4) = 0$
ii. $(x - 4)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক
iii. $(x - 4)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ 2

নিচের কোনটি সঠিক ? (মধ্যম)

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **ক**

ব্যাখ্যা: (iii) সঠিক নয়, কারণ; $P(4) = (4)^2 - 5.4 + 4$
$= 16 - 20 + 4 = 0$ তাই ভাগশেষ শূন্য।

৬১. $p(x) = x^2 - a^2$ এবং $P(a) = 0$ হলে—

i. $(x - a)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক।
ii. $(x + a)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক।
iii. $x^2 - a^2$ দ্বারা $P(x)$ কে ভাগ করলে ভাগফল শূন্য।

নিচের কোনটি সঠিক ? (সহজ)

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **ক**

নিচের তথ্যের আলোকে (৬২-৬৩) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$5x^3 + 6x^2 - ax + 6$ একটি বহুপদী।

৬২. প্রদত্ত বহুপদীকে $(x - 2)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হয়? (মধ্যম)

ক $70 - 2a$ খ $70 + 2a$ গ $80 - a$ ঘ $80 + a$ **ক**

৬৩. বহুপদীটির ভাগশেষের মান 6 হলে, a = কত? (সহজ)

ক 30 খ 31 গ 32 ঘ 33 **গ**

নিচের তথ্যের আলোকে (৬৪-৬৫) নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

$P(x) = 32x^4 - 16x^2 + 8x + 7$ একটি বীজগাণিতিক রাশি।

৬৪. P(1) এর মান কত? (সহজ)

ক 63 খ 47 গ 31 ঘ 1 **গ**

৬৫. P(x) কে $2x - 1$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে? (মধ্যম) [হবিগঞ্জ সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়, হবিগঞ্জ]

ক 9 খ 11 গ 13 ঘ 19 **ক**

ব্যাখ্যা: $32 \times \frac{1}{2^4} - 16.\frac{1}{2^3} + 8.\frac{1}{2} + 7 = \frac{32}{16} - \frac{16}{4} + 4 + 7 = 9$

নিম্নের তথ্যের আলোকে (৬৬-৬৭) নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

$(x + 3)$ ও $(x - 3)$ দুইটি রাশি।

৬৬. একটি ভাজক ও অপরটি ভাগফল হলে ভাজ্য কত? (সহজ)

ক $x^2 - 3$ খ $x^2 - 9$ গ $x - 9$ ঘ $x^2 + 9$ **খ**

৬৭. ১ম রাশি ভাজক, ২য় রাশি ভাগফল এবং ভাজ্য $x^2 - 11$ হলে ভাগশেষ কত? (মধ্যম)

ক −2 খ 2 গ 9 ঘ 11 **ক**

ব্যাখ্যা: $x^2 - 11 = (x + 3)(x - 3) + R$; $x^2 - 11 = x^2 - 9 + R$
$\therefore R = -2$

★★★ সমমাত্রিক, প্রতিসম ও চক্রক্রমিক রাশি। Text পৃষ্ঠা-৫০

- বহুপদীর প্রত্যেক পদের মাত্রা একই হলে তাকে সমমাত্রিক বহুপদী বলে।
- একাধিক চলক বিশিষ্ট রাশির যে কোনো দুইটি চলকের স্থান বিনিময়ে রাশিটি অপরিবর্তিত থাকলে প্রতিসম রাশি হয়।
- $ab + bc + ca$ রাশিটি a, b, c চলকের এবং $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx$ রাশিটি x, y, z চলকের প্রতিসম রাশি।
- চক্রক্রমিক রাশিতে চলকগুলোর স্থান চক্রকারে পরিবর্তন হলেও রাশির মান অপরিবর্তিত থাকে।
- তিন চলকের প্রত্যেক প্রতিসম রাশি চক্র-ক্রমিক। কিন্তু প্রত্যেক চক্র ক্রমিক রাশি প্রতিসম নয়।

৬৮. নিচের কোনটি সমমাত্রিক বহুপদী? (সহজ) [হবিগঞ্জ সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়, হবিগঞ্জ]; [রাজশাহী কলেজিয়েট স্কুল, রাজশাহী]

ক $2x + xy + y^2$ খ $x^2 + x + y^2$
গ $x^2 + y^2 + y$ ঘ $x^2 + xy + y^2$ **ঘ**

৬৯. $2x^2y + y^2z + 9z^2x - 5xyz$ রাশিটি সমমাত্রিক বহুপদী হলে প্রত্যেক পদের মাত্রা কত? (মধ্যম)

ক 2 খ 3 গ 9 ঘ 10 **খ**

৭০. নিচের কোনটি প্রতিসম রাশির নিয়ম বহির্ভূত? (সহজ)

ক $(x + y)^2$ খ $(x - y)^2$ গ $(x + y)^3$ ঘ $(x - y)^3$ **ঘ**

৭১. প্রতিসম রাশি নিচের কোনটি? (সহজ) [বিদ্যাময়ী গভঃ গার্লস হাই স্কুল, ময়মনসিংহ; ময়মনসিংহ জিলা স্কুল, ময়মনসিংহ; রাজশাহী গভঃ ল্যাবরেটরী হাই স্কুল, রাজশাহী]

ক $2x^2 + 3xy + y^2$ খ $2x^2 + 2xy + 2y^2$
গ $x^2 + 3xy + 2y^2$ ঘ $4x^2 + xy + 3y^2$ **খ**

৭২. যেকোনো বীজগাণিতিক রাশির প্রতিসম রাশি পাওয়ার ক্ষেত্রে ন্যূনতম কয়টি চলকের স্থান বিনিময়ের প্রয়োজন হয়? (মধ্যম)

ক 1 খ 2 গ 3 ঘ 4 **খ**

৭৩. $x^2y + y^2z + z^2x$ বহুপদীর চক্র-ক্রমিক রাশি নিচের কোনটি? (সহজ) [ঝালকাঠি সরকারি হরচন্দ্র বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, ঝালকাঠি]

ক $y^2z - z^2x + x^2y$ খ $y^2z + z^2x - x^2y$
গ $-y^2x + z^2x + x^2y$ ঘ $y^2z + z^2x + x^2y$ **খ**

৭৪. $x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y)$ রাশিটির চক্র ক্রমিক রাশি নিচের কোনটি? (মধ্যম)

ক $x^2(y - z) + z^2(z - x) + y^2(y - z)$
খ $y^2(x - z) + x^2(z - y) + z^2(y - x)$
গ $z^2(x - y) + y^2(z - x) + x^2(y - z)$
ঘ $x^2(y + z) + y^2(z + x) + z^2(x + y)$ **গ**

৭৫. $x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y)$ রাশিটি —

i. বীজগাণিতিক।

www.bdniyog.com

ii. চক্র-ক্রমিক।
iii. প্রতিসম।
নিচের কোনটি সঠিক ? (মধ্যম)
ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **ক**

৭৬. a = 2, b = 3 ও c = 2 হলে—
i. $ax^2 + bx + c$ একটি বীজগাণিতিক রাশি।
ii. $ax^2 + bcxy + cy^2$ প্রতিসম রাশি।
iii. $ax^2 + by^2 + cz^2$ চক্র-ক্রমিক রাশি।
নিচের কোনটি সঠিক ? (কঠিন) [বিদ্যাময়ী গভ: গার্লস হাই স্কুল, ময়মনসিংহ]
ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **ক**

ব্যাখ্যা: iii সঠিক নয়; $2x^2 + 3y^2 + 2z^2$ রাশিটি চক্র-ক্রমিক নয়।

৭৭. $x^2 + y^2 + z^2$ একটি— [রাজশাহী গভ: ল্যাবরেটরী হাই স্কুল, রাজশাহী]
i. প্রতিসম রাশি।
ii. সমমাত্রিক বহুপদী।
iii. চক্র-ক্রমিক রাশি।
নিচের কোনটি সঠিক ? (সহজ)
ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **গ**

নিচের তথ্যের আলোকে (৭৮-৭৯) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:
$P(a) = (b + c)(c + a)(a + b) + abc$ একটি তিন মাত্রার সমমাত্রিক চক্র-ক্রমিক বহুপদী।

৭৮. $P\{-(b + c)\}$ = কত? (মধ্যম)
ক $-a$ খ 0 গ a ঘ $b + c$ **খ**

ব্যাখ্যা: $P\{-(b + c)\} = (b + c)(c - b + c)(-b - c + b) - bc(b + c) = bc(b + c) - bc(b + c) = 0$

৭৯. প্রদত্ত বহুপদীর একটি উৎপাদক নিচের কোনটি? (সহজ)
ক $a - b$ খ $b - c$ গ $c - a$ ঘ $a + b + c$ **ঘ**

নিচের তথ্যের আলোকে (৮০-৮২) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:
$P(a) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)\{k(a^2 + b^2 + c^2) + m(ab + bc + ca)\}$ একটি তিন মাত্রার সমমাত্রিক চক্র-ক্রমিক বহুপদী।

৮০. $P\{-(b + c)\}$ = কত? (সহজ)
ক 0 খ 1 গ $b + c$ ঘ $a + b + c$ **ক**

ব্যাখ্যা: যেহেতু $(a + b + c)$, $P(a)$ এর একটি উৎপাদক তাই $p\{-(b + c)\}$ এর মান শূন্য হবে।

৮১. a = 1, b = 0, c = 0 হলে, k এর মান কত? (মধ্যম)
ক -1 খ 0 গ 1 ঘ 2 **গ**

ব্যাখ্যা: $1^3 + 0^3 + 0^3 - 0 = (1 + 0 + 0)\{k(1^2 + 0 + 0)\} + m(1.0 + 0.0 + 0.1)\}$
বা, $1 = 1.k + 0 \therefore k = 1$

৮২. a = 1, b = 1, c = 1 হলে, m এর মান কত? (মধ্যম)
ক -1 খ 0 গ 1 ঘ $b + c$ **ক**

★★ চক্রক্রমিক বহুপদীর উৎপাদকে বিশ্লেষণ | Text পৃষ্ঠা-৫১

- কোনো চক্রক্রমিক বহুপদীর $(a - b)$ একটি উৎপাদক হলে, $(b - c)$ এবং $(c - a)$ রাশিটির উৎপাদক হবে।
- একমাত্রার ও দুই মাত্রার সমমাত্রিক চক্রক্রমিক বহুপদী যথাক্রমে $k(a + b + c)$ ও $k(a^2 + b^2 + c^2) + m(ab + bc + ca)$ যেখানে k ও m ধ্রুবক। দুইটি বহুপদী যদি এমন হয় যে, চলমগুলোর সকল মানের জন্য এদের মান সমান হয়, তবে বহুপদী দুইটির অনুরূপ পদ দুইটির সহগ পরস্পর সমান হবে।

৮৩. $bc(b - c) + ca(c - a) + ab(a - b)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করলে নিচের কোনটি পাওয়া যাবে? (মধ্যম)
ক $(a - b)(b - c)(c - a)$ খ $(a + b)(b + c)(c + a)$
গ $-(a - b)(b - c)(c - a)$ ঘ $-(a + b)(b + c)(c + a)$ **গ**

৮৪. $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ করলে নিচের কোনটি পাওয়া যাবে? (মধ্যম)
ক $(a - b)(b - c)(c - a)$ খ $2(a - b)(b - c)(c - a)$
গ $3(a - b)(b - c)(c - a)$ ঘ $-3(a - b)(b - c)(c - a)$ **গ**

৮৫. a, b, c চলকের কোনো চক্র ক্রমিক বহুপদীর একটি উৎপাদক $(a - b)$ হলে অপর উৎপাদকগুলো কী কী? (সহজ)
ক $(a + b)$ ও $(b - c)$ খ $(b - c)$ ও $(c - a)$
গ $(c - a)$ ও $(b + c)$ ঘ $(b + c)$ ও $(c + a)$ **খ**

★★★ মূলদ ভগ্নাংশ | Text পৃষ্ঠা-৫৫

- একটি বহুপদীকে লব এবং একটি বহুপদীকে হর ধরে গঠিত ভগ্নাংশকে মূলদীয় ভগ্নাংশ বলে। যেমন, $\frac{x}{(x-1)(x-5)}$ এবং $\frac{x^2+1}{(x+8)(x^2+5x+7)}$ মূলদীয় ভগ্নাংশ।

৮৬. $\frac{a^2 + a + 1}{(a - b)(a - c)}$ ভগ্নাংশটি কী ধরনের ভগ্নাংশ? (মধ্যম)
ক প্রকৃত খ অপ্রকৃত গ মূলদ ঘ অমূলদ **গ**

৮৭. নিচের কোনটি অপ্রকৃত ভগ্নাংশ? (মধ্যম)
ক $\frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 + 2x - 3}$ খ $\frac{5x + 2}{x(x + 1)}$
গ $\frac{x^2 + 1}{(x + 1)(x + 2)(x + 3)}$ ঘ $\frac{x}{x^2 + 1}$ **ক**

৮৮. $\frac{x^3}{x^2 - 9}$ ভগ্নাংশটির সমান নিচের কোনটি? (মধ্যম) [সরকারি করোনেশন মাধ্যমিক বালিকা বিদ্যালয়, খুলনা; চট্টগ্রাম সিটি কর্পোরেশন আন্তঃবিদ্যালয়]
ক $x + \frac{9}{x^2 - 9}$ খ $x + \frac{x}{x^2 - 9}$
গ $x + \frac{9x}{x^2 - 9}$ ঘ $x + \frac{1}{x^2 - 9}$ **গ**

৮৯. $\frac{9x}{(x + 3)(x - 3)}$ ভগ্নাংশটি কী ধরনের ভগ্নাংশ? (সহজ)
ক প্রকৃত খ অপ্রকৃত গ মিশ্র ঘ আংশিক **ক**

৯০. $x^3 - 1 = (x + 1)(x - 1) - 1$ হলে (-1) কে কী বলে? (সহজ)
ক ভাজক খ ভাগফল গ ভাগশেষ ঘ ভাজ্য **গ**

৯১. $\frac{1}{(a - b)(a - c)} + \frac{a^2 + a + 1}{(a - b)(a - c)}$ হলে—
i. প্রথম ভগ্নাংশটি মূলদ ভগ্নাংশ।
ii. দ্বিতীয় ভগ্নাংশটি মূলদ ভগ্নাংশ।
iii. সরলমান $\frac{2a^2 - ab + bc - ca + a + 1}{(a - b)(a - c)}$
নিচের কোনটি সঠিক ? (কঠিন)
ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **ক**

ব্যাখ্যা: $\frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{a^2 + a + 1}{(a-b)(a-c)}$
$= \frac{1 + a^2 + a + 1}{(a - b)(a - c)} = \frac{a^2 + a + 2}{(a - b)(a - c)}$

নিচের তথ্যের আলোকে (৯২-৯৪) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:
$\frac{a^2 - (b - c)^2}{(a + c)^2 - b^2} + \frac{1}{+} \frac{-(a - c)^2}{+b)^2 - c^2} + \frac{c + a - b}{a + b + c}$

৯২. প্রথম মূলদ ভগ্নাংশটির সরলমান কত? (মধ্যম)
ক $\frac{a + b - c}{a + b + c}$ খ $\frac{a + b - c}{a + b - c}$ গ $\frac{a - b + c}{a + b - c}$ ঘ $\frac{a - b + c}{a + b + c}$ **ক**

ব্যাখ্যা: $\frac{a^2 - (b - c)^2}{(a + c)^2 - b^2} = \frac{(a + b - c)(a - b + c)}{(a + c + b)(a + c - b)} = \frac{a + b - c}{a + b + c}$

৯৩. দ্বিতীয় মূলদ ভগ্নাংশটির সরলমান কত? (মধ্যম)
ক $\frac{b - a + c}{a - b - c}$ খ $\frac{b - a + c}{a + b + c}$ গ $\frac{a - b + c}{a - b - c}$ ঘ $\frac{a - b + c}{a + b - c}$ **খ**

ব্যাখ্যা: $\frac{b^2 - (a - c)^2}{(a + b)^2 - c^2} = \frac{(b + a - c)(b - a + c)}{(a + b + c)(a + b - c)} = \frac{(b - a + c)}{(a + b + c)}$

৯৪. প্রদত্ত উদ্দীপকটির সরলমান কত? (কঠিন)
ক $a + b + c$ খ $a + b - c$ গ 0 ঘ 1 **ঘ**

www.bdniyog.com

ব্যাখ্যা: $\frac{a+b-c}{a+b+c}+\frac{b-a+c}{a+b+c}+\frac{c+a-b}{a+b+c}$

$\frac{a+b-c+b-a+c+c+a-b}{a+b+c}=\frac{a+b+c}{a+b+c}=1$

★★★ আংশিক ভগ্নাংশ। [দেখ পৃষ্ঠা-৫৭]

৫ যদি কোনো ভগ্নাংশকে একাধিক ভগ্নাংশের যোগফল রূপে প্রকাশ করা যায় তবে শেষোক্ত ভগ্নাংশগুলোর প্রত্যেকটিকে প্রথমোক্ত ভগ্নাংশের আংশিক ভগ্নাংশ বলা হয়।

৯৫. নিচের কোনটি প্রকৃত ভগ্নাংশ? (সহজ)

ক $\frac{2}{x^2+3}$ খ $\frac{x^2+1}{x+1}$ গ $\frac{x^3}{x^2-1}$ ঘ $\frac{x^4}{x^3-1}$ **ক**

৯৬. নিচের কোনটি অপ্রকৃত ভগ্নাংশ? (সহজ)

ক $\frac{2}{x^2+3}$ খ $\frac{1}{x-3}$ গ $\frac{x^2+3}{x+2}$ ঘ $\frac{x+2}{x^2+3}$ **গ**

৯৭. $\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}=\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x-2}$ হলে, A এর মান কত? (সহজ)

ক -3 খ -2 গ 2 ঘ 3 **গ**

৯৮. $\frac{3x-8}{x^2-5x+8}$ ভগ্নাংশটি—

i. প্রকৃত।

ii. মূলদ।

iii. এর মান $\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x-3}$

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **ক**

৯৯. $A=\frac{x^3+3x^2+2}{x+2}=(x^2+x-2)+\frac{6}{x+2}$ হলে—

i. x^2+x-2 হচ্ছে পূর্ণ অংশ।

ii. $\frac{6}{x+2}$ প্রকৃত ভগ্নাংশ।

iii. A ভগ্নাংশটি অপ্রকৃত ভগ্নাংশ।

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **ঘ**

১০০. $1+\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}=1+\frac{1}{2(x-1)}-\frac{8}{x-2}+\frac{27}{2(x-3)}$

হলে—

i. $A=2$

ii. $B=-8$

iii. $C=\frac{27}{2}$

নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii **গ**

নিচের তথ্যের আলোকে (১০১-১০৩) নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

$\frac{5x+2}{(x+2)(3x-2)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{3x-2}$ যেখানে A ও B মূলদ

১০১. A এর মান কত? (কঠিন) [সরকারী পি. এন বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, রাজশাহী]

ক -2 খ -1 গ 1 ঘ 2 **গ**

১০২. B এর মান কত? (কঠিন) [সরকারী পি. এন বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, রাজশাহী]

ক -3 খ -2 গ 2 ঘ 3 **গ**

১০৩. আংশিক ভগ্নাংশটি কত হবে? (মধ্যম) [সরকারী পি. এন বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, রাজশাহী]

ক $\frac{2}{x+2}+\frac{1}{3x-2}$ খ $\frac{1}{3x-2}+\frac{3}{x+2}$

গ $\frac{1}{x+2}+\frac{2}{3x-2}$ ঘ $\frac{1}{x+2}-\frac{2}{3x-2}$ **গ**

নিচের তথ্যের আলোকে (১০৪-১০৬) নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

$\frac{5x-7}{(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}$; A ও B মূলদ।

১০৪. A = কত? (সহজ)

ক 1 খ 2 গ 3 ঘ 4 **খ**

১০৫. B = কত? (মধ্যম)

ক 1 খ 2 গ 3 ঘ 4 **গ**

১০৬. আংশিক ভগ্নাংশটি কত হবে? (সহজ) [সাবেরা মোবহান সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, ব্রাহ্মণবাড়ীয়া]; [ঝিনাইদহ সরকারী উচ্চ বিদ্যালয়]; [নরসিংদী সরকারী উচ্চ বিদ্যালয়]

ক $\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x-2}$ খ $\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x+2}$

গ $\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+2}$ ঘ $\frac{2}{x+1}+\frac{3}{x-2}$ **ক**

শ্রেণির কাজের ওপর সৃজনশীল রচনামূলক প্রশ্ন

প্রশ্ন ▶১ $f(x)=x+2x^2+3x^3+2$, x^3+x^{-2}

$P(x, y, z)=x^3+y^3+z^3+axyz$. (a ধ্রুবক) *[বকাম; পৃষ্ঠা-৪৩]*

ক. ওপরের কোনগুলো বহুপদী? এক চলকের ও তিনচলকের বহুপদীগুলোকে আলাদা করে লেখ। ২

খ. এক চলকের বহুপদীটি আদর্শ আকারে লিখে $f(-1)$ নির্ণয় কর এবং রাশিটিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ৪

গ. $P(1, 1, -2)=0$ হলে, a এর মান কত? ৪

১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক বহুপদীগুলো হলো: $f(x)=x+2x^2+3x^3+2$,

$P(x, y, z)=x^3+y^3+z^3+axyz$

এক চলকের বহুপদী: $f(x)=x+2x^2+3x^3+2$

তিন চলকের বহুপদী: $P(x, y, z)=x^3+y^3+z^3+axyz$.

খ এক চলকের বহুপদীটির আদর্শ আকার হলো:

$f(x)=3x^3+2x^2+x+2$

$\therefore f(-1)=3(-1)^3+2(-1)^2+(-1)+2$

$=-3+2-1+2$

$=4-4=0$

$\therefore f(-1)=0$

$\therefore (x+1)$, $f(x)$-এর একটি উৎপাদক।

$3x^3+2x^2+x+2=3x^3+3x^2-x^2-x+2x+2$

$=3x^2(x+1)-x(x+1)+2(x+1)$

$=(x+1)(3x^2-x+2)$

গ $P(x, y, z)=x^3+y^3+z^3+axyz$

$\therefore P(1, 1, -2)=(1)^3+(1)^3+(-2)^3+a.1.1(-2)$

$=1+1-8-2a$

$=-6-2a$

কিন্তু, $P(1, 1, -2)=0$

বা, $-6-2a=0$

বা, $-2a=6$

$\therefore a=-3$

সুতরাং $P(1, 1, -2)=0$ হলে $a=-3$.

প্রশ্ন ▶২ $P(x)=5x-6x^3-2+2x^4$ একটি x চলকের বহুপদী। *[বকাম; পৃষ্ঠা-৪৯]*

ক. বহুপদীটির আদর্শরূপ লিখ এবং এর মাত্রা, মুখ্য সহগ ও ধ্রুব পদ নির্ণয় কর। ২

www.bdniyog.com

খ. P(x) কে (2x + 1) বহুপদী দ্বারা ভাগ করে ভাগশেষ নির্ণয় কর এবং ভাগশেষ উপপাদ্যের সাহায্যে এর সত্যতা নিরূপণ কর। ৪

গ. যদি $Q(x) = 2x^3 + x^2 + ax - 9$, $R(x) = P(x) + k$ এবং Q(x) ও R(x) এর সাধারণ উৎপাদক (x + 3) হয় তবে a ঃ k নির্ণয় কর। ৪

২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক বহুপদীটির আদর্শ রূপ $P(x) = 2x^4 - 6x^3 + 5x - 2$ এর মাত্রা 4, মুখ্য সহগ 2 এবং ধ্রুব পদ –2.

খ

$$
\begin{array}{r|l}
2x+1 & 2x^4-6x^3+5x-2 \left(x^3-\frac{7}{2}x^2+\frac{7x}{4}+\frac{13}{8}\right. \\
 & \underline{2x^4+x^3} \\
 & -7x^3+5x \\
 & \underline{-7x^3-\frac{7}{2}x^2} \\
 & \frac{7}{2}x^2+5x \\
 & \underline{\frac{7}{2}x^2+\frac{7}{4}x} \\
 & \frac{13}{4}x-2 \\
 & \underline{\frac{13}{4}x+\frac{13}{8}} \\
 & -\frac{29}{8}
\end{array}
$$

$\therefore$ ভাগশেষ $= -\frac{29}{8}$

আবার ভাগশেষ উপপাদ্যের সাহায্যে পাই,

ভাগশেষ, $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^4 - 6\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 5\left(-\frac{1}{2}\right) - 2$

$= -\frac{29}{8}$

$\therefore$ ভাগশেষ উপপাদ্যের সাহায্যে সত্যতা প্রমাণিত হলো।

গ $Q(x) = 2x^3 + x^2 + ax - 9$

এবং $R(x) = P(x) + k = 2x^4 - 6x^3 + 5x - 2 + k$

যেহেতু Q(x) ও R(x) এর সাধারণ উৎপাদক x + 3.

$\therefore Q(-3) = 0$

বা, $2(-3)^3 + (-3)^2 + a(-3) - 9 = 0$

বা, $-54 + 9 - 3a - 9 = 0$

$\therefore a = -18$

এবং $R(-3) = 0$

বা, $2(-3)^4 - 6(-3)^3 + 5(-3) - 2 + k = 0$

বা, $162 + 162 - 15 - 2 + k = 0$

$\therefore k = -307$

$\therefore a : k = -18 : -307 = 18 : 307$. (Ans.)

প্রশ্ন ▶ ৩ $P(a) = a^3 - a^2 - 10a - 8$ একটি বহুপদী, যার ধ্রুবপদ এবং মুখ্য সহগের উৎপাদক সমূহের সেট যথাক্রমে F_1 ও F_2. যেখানে উৎপাদকসমূহ পূর্ণসংখ্যা। [সিলেট সরকারী পাইলট উচ্চ বিদ্যালয়, সিলেট]

◀ কাজ: পৃষ্ঠা-৫০

ক. F_1 ও F_2 নির্ণয় কর। ২

খ. P(x) নির্ণয় কর যেখানে $x \in F_2$। P(x) এর একটি উৎপাদক নির্ণয় কর। ৪

গ. P(a) কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর এবং দেখাও যে, P(a) = 0 যেসব মান দ্বারা সিদ্ধ হয় তার সেট $F_3 \subset F_1$. ৪

৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক P(a) এর ধ্রুবপদ –8 এর উৎপাদক সমূহের সেট,

$F_1 = \{-1, 1, -2, 2, -4, 4, -8, 8\}$

P(a)-এর মুখ্য সহগ 1 এর উৎপাদক সমূহের সেট, $F_2 = \{-1, 1\}$

খ দেওয়া আছে, $P(a) = a^3 - a^2 - 10a - 8$

$\therefore P(x) = x^3 - x^2 - 10x - 8$

$x \in F_2$

$x = 1$ হলে, $P(1) = 1 - 1 - 10 - 8 \neq 0$

$x = -1$ হলে, $P(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - 10(-1) - 8$

$= -1 - 1 + 10 - 8$

$= 0$

সুতরাং, (x + 1), P(x) এর একটি উৎপাদক।

গ দেওয়া আছে, $P(a) = a^3 - a^2 - 10a - 8$

$\therefore P(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - 10(-1) - 8$

$= -1 - 1 + 10 - 8 = 0$

$\therefore \{(a - (-1)\}$ অর্থাৎ (a + 1), P(a) এর একটি উৎপাদক।

এখন, $a^3 - a^2 - 10a - 8$

$= a^3 + a^2 - 2a^2 - 2a - 8a - 8$

$= a^2(a+1) - 2a(a+1) - 8(a+1)$

$= (a+1)(a^2 - 2a - 8)$

$= (a+1)(a^2 - 4a + 2a - 8)$

$= (a+1)\{a(a-4) + 2(a-4)\}$

$= (a+1)(a+2)(a-4)$

$\therefore P(a) = (a+1)(a+2)(a-4)$

$\therefore a = -1, -2, 4$ দ্বারা $P(a) = 0$ সিদ্ধ হবে।

$\therefore F_3 = \{-1, -2, 4\}$

উপসেটের সংজ্ঞানুসারে $F_3 \subset F_1$. (দেখানো হলো)

প্রশ্ন ▶ ৪ $x^2 + x - 6$ রাশিটি $x^3 + hx^2 + kx - 6$ বহুপদীর একটি উৎপাদক। ◀ কাজ: পৃষ্ঠা-৫০

ক. $x^2 + x - 6$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ২

খ. h ও k এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. বহুপদীটিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ৪

৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $x^2 + x - 6 = x^2 + 3x - 2x - 6$

$= x(x+3) - 2(x+3)$

$= (x+3)(x-2)$

খ মনে করি, $P(x) = x^3 + hx^2 + kx - 6$

যেহেতু, $x^2 + x - 6$, P(x) এর একটি উৎপাদক।

সুতরাং, (x + 3) এবং (x – 2) উভয়ই P(x) এর উৎপাদক। [ক হতে পাই]

$\therefore P(-3) = 0$ এবং $P(2) = 0$.

এখন, $P(-3) = (-3)^3 + h(-3)^2 + k(-3) - 6$

$= -27 + 9h - 3k - 6$

$= 9h - 3k - 33$

এবং $P(2) = (2)^3 + h(2)^2 + k.2 - 6$

$= 8 + 4h + 2k - 6$

$= 4h + 2k + 2$

সুতরাং, $9h - 3k - 33 = 0$

বা, $18h - 6k - 66 = 0$.....(i)

এবং $4h + 2k + 2 = 0$

বা, $12h + 6k + 6 = 0$ ..... (ii)

(i) নং ও (ii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$30h - 60 = 0$

www.bdniyog.com

বা, $30h = 60$

$\therefore h = 2$

h এর মান (ii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$24 + 6k + 6 = 0$

বা, $30 + 6k = 0$

বা, $6k = -30$

$\therefore k = -5$

$\therefore h = 2, k = -5$ **(Ans.)**

গ বহুপদীটি $= x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ ['খ' থেকে মান বসিয়ে]

$f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

$f(x)$ এর মুখ্য সহগ 1 এবং ধ্রুব পদ -6

$f(x)$ এর ধ্রুব পদ -6 এর উৎপাদক সমূহের সেট $= \{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6\}$

$\therefore f(1) = 1^3 + 2.1^2 - 5.1 - 6 = -8 \neq 0$

$\therefore f(-1) = (-1)^3 + 2(-1)^2 - 5(-1) - 6$
$= -1 + 2 + 5 - 6$
$= 0$

$\therefore \{x - (-1)\}$ অর্থাৎ $(x + 1)$, $f(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$
$= x^3 + x^2 + x^2 + x - 6x - 6$
$= x^2(x + 1) + x(x + 1) - 6(x + 1)$
$= (x + 1)(x^2 + x - 6)$
$= (x + 1)(x - 2)(x + 3)$

বহুপদীটির উৎপাদকগুলো হলো: $(x + 1)$, $(x - 2)$, $(x + 3)$

Ans. $(x + 1)(x - 2)(x + 3)$

প্রশ্ন ▶ ৫ $a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b)$ **একটি বীজগাণিতিক রাশি।**

ক. প্রদত্ত রাশিটিকে a এর বহুপদী P(a) বিবেচনা করে তাতে a এর পরিবর্তে b বসিয়ে P(b) নির্ণয় কর। ২

খ. সাধারণ পদ্ধতিতে রাশিটির উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ৪

গ. রাশিটির প্রকৃতি নির্ণয় কর এবং রাশিটিকে উৎপাদক উপপাদ্য অনুযায়ী উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ৪

◀ বাকি; পৃষ্ঠা-৫৫

৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত রাশি $= a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b)$

প্রশ্নমতে, $P(a) = a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b)$

$\therefore P(b) = b^3(b - c) + b^3(c - b) + c^3(b - b)$
$= b^3(b - c) - b^3(b - c)$
$= 0$ **(Ans.)**

খ এখানে, $a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b)$
$= a^3(b - c) + b^3c - ab^3 + c^3a - bc^3$
$= a^3(b - c) + b^3c - bc^3 - ab^3 + c^3a$
$= a^3(b - c) + bc(b^2 - c^2) - a(b^3 - c^3)$
$= (b - c)(a^3 + b^2c + bc^2 - ab^2 - abc - c^2a)$
$= (b - c)(b^2c - ab^2 + bc^2 - abc - c^2a + a^3)$
$= (b - c)\{b^2(c - a) + bc(c - a) - a(c^2 - a^2)\}$
$= (b - c)(c - a)(b^2 + bc - ca - a^2)$
$= (b - c)(c - a)(-a^2 + b^2 - ca + bc)$
$= (b - c)(c - a)\{-(a^2 - b^2) - c(a - b)\}$
$= (b - c)(c - a)(a - b)(-a - b - c)$
$= -(a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c)$ **(Ans.)**

গ যেহেতু, $P(b) = 0$ [ক থেকে]

$\therefore (a - b)$ প্রদত্ত রাশির একটি উৎপাদক।

এখানে, প্রদত্ত রাশিটি চক্র-ক্রমিক রাশি তাই $(b - c)$ এবং $(c - a)$ উভয়ে প্রদত্ত রাশিটির উৎপাদক। আবার প্রদত্ত রাশিটি চার মাত্রার সমমাত্রিক রাশি এবং $(a - b)(b - c)(c - a)$ তিন মাত্রার সমমাত্রিক রাশি। সুতরাং প্রদত্ত রাশির অপর উৎপাদকটি অবশ্যই চক্র-ক্রমিক এবং এক মাত্রার সমমাত্রিক রাশি হবে।

অর্থাৎ তা $k(a + b + c)$ হবে, যেখানে k একটি ধ্রুবক।

$\therefore a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b)$
$= k(a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c)$ ..... (i)

a, b, c এর সকল মানের জন্য (i) সত্য।

$\therefore$ (i) নং এ $a = 0, b = 1, c = 2$ বসিয়ে পাই, **(Ans.)**

$2 + 8(-1) = k(-1)(-1)(2)(3)$

বা, $-6 = 6k$

$\therefore k = -1$

(i) নং এ $k = -1$ বসিয়ে পাই,

$a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b)$
$= -(a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c)$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ৬ $a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b)$ **একটি বীজগাণিতিক রাশি এবং** $\frac{a^3 + a^2 + 1}{(a - b)(a - c)}$, $\frac{b^3 + b^2 + 1}{(b - c)(b - a)}$ **ও** $\frac{c^3 + c^2 + 1}{(c - a)(c - b)}$ **তিনটি মূলদ ভগ্নাংশ।**

◀ বাকি; পৃষ্ঠা-৫৫

ক. দেখাও যে, বীজগাণিতিক রাশিটি অপ্রতিসম। ২

খ. বীজগাণিতিক রাশিটি উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ৪

গ. মূলদ ভগ্নাংশগুলোর যোগফলের সরল মান কত? ৪

৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক বীজগাণিতিক রাশিটি হচ্ছে $a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b)$

রাশিটিতে a ও b স্থান বিনিময় করলে

$b^3(a - c) + a^3(c - b) + c^3(b - a)$ রাশি পাওয়া যায় যা পূর্বের রাশিটি থেকে ভিন্ন।

$\therefore$ রাশিটি অপ্রতিসম **(দেখানো হলো)**

খ প্রদত্ত রাশি $= a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b)$
$= a^3b - ca^3 + b^3c - ab^3 + c^3(a - b)$
$= a^3b - ab^3 - ca^3 + b^3c + c^3(a - b)$
$= ab(a^2 - b^2) - c(a^3 - b^3) + c^3(a - b)$
$= (a - b)\{ab(a + b) - c(a^2 + ab + b^2) + c^3\}$
$= (a - b)(a^2b + ab^2 - ca^2 - abc - b^2c + c^3)$
$= (a - b)\{a^2(b - c) + ab(b - c) - c(b^2 - c^2)\}$
$= (a - b)(b - c)(a^2 + ab - bc - c^2)$
$= (a - b)(b - c)(a^2 - c^2 + ab - bc)$
$= (a - b)(b - c)\{(a + c)(a - c) + b(a - c)\}$
$= (a - b)(b - c)(a - c)(a + c + b)$
$= -(a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c)$

Ans. $-(a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c)$

গ মূলদ ভগ্নাংশগুলোর যোগফল

$$= \frac{a^3 + a^2 + 1}{(a - b)(a - c)} + \frac{b^3 + b^2 + 1}{(b - c)(b - a)} + \frac{c^3 + c^2 + 1}{(c - a)(c - b)}$$

$$= \frac{a^3 + a^2 + 1}{-(a - b)(c - a)} + \frac{b^3 + b^2 + 1}{-(b - c)(a - b)} + \frac{c^3 + c^2 + 1}{-(c - a)(b - c)}$$

$$= \frac{(a^3 + a^2 + 1)(b - c) + (b^3 + b^2 + 1)(c - a) + (c^3 + c^2 + 1)(a - b)}{-(a - b)(b - c)(c - a)}$$

$$= \frac{\{a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b)\} + \{a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)\} + \{b - c + c - a + a - b\}}{-(a - b)(b - c)(c - a)}$$

কিন্তু এর লব, $a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b) = -(a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c)$; ['খ' থেকে পাই]

তদুপরি, $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b) = -(a - b)(b - c)(c - a)$

এবং $b - c + c - a + a - b = 0$

www.bdniyog.com

∴ যোগফল

$$= \frac{-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)}{-(a-b)(b-c)(c-a)} + \frac{-(a-b)(b-c)(c-a)}{-(a-b)(b-c)(c-a)} + 0$$

$$= a+b+c+1$$

Ans. $a+b+c+1$

প্রশ্ন ▶ ৭ চলক x এর তিনটি রাশি

x^3+x^2-6x, x^2+x-1 ও $x^2(x^2+1)^2$. ◀ কাজ: পৃষ্ঠা-৬১

ক. ১ম দুইটি রাশির সাহায্যে একটি প্রকৃত মূলদ ভগ্নাংশ ও শেষ দুইটি রাশির সাহায্যে একটি অপ্রকৃত মূলদ ভগ্নাংশ গঠন কর। ২

খ. 'ক' হতে প্রাপ্ত প্রকৃত মূলদ ভগ্নাংশটি আংশিক ভগ্নাংশে রূপান্তর কর। ৪

গ. তৃতীয় রাশিটির গুণাত্মক বিপরীত রাশিটিকে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ১ম দুইটি রাশির সাহায্যে একটি প্রকৃত মূলদ ভগ্নাংশ হলো: $\frac{x^2+x-1}{x^3+x^2-6x}$

শেষ দুইটি রাশির সাহায্যে একটি অপ্রকৃত মূলদ ভগ্নাংশ হলো: $\frac{x^2(x^2+1)^2}{x^2+x-1}$

খ 'ক' হতে পাই,

$$\frac{x^2+x-1}{x^3+x^2-6x} = \frac{x^2+x-1}{x(x^2+x-6)} = \frac{x^2+x-1}{x(x^2-2x+3x-6)}$$

$$= \frac{x^2+x-1}{x(x-2)(x+3)}$$

ধরি, $\frac{x^2+x-1}{x(x-2)(x+3)} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}$ .....(i)

উভয়পক্ষকে $x(x-2)(x+3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x^2+x-1 \equiv A(x-2)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x-2)$ .... (ii)

(ii) -এ $x=0$ বসিয়ে পাই,

$-1 = A.(-2).3.$

বা, $-6A = -1$

$\therefore A = \frac{1}{6}$

(ii) -এ $x=2$ বসিয়ে পাই,

$2^2+2-1 = A(2-2)(2+3) + B.2.(2+3) + C.2(2-2)$

বা, $4+2-1 = B.2.5$

বা, $10B = 5$

$\therefore B = \frac{1}{2}$

(ii) –এ $x=-3$ বসিয়ে পাই,

$(-3)^2+(-3)-1 = A(-3-2)(-3+3) + B.(-3)(-3+3) + C.(-3)(-3-2)$

বা, $9-3-1 = C.(-3)(-5).$

বা, $15C = 5$

$\therefore C = \frac{1}{3}$

এখন A, B ও C এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^2+x-1}{x(x-2)(x+3)} = \frac{\frac{1}{6}}{x} + \frac{\frac{1}{2}}{x-2} + \frac{\frac{1}{3}}{x+3}$$

$$= \frac{1}{6x} + \frac{1}{2(x-2)} + \frac{1}{3(x+3)}$$

∴ প্রদত্ত ভগ্নাংশটি আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করা হলো।

গ ৩য় রাশিটির গুণাত্মক বিপরীত রাশি হলো: $\frac{1}{x^2(x^2+1)^2}$

ধরি, $\frac{1}{x^2(x^2+1)^2} \equiv \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}$ .....(1)

এখন, উভয়পক্ষে $x^2(x^2+1)^2$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$1 = Ax(x^2+1)^2 + B(x^2+1)^2 + (Cx+D)x^2(x^2+1)$

$+ (Ex+F)x^2$ ..... (2)

(2) এর x^5, x^4, x^3, x^2, x এর সহগ এবং ধ্রুবক পদ সমীকৃত করিয়া পাই,

$A+C=0.$

$B+D=0$

$2A+C+E=0$

$2B+D+F=0$

$A=0$

$B=1$

$A+C=0$ তে $A=0$ বসিয়ে পাই, $C=0$

$B+D=0$ তে $B=1$ বসিয়ে পাই, $D=-1$

$2A+C+E=0$ তে $A=0, C=0$ বসিয়ে পাই, $E=0$

আবার, $2B+D+F=0$ তে $D=-1, B=1$ বসিয়ে পাই,

$2-1+F=0 \Rightarrow F=-1$

$\therefore A=0, B=1, C=0, D=-1, E=0, F=-1$

(1) এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{1}{x^2(x^2+1)^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{0-1}{x^2+1} + \frac{0-1}{(x^2+1)^2}$$

$= \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{(x^2+1)^2}$ যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

প্রশ্ন ▶ ৮ x চলক বিশিষ্ট দুইটি রাশি হলো: ◀ কাজ: পৃষ্ঠা-৬১

$\{(x^3-3x^2+4x-1)(x-2)+2x\}, (x-1)^3(x-2)$

ক. ১ম রাশিটিকে লব এবং দ্বিতীয় রাশিটিকে হর ধরে একটি মূলদীয় ভগ্নাংশ গঠন কর এবং এর প্রকৃতি নির্ধারণ কর। ২

খ. 'ক' হতে প্রাপ্ত ভগ্নাংশটিকে প্রকৃত ভগ্নাংশের যোগফল রূপে প্রকাশ কর। ৪

গ. প্রাপ্ত প্রকৃত ভগ্নাংশটিকে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক মূলদীয় ভগ্নাংশটি হলো: $\frac{(x^3-3x^2+4x-1)(x-2)+2x}{(x-1)^3(x-2)}$

প্রাপ্ত ভগ্নাংশটি একটি অপ্রকৃত ভগ্নাংশ।

কারণ, লব ও হরে x এর সর্বোচ্চ ঘাত সমান।

খ 'ক' হতে প্রাপ্ত ভগ্নাংশটি হচ্ছে,

$$\frac{(x^3-3x^2+4x-1)(x-2)+2x}{(x-1)^3(x-2)}$$

$$= \frac{(x^3-3x^2+3x-1+x)(x-2)+2x}{(x-1)^3(x-2)}$$

$$= \frac{(x^3-3x^2+3x-1)(x-2)+x(x-2)+2x}{(x-1)^3(x-2)}$$

$$= \frac{(x-1)^3(x-2)+x^2-2x+2x}{(x-1)^3(x-2)}$$

$$= \frac{(x-1)^3(x-2)}{(x-1)^3(x-2)} + \frac{x^2}{(x-1)^3(x-2)}$$

$$= 1 + \frac{x^2}{(x-1)^3(x-2)}$$

যেখানে, $\frac{x^2}{(x-1)^3(x-2)}$ একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ।

গ ধরি, $\frac{x^2}{(x-1)^3(x-2)} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{D}{x-2}$ .....(1)

www.bdniyog.com

(1) এর উভয় পক্ষকে $(x-1)^3(x-2)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x^2 \equiv A(x-1)^2(x-2) + B(x-1)(x-2) + C(x-2) + D(x-1)^3$ ..... (2)

(2) এ $x = 1$ বসিয়ে পাই,

$1 = C(1-2)$

বা, $-C = 1$

$\therefore C = -1$

(2) -এ $x = 2$ বসিয়ে পাই,

$4 = D(2-1)^3$

বা, $4 = D$

$\therefore D = 4$

x^3 ও x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$A + D = 0$

এবং $-4A + B - 3D = 1$

এখন, $A + D = 0$

বা, $A + 4 = 0$ [$\because D = 4$]

$\therefore A = -4$

$-4.(-4) + B - 3.4 = 1$.

বা, $16 + B - 12 = 1$

বা, $4 + B = 1$

বা, $B = 1 - 4$

$\therefore B = -3$

A, B, C ও D এর মান (1) এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^2}{(x-1)^3(x-2)} = \frac{-4}{x-1} + \frac{-3}{(x-1)^2} + \frac{-1}{(x-1)^3} + \frac{4}{x-2}$$

$$= -\frac{4}{x-1} - \frac{3}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{4}{x-2}$$

যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

Ans. $-\frac{4}{x-1} - \frac{3}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{4}{x-2}$.

মাস্টার ট্রেইনার প্রণীত আরও সৃজনশীল রচনামূলক প্রশ্ন

প্রশ্ন ▶ ৯ x, y ও z এর একটি বহুপদী হল,

$F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

[ইস্পাহানি পাবলিক স্কুল এন্ড কলেজ, চট্টগ্রাম; বিদ্যাময়ী গভঃ গার্লস হাই স্কুল, ময়মনসিংহ; জামালপুর সরকারী বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, জামালপুর]

ক. $F(a, b, c)$ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, এটি একটি চক্রক্রমিক ও প্রতিসম রাশি। ২

খ. দেখাও যে, $F(a, b, c) = \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\}$ ৪

গ. যদি $a = y + z - x$, $b = z + x - y$, $c = x + y - z$ হয়, তবে দেখাও যে, $F(a, b, c) = 4F(x, y, z)$ ৪

৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

$\therefore F(a, b, c) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

এখন, $F(b, c, a) = b^3 + c^3 + a^3 - 3bca = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$F(b, a, c) = b^3 + a^3 + c^3 - 3bac = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$\therefore F(a, b, c) = F(b, c, a) = F(b, a, c)$

অর্থাৎ, $F(a, b, c)$ একটি চক্র-ক্রমিক ও প্রতিসম রাশি।

খ 'ক' হতে পাই, $F(a, b, c) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

$= (a+b)^3 - 3ab(a+b) + c^3 - 3abc$

$= (a+b)^3 + c^3 - 3ab(a+b+c)$

$= (a+b+c)\{(a+b)^2 - (a+b)c + c^2\} - 3ab(a+b+c)$

$= (a+b+c)(a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc + c^2) - 3ab(a+b+c)$

$= (a+b+c)(a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc + c^2 - 3ab)$

$= (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

$= \frac{1}{2}(a+b+c)(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca)$

$= \frac{1}{2}(a+b+c)(a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + c^2 - 2ca + a^2)$

$= \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\}$

$\therefore F(a, b, c) = \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\}$

(দেখানো হলো)

গ 'খ' হতে পাই,

$F(a, b, c) = \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\}$

দেওয়া আছে, $a = y + z - x$, $b = z + x - y$, $c = x + y - z$

$\therefore a + b + c = y + z - x + z + x - y + x + y - z = x + y + z$

এখন, $(a-b)^2 = (y + z - x - z - x + y)^2$

$= (2y - 2x)^2$

$= \{-2(x-y)\}^2$

$= 4(x-y)^2$

$(b-c)^2 = (z + x - y - x - y + z)^2$

$= (2z - 2y)^2$

$= \{-2(y-z)\}^2$

$= 4(y-z)^2$

এবং $(c-a)^2 = (x + y - z - y - z + x)^2$

$= (2x - 2z)^2$

$= \{-2(z-x)\}^2$

$= 4(z-x)^2$

$\therefore F(a, b, c) = \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\}$

$= \frac{1}{2}(x+y+z)\{4(x-y)^2 + 4(y-z)^2 + 4(z-x)^2\}$

$= 4 \times \frac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\}$

$= 4(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$

$= 4F(x, y, z)$

অর্থাৎ, $F(a, b, c) = 4F(x, y, z)$ (দেখানো হলো)

প্রশ্ন ▶ ১০ $F(a, b, c) = (a+b)(b+c)(c+a)$

এবং $(a+b+c)(ab+bc+ca) = abc$ হলে,

ক. দেখাও যে, $F(a, b, c)$ একটি চক্রক্রমিক রাশি। ২

খ. প্রমাণ কর যে, $F(a, b, c) = 0$. ৪

গ. দেখাও যে, $(a+b+c)^5 = a^5 + b^5 + c^5$ ৪

১০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$F(a, b, c) = (a+b)(b+c)(c+a)$

এখন, $F(b, c, a) = (b+c)(c+a)(a+b) = F(a, b, c)$

অর্থাৎ, $F(a, b, c)$ একটি চক্রক্রমিক রাশি। (দেখানো হলো)

www.bdniyog.com

ঘ বামপক্ষ = F(a, b, c)
= (a + b) (b + c) (c + a)
= (ab + ac + b^2 + bc) (c + a)
= abc + a^2b + ac^2 + a^2c + b^2c + b^2a + bc^2 + abc + abc − abc
= a^2b + abc + a^2c + ab^2 + abc + b^2c + abc + bc^2 + c^2a − abc
= a(ab + bc + ca) + b(ab + bc + ca) + c(ab + bc + ca) − abc
= (a + b + c) (ab + bc + ca) − abc
= abc − abc [∵(a + b + c) (ab + bc + ca) = abc]
= 0
= ডানপক্ষ

∴ F(a, b, c) = 0 **(প্রমাণিত)**

গ 'খ' হতে পাই,
F(a, b, c) = 0
∴ (a + b) (b + c) (c + a) = 0
∴ a + b = 0 অথবা (b + c) (c + a) = 0
∴ a = −b অথবা b + c = 0 অথবা c + a = 0
∴ a = −b অথবা b = −c অথবা c = −a
দেখাতে হবে যে, $(a + b + c)^5 = a^5 + b^5 + c^5$
a = −b হলে,
বামপক্ষ = $(-b + b + c)^5 = c^5$
এবং ডানপক্ষ = $(-b)^5 + b^5 + c^5 = c^5$
আবার, b = − c হলে,
বামপক্ষ = $(a - c + c)^5 = a^5$
এবং ডানপক্ষ = $a^5 + (-c)^5 + c^5 = a^5$
এবং c = −a হলে,
বামপক্ষ = $(a + b - a)^5 = b^5$
এবং ডানপক্ষ = $a^5 + b^5 + (-a)^5 = b^5$
অর্থাৎ, $(a + b + c)^5 = a^5 + b^5 + c^5$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ১১ $p(x) = x^3 + 5x^2 + 6x + 8$.

ক. p(x)-কে (x − a) ও (x − b) দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে? ২

খ. p(a)-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ৪

গ. যদি p(a) = p(b) হয়, তবে প্রমাণ কর যে,
$a^2 + b^2 + ab + 5a + 5b + 6 = 0$, যেখানে, a ≠ b. ৪

১১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $p(x) = x^3 + 5x^2 + 6x + 8$
p(x)-কে (x − a) দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে p(a)
∴ $p(a) = a^3 + 5a^2 + 6a + 8$
আবার, p(x)-কে (x − b) দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে p(b).
∴ $p(b) = b^3 + 5b^2 + 6b + 8$

গ 'ক' হতে পাই,
$p(a) = a^3 + 5a^2 + 6a + 8$
$p(-4) = (-4)^3 + 5(-4)^2 + 6(-4) + 8$
= −64 + 5(16) − 24 + 8
= −64 + 80 − 24 + 8
= 88 − 88
= 0
∴ a − (−4) = a + 4, p(a) এর একটি উৎপাদক
এখন, $a^3 + 5a^2 + 6a + 8$
$= a^3 + 4a^2 + a^2 + 4a + 2a + 8$
$= a^2(a + 4) + a(a + 4) + 2(a + 4)$
$= (a + 4)(a^2 + a + 2)$ **(Ans.)**

গ যেহেতু p(a) = p(b)
বা, $a^3 + 5a^2 + 6a + 8 = b^3 + 5b^2 + 6b + 8$ ['ক' হতে]
বা, $a^3 - b^3 + 5a^2 - 5b^2 + 6a - 6b + 8 - 8 = 0$
বা, $(a - b)(a^2 + ab + b^2) + 5(a^2 - b^2) + 6(a - b) = 0$
বা, $(a - b)(a^2 + ab + b^2) + 5(a + b)(a - b) + 6(a - b) = 0$
বা, $(a - b)(a^2 + ab + b^2 + 5a + 5b + 6) = 0$
∴ $a^2 + b^2 + ab + 5a + 5b + 6 = 0$ [∵ a ≠ b] **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ১২ চলক x-এর একটি বহুপদী $p(x) = 7x^2 - 3x + 4x^4 + 12x^3 - 2$

ক. বহুপদীর আদর্শ রূপটি লিখ এবং মুখ্য সহগ নির্ণয় কর। ২

খ. দেখাও যে, p(−1) = 0 এবং (x + 1) দ্বারা p(x) কে ভাগ করে ভাগশেষ উপপাদ্যের সত্যতা যাচাই কর। ৪

গ. p(x)-কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ৪

১২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $p(x) = 7x^2 - 3x + 4x^4 + 12x^3 - 2$
বহুপদীটির আদর্শরূপ : $p(x) = 4x^4 + 12x^3 + 7x^2 - 3x - 2$
যার মুখ্যপদ $4x^4$ এবং মুখ্যসহগ 4

খ 'ক' হতে পাই,
$p(x) = 4x^4 + 12x^3 + 7x^2 - 3x - 2$
$p(-1) = 4(-1)^4 + 12(-1)^3 + 7(-1)^2 - 3(-1) - 2$
= 4 − 12 + 7 + 3 − 2
= 14 − 14
= 0
∴ p(−1) = 0 **(দেখানো হলো)**
এখন, ভাগশেষ উপপাদ্য অনুসারে p(x) কে x + 1 দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে p(−1).
আবার, (x + 1) দ্বারা p(x) কে ভাগ করে পাই,

$$\begin{array}{r|l} x+1 & 4x^4 + 12x^3 + 7x^2 - 3x - 2 \\ & \underline{4x^4 + 4x^3} \\ & \quad 8x^3 + 7x^2 \\ & \quad \underline{8x^3 + 8x^2} \\ & \qquad -x^2 - 3x \\ & \qquad \underline{-x^2 - x} \\ & \qquad\quad -2x - 2 \\ & \qquad\quad \underline{-2x - 2} \\ & \qquad\quad\quad 0 \end{array} \quad \Big| \; 4x^3 + 8x^2 - x - 2$$

যেহেতু (x + 1) দ্বারা p(x) কে ভাগ করলে ভাগশেষ হয় 0 এবং p(−1) = 0, সেহেতু ভাগশেষ উপপাদ্যের সত্যতা যাচাই হলো।

গ 'খ' হতে পাই,
(x + 1) দ্বারা p(x) কে ভাগ করলে ভাগশেষ হয় 0।
∴ (x + 1), p(x)- এর একটি সাধারণ উৎপাদক।
$4x^4 + 12x^3 + 7x^2 - 3x - 2$
$= 4x^4 + 4x^3 + 8x^3 + 8x^2 - x^2 - x - 2x - 2$
$= 4x^3(x + 1) + 8x^2(x + 1) - x(x + 1) - 2(x + 1)$
$= (x + 1)(4x^3 + 8x^2 - x - 2)$
ধরি, $Q(x) = 4x^3 + 8x^2 - x - 2$
Q(x) এর ধ্রুব পদ −2 এর উৎপাদকসমূহের সেট $F_1 = \{1, -1, 2, -2\}$
Q(x) এর মুখ্য পদ 4 এর উৎপাদক সমূহের সেট
$F_2 = \{1, -1, 2, -2, 4, -4\}$
∴ $Q(1) = 4.1^3 + 8.1^2 - 1 - 2 = 9 \neq 0$
$Q(-1) = 4.(-1)^3 + 8(-1)^2 - (-1) - 2 = 3 \neq 0$
$Q(2) = 4.2^3 + 8.2^2 - 2 - 2 = 60 \neq 0$
$Q(-2) = 4.(-2)^3 + 8.(-2)^2 - (-2) - 2 = 0$

www.bdniyog.com

$\therefore (x+2)$, $Q(x)$ এর একটি উৎপাদক।

$\therefore (x+1)(4x^3+8x^2-x-2)$

$=(x+1)\{4x^2(x+2)-1(x+2)\}$

$=(x+1)(x+2)(4x^2-1)$

$=(x+1)(x+2)\{(2x)^2-(1)^2\}$

$=(x+1)(x+2)(2x+1)(2x-1)$ (Ans.)

প্রশ্ন ▶ ১৩ $\frac{x^3+2x^2+1}{x^2+2x-3}$ একটি বীজগাণিতিক ভগ্নাংশ।

[নাটোর সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়, নাটোর; চট্টগ্রাম সিটি কর্পোরেশন আন্তঃবিদ্যালয়]

ক. ভগ্নাংশটির প্রকৃতি নির্ধারণ কর। ২

খ. ভগ্নাংশটির হরকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর এবং ভগ্নাংশটি থেকে একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ পৃথক কর। ৪

গ. ভগ্নাংশটিকে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

১৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\frac{x^3+2x^2+1}{x^2+2x-3}$

প্রদত্ত ভগ্নাংশটি একটি অপ্রকৃত ভগ্নাংশ।

কারণ লবের মাত্রা 3, হরের মাত্রা 2 এর চেয়ে বড়।

খ এখানে, x^2+2x-3

$=x^2+3x-x-3$

$=x(x+3)-1(x+3)$

$=(x+3)(x-1)$ (Ans.)

এখন, $\frac{x^3+2x^2+1}{x^2+2x-3}$

$=\frac{x(x^2+2x-3)+3x+1}{x^2+2x-3}$

$=\frac{x(x^2+2x-3)}{(x^2+2x-3)}+\frac{3x+1}{x^2+2x-3}$

$=x+\frac{3x+1}{x^2+2x-3}$

$=x+\frac{3x+1}{(x+3)(x-1)}$ (Ans.)

এখানে, $\frac{3x+1}{(x+3)(x+1)}$ একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ।

গ 'খ' হতে পাই, $\frac{x^3+2x^2+1}{x^2+2x-3}=x+\frac{3x+1}{(x+3)(x-1)}$

এখানে, $\frac{3x+1}{(x+3)(x-1)}$ একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ।

ধরি, $\frac{3x+1}{(x+3)(x-1)}\equiv\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-1}$ ..... (1)

সমীকরণ (1) এর উভয়পক্ষকে $(x+3)(x-1)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$3x+1\equiv A(x-1)+B(x+3)$ ..... (2)

সমীকরণ (2) এর উভয়পক্ষকে $x=1$ বসিয়ে পাই,

$3.1+1=A(1-1)+B(1+3)$

বা, $3+1=A\times0+B.4$

বা, $4=4B$

$\therefore B=1$

আবার, সমীকরণ (2) এর উভয়পক্ষকে $x=-3$ বসিয়ে পাই,

$3(-3)+1=A(-3-1)+B(-3+3)$

বা, $-9+1=A(-4)+B\times0$

বা, $-8=-4A$

$\therefore A=2$

A ও B এর মান সমীকরণ (1)-এ বসিয়ে পাই,

$\frac{3x+1}{(x+3)(x-1)}=\frac{2}{x+3}+\frac{1}{x-1}$

নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ,

$\frac{x^3+2x^2+1}{x^2+2x-3}=x+\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+3}$ (Ans.)

প্রশ্ন ▶ ১৪ $P(x)=2x^4-6x^3+3x-4$ একটি x চলকের বহুপদী।

ক. বহুপদীটিতে x এর সর্বনিম্ন ঘাত বিশিষ্ট পদ কোনটি? এবং ঐ পদে x এর ঘাত কত? ২

খ. $P(x)$ কে $2x+1$ দ্বারা ভাগ করে ভাগফল নির্ণয় কর। ৪

গ. $P(x)$ কে $2x+1$ দ্বারা ভাগ করে প্রাপ্ত ভাগশেষকে ভাগশেষ উপপাদ্যের সাহায্যে বের কর এবং দেখাও যে, ভাজ্য = ভাজক × ভাগফল + ভাগশেষ। ৪

১৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক বহুপদীটিতে x এর সর্বনিম্ন ঘাত বিশিষ্ট পদটি হল 4 এবং ঐ পদে x এর ঘাত হলো 0.

খ

$2x+1)\ 2x^4-6x^3+3x-4\ (x^3-\frac{7}{2}x^2+\frac{7}{4}x+\frac{5}{8}$

$2x^4+x^3$

$-7x^3+3x$

$-7x^3-\frac{7}{2}x^2$

$\frac{7}{2}x^2+3x$

$\frac{7}{2}x^2+\frac{7}{4}x$

$\frac{5}{4}x-4$

$\frac{5}{4}x+\frac{5}{8}$

$-\frac{37}{8}$

গ ভাগশেষ উপপাদ্য অনুসারে, $P(x)$ কে $2x+1$ দ্বারা ভাগ করলে প্রাপ্ত ভাগশেষ হবে $P\left(-\frac{1}{2}\right)$

$\therefore P\left(-\frac{1}{2}\right)=2\left(-\frac{1}{2}\right)^4-6\left(-\frac{1}{2}\right)^3+3\left(-\frac{1}{2}\right)-4$

$=2.\frac{1}{16}+6.\frac{1}{8}-\frac{3}{2}-4$

$=\frac{1+6-12-32}{8}$

$=-\frac{37}{8}$

এখানে, ভাজক $=2x+1$

ভাগফল $=x^3-\frac{7}{2}x^2+\frac{7}{4}x+\frac{5}{8}$

ভাজ্য $=2x^4-6x^3+3x-4$ এবং ভাগশেষ $=-\frac{37}{8}$

এখন, ভাজক × ভাগফল + ভাগশেষ

$=(2x+1)\times\left(x^3-\frac{7}{2}x^2+\frac{7}{4}x+\frac{5}{8}\right)-\frac{37}{8}$

$=2x^4-7x^3+\frac{7}{2}x^2+\frac{5}{4}x+x^3-\frac{7}{2}x^2+\frac{7}{4}x+\frac{5}{8}-\frac{37}{8}$

$=2x^4-6x^3+3x-4$

= ভাজ্য

$\therefore$ ভাজ্য = ভাজক × ভাগফল + ভাগশেষ (দেখানো হলো)

www.bdniyog.com

প্রশ্ন ▶ ১৫ $P_1(x) = 0$, $P_2(x) = 7x^2 - 3x + 4x^4 - a + 12x^3 + 1$ এবং $P_3(x) = x^5 + ax^{-3}$ (যেখানে a ধ্রুবক)

ক. ওপরের কোনগুলো বহুপদী? সর্বোচ্চ ঘাত বিশিষ্ট বহুপদি কোনটি? ২

খ. $P_2(x)$ কে আদর্শরূপে প্রকাশ কর। $(x + 2)$ উক্ত বহুপদীটির একটি উৎপাদক হলে a এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $(x - b)$ এবং $(x - c)$ উভয়ই $P_2(x)$ এর উৎপাদক হলে এবং $b \neq c$ হলে দেখাও যে,
$4(b^3 + b^2c + bc^2 + c^3) + 12(b^2 + bc + c^2) + 7(b + c) = 3$ ৪

১৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক বহুপদীগুলো হলো:
$P_1(x) = 0$ এবং $P_2(x) = 7x^2 - 3x + 4x^4 - a + 12x^3 + 1$
সর্বোচ্চ ঘাতবিশিষ্ট বহুপদীটি হলো—
$P_2(x) = 7x^2 - 3x + 4x^4 - a + 12x^3 + 1$

খ $P_2(x)$-এর আদর্শরূপ: $4x^4 + 12x^3 + 7x^2 - 3x - a + 1$.
∵ $(x + 2)$, $P_2(x)$ এর একটি উৎপাদক
∴ $P_2(-2) = 0$ হবে।
বা, $P_2(-2) = 4(-2)^4 + 12(-2)^3 + 7(-2)^2 - 3(-2) - a + 1 = 3 - a$
শর্তানুসারে, $3 - a = 0$
∴ $a = 3$

গ ∵ $(x - b)$, $P_2(x)$ এর একটি উৎপাদক
∴ ভাগশেষ, উপপাদ্য অনুসারে $P_2(b) = 0$
আবার, $(x - c)$, $P_2(x)$ এর একটি উৎপাদক
$P_2(c) = 0$
$P_2(b) = P_2(c)$
বা, $4b^4 + 12b^3 + 7b^2 - 3b - a + 1 = 4c^4 + 12c^3 + 7c^2 - 3c - a + 1$
বা, $4(b^4 - c^4) + 12(b^3 - c^3) + 7(b^2 - c^2) - 3(b - c) = 0$
বা, $4(b^2 + c^2)(b + c)(b - c) + 12(b - c)(b^2 + bc + c^2) + 7(b + c)(b - c) - 3(b - c) = 0$
বা, $(b - c)\{(4b + 4c)(b^2 + c^2) + 12b^2 + 12bc + 12c^2 + 7b + 7c - 3\} = 0$
বা, $(b - c)(4b^3 + 4bc^2 + 4b^2c + 4c^3 + 12b^2 + 12bc + 12c^2 + 7b + 7c - 3) = 0$
বা, $(b - c)(4b^3 + 4c^3 + 4b^2c + 4bc^2 + 12b^2 + 12bc + 12c^2 + 7b + 7c - 3) = 0$
$(b - c) \neq 0$,
কেননা যদি $b - c = 0$ হয় তবে $b = c$ হবে কিন্তু প্রশ্নমতে $b \neq c$
$4b^3 + 4c^3 + 4b^2c + 4bc^2 + 12b^2 + 12bc + 12c^2 + 7b + 7c - 3 = 0$
বা, $4(b^3 + b^2c + bc^2 + c^3) + 12(b^2 + bc + c^2) + 7(b + c) = 3$
(দেখানো হলো)

প্রশ্ন ▶ ১৬ $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ ও $Q(x) = -6x^3 - 5x^2 + 2x + 1$ হলো দুইটি বহুপদী যাদের চলক x.

ক. $P\left(\frac{1}{r}\right)$ নির্ণয় কর যখন $(r \neq 0)$। ২

খ. $P(x)$ ও $Q(x)$ এর সাধারণ উৎপাদকটি নির্ণয় কর। ৪

গ. $(x - r)$, $Q(x)$ এর একটি উৎপাদক হলে দেখাও যে, $\left(x - \frac{1}{r}\right)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক হবে। ৪

১৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

∴ $P\left(\frac{1}{r}\right) = \left(\frac{1}{r}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{r}\right)^2 - 5\left(\frac{1}{r}\right) - 6$
$= \frac{1}{r^3} + \frac{2}{r^2} - \frac{5}{r} - 6$
$= \frac{1 + 2r - 5r^2 - 6r^3}{r^3}$
$= \frac{-6r^3 - 5r^2 + 2r + 1}{r^3}$

খ $P(2) = 2^3 + 2.2^2 - 5.2 - 6 = 0$.
∴ ভাগশেষ উপপাদ্য অনুসারে, $(x - 2)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক হবে।
∴ $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$
$= x^3 - 2x^2 + 4x^2 - 8x + 3x - 6$
$= x^2(x - 2) + 4x(x - 2) + 3(x - 2)$
$= (x - 2)(x^2 + 4x + 3)$
$= (x - 2)(x^2 + x + 3x + 3)$
$= (x - 2)\{x(x + 1) + 3(x + 1)\}$
$= (x - 2)(x + 1)(x + 3)$
এখন $Q(-1) = -6(-1)^3 - 5(-1)^2 + 2(-1) + 1$
$= 6 - 5 - 2 + 1 = 0$
∴ $(x + 1)$, $Q(x)$ এর একটি উৎপাদক হবে।
∴ $-6x^3 - 5x^2 + 2x + 1$
$= -6x^3 - 6x^2 + x^2 + x + x + 1$
$= -6x^2(x + 1) + x(x + 1) + 1(x + 1)$
$= (x + 1)(-6x^2 + x + 1)$
∴ $P(x)$ এর উৎপাদকে বিশ্লেষিত রূপ $(x - 2)(x + 1)(x + 3)$ এবং $Q(x)$-এর উৎপাদকে বিশ্লেষিত রূপ: $(x + 1)(-6x^2 + x + 1)$
∴ $P(x)$ ও $Q(x)$ এর সাধারণ উৎপাদকটি হলো $(x + 1)$ (Ans.)

গ ∵ $(x - r)$, $Q(x)$-এর একটি উৎপাদক
∴ ভাগশেষ উপপাদ্য অনুসারে, $Q(r) = 0$
$Q(r) = -6r^3 - 5r^2 + 2r + 1$
প্রশ্নমতে, $-6r^3 - 5r^2 + 2r + 1 = 0$ ..... (i)
এখন $\left(x - \frac{1}{r}\right)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক হবে যদি $P\left(\frac{1}{r}\right) = 0$ হয়।
এখন, $P\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r^3} + 2.\frac{1}{r^2} - 5.\frac{1}{r} - 6$
$= \frac{-6r^3 - 5r^2 + 2r + 1}{r^3}$
$= \frac{0}{r^3}$ [(i) নং সমীকরণ ব্যবহার করে]
$= 0$
∵ $P\left(\frac{1}{r}\right) = 0$ সুতরাং $\left(x - \frac{1}{r}\right)$; $P(x)$ এর একটি উৎপাদক হবে।
(দেখানো হলো)

প্রশ্ন ▶ ১৭ $P(x) = x^3 + h_1x^2 + k_1x - 6$ এবং $Q(x) = (a_2 - 2)x^3 + (h_2 + 1)x^2 + (k_2 - 1)x + c_2 + 2$ হলো দুইটি x চলকের বহুপদী।

ক. $P(-3)$ ও $P(2)$ নির্ণয় কর। ২

খ. $P(-3)$ ও $P(2)$ এর সাংখ্যিক মান 0 হলে h_1, k_1 এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $P(x) = Q(x)$ হলে এবং $P(-3)$ ও $P(2)$ এর সাংখ্যিক মান 0 হলে দেখাও যে, $a_2 + h_2 - k_2 + c_2 = 0$ ৪

১৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $P(-3) = (-3)^3 + h_1(-3)^2 + k_1(-3) - 6$
$= -33 + 9h_1 - 3k_1$
$P(2) = (2)^3 + h_1(2)^2 + k_1(2) - 6$
$= 4h_1 + 2k_1 + 2$

www.bdniyog.com

খ প্রশ্নমতে, $9h_1 - 3k_1 - 33 = 0$

বা, $9h_1 - 3k_1 = 33$ ..... (1)

এবং $4h_1 + 2k_1 + 2 = 0$

বা, $4h_1 + 2k_1 = -2$ ..... (2)

(1) নং 2 দ্বারা ও (2)নং কে 3 দ্বারা গুণ করে প্রাপ্ত গুণফলদ্বয় যোগ করে পাই,

$30h_1 = 60 \quad \therefore h_1 = 2$

h_1 এর মান (2) নং এ বসিয়ে পাই,

$4.2 + 2k_1 = -2$

বা, $2k_1 = -10 \quad \therefore k_1 = -5$

$\therefore h_1 = 2, k_1 = -5$ **(Ans.)**

গ $\because P(x) = Q(x)$

$\therefore x^3 + h_1x^2 + k_1x - 6 = (a_2 - 2)x^3 + (h_2 + 1)x^2 + (k_2 - 1)x + c_2 + 2$ ..... (1)

আমরা জানি,

সমান চিহ্নের উভয় পক্ষে x এর একই ঘাতযুক্ত সহগদ্বয় পরস্পর সমান।

$\therefore a_2 - 2 = 1$ [(1)-নং অনুসারে x^3 এর সহগ]

বা, $a_2 = 3$

আবার সমান চিহ্নের উভয় পক্ষে x^2 এর সহগ সমান বলে,

$h_1 = h_2 + 1$

বা, $2 = h_2 + 1$ ['খ' হতে পাই, $h_1 = 2$]

$\therefore h_2 = 1$

আবার সমান চিহ্নের উভয় পক্ষে x এর সহগ সমান বলে,

$k_1 = k_2 - 1$

বা, $-5 = k_2 - 1$ ['খ' হতে পাই, $k_1 = -5$]

$\therefore k_2 = -4$

আবার সমান চিহ্নের উভয় পক্ষে x^0 এর সহগ সমান বলে,

$-6 = c_2 + 2$

$\therefore c_2 = -8$

বামপক্ষ $= a_2 + h_2 - k_2 + c_2 = 3 + 1 - (-4) - 8$

$= 8 - 8 = 0 =$ ডানপক্ষ

$\therefore a_2 + h_2 - k_2 + c_2 = 0$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ১৮ $P(x, y) = 8x^3 + y^3 + 7x^2y^2 - 4x^1 + 2y - 17$ এবং $Q(x) = x^3 + k$ **হল যথাক্রমে দুইটি বহুপদী।**

ক. দুই চলক বিশিষ্ট বহুপদীটি কি সমমাত্রিক? তোমার উত্তরের স্বপক্ষে যুক্তি দাও এবং বহুপদীটির মাত্রা নির্ণয় কর। ২

খ. $P(1, 2) = Q(3)$ হলে k এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $P(1,2) = Q(3)$ হলে, $P(x, y)$ ও $Q(x)$ বহুপদী দুইটি ব্যবহার করে প্রমাণ কর যে, দুইটি বহুপদীর যোগফল, বিয়োগফল এবং গুণফল বহুপদী হয়। কিন্তু ভাগফল বহুপদী হতেও পারে আবার নাও হতে পারে। ৪

১৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দুই চলক বিশিষ্ট বহুপদীটির প্রত্যেক পদের মাত্রা একই নয়। যেমন–

$8x^3$ পদটির মাত্রা 3

আবার $7x^2y^2$ পদটির মাত্রা 4

সুতরাং বহুপদীটি সমমাত্রিক নয়।

বহুপদীটিতে সর্বোচ্চ মাত্রাবিশিষ্ট পদ $7x^2y^2$ যার মাত্রা 4. সুতরাং বহুপদীটির মাত্রা 4.

গ প্রশ্নমতে, $P(1, 2) = Q(3)$

বা, $8(1)^3 + (2)^3 + 7(1)^2(2)^2 - 4(1)^2 + 2.2 - 17 = 3^3 + k$

বা, $16 + 28 - 4 + 4 - 17 = 3^3 + k$

বা, $27 = 3^3 + k$

$\therefore k = 0$ **(Ans.)**

গ আমরা জানি, $P(1, 2) = Q(3)$ হলে $k = 0$

$\therefore P(x , y) = 8x^3 + y^3 + 7x^2y^2 - 4x^2 + 2y - 17$

$Q(x) = x^3$

বহুপদী দুইটির যোগফল $= 8x^3 + y^3 + 7x^2y^2 - 4x^2 + 2y - 17 + x^3$

$= 9x^3 + y^3 + 7x^2y^2 - 4x^2 + 2y - 17$ যা একটি বহুপদী।

বহুপদী দুইটির বিয়োগফল

$= 8x^3 + y^3 + 7x^2y^2 - 4x^2 + 2y - 17 - x^3$

$= 7x^3 + y^3 + 7x^2y^2 - 4x^2 + 2y - 17$

বহুপদী দুইটির গুণফল $= (8x^3 + y^3 + 7x^2y^2 - 4x^2 + 2y - 17)\, x^3$

$= 8x^6 + x^3y^3 + 7x^5y^2 - 4x^5 + 2x^3y - 17x^3$, যা একটি বহুপদী

বহুপদী দুইটির ভাগফল $= (8x^3 + y^3 + 7x^2y^2 - 4x^2 + 2y - 17) \div x^3$

$= 8 + y^3x^{-3} + 7x\ ^1y^2 - 4x^{-1} + 2yx^{-3} + 7x^{-3}$

যা বহুপদী নয়। কেননা, বহুপদীতে প্রত্যেক পদে x এর ঘাত অঋণাত্মক হবে।

কিন্তু দুইটি বহুপদীর ভাগফলও বহুপদী হতে পারে যেমন $P(x,y) = 8x^3 + 7x^2y^2 - 4x^2 + 3x$ এবং $Q(x) = x$ হলে তাদের ভাগফল–

$(8x^3 + 7x^2y^2 - 4x^2 + 3x) \div x$

$= 8x^2 + 7xy^2 - 4x + 3$, যা একটি বহুপদী।

সুতরাং দুইটি বহুপদীর যোগফল, বিয়োগফল এবং গুণফল সবসময় বহুপদী হয়। কিন্তু ভাগফল বহুপদী হতেও পারে আবার নাও হতে পারে। **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ১৯ $(b + c) + (c + a)\, (a + b) + abc$ **একটি বীজগণিতীয় রাশি। রাশিটির উৎপাদকে বিশ্লেষিত রূপ E.**

ক. রাশিটি কি প্রতিসম? তোমার উত্তরের স্বপক্ষে যুক্তি দাও। ২

খ. E নির্ণয় কর। ৪

গ. $E = abc$ হলে দেখাও যে, $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3$. ৪

১৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক রাশিটি প্রতিসম।

কেননা রাশিটিতে যেকোন দুইটি চলক যেমন (a, b) স্থান বিনিময় করলে প্রাপ্ত রাশি

$(a + c)\, (c + b)\, (b + a) + bac$

$= (a + b)\, (b + c)\, (c + a) + abc$ হয়

অর্থাৎ রাশিটি অপরিবর্তিত থাকে। সুতরাং রাশিটি প্রতিসম।

খ রাশিটিকে a এর বহুপদী P(a) বিবেচনা করে তাতে a এর পরিবর্তে $-b - c$ বসিয়ে পাই,

$P\{-(b + c)\} = (b + c)\, (c - b - c)\, (-b - c + b) + (-b - c)\, bc$

$= bc\, (b + c) - bc\, (b + c) = 0$

সুতরাং উৎপাদক উপপাদ্য অনুসারে, $(a + b + c)$ প্রদত্ত রাশির একটি উৎপাদক। প্রদত্ত রাশিটি তিনমাত্রার সমমাত্রিক চক্রক্রমিক বহুপদী এবং এর এক মাত্রার একটি উৎপাদক পাওয়া গেছে। সুতরাং অপর উৎপাদক দুই মাত্রার সমমাত্রিক চক্রক্রমিক বহুপদী হবে, অর্থাৎ

$k(a^2 + b^2 + c^2) + m(bc + ca + ab)$ আকারের হবে, যেখানে k ও m ধ্রুবক।

$\therefore (b + c)\, (c + a)\, (a + b) + abc = (a + b + c)\, \{k(a^2 + b^2 + c^2) + m(bc + ca + ab)\}$ ..... (i)

a, b, c এর সকল মানের জন্য (i) সত্য।

(i) নং এ প্রথমে $a = 0, b = 0, c = 1$ এবং পরে $a = 1, b = 1, c = 0$ বসিয়ে যথাক্রমে পাই $k = 0$ এবং $2 = 2(k \times 2 + m)$

$\therefore k = 0, m = 1$

k ও m এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$(b + c)\, (c + a)\, (a + b) + abc = (a + b + c)\, (bc + ca + ab)$

$\therefore E = (a + b + c)\, (bc + ca + ab)$.

www.bdniyog.com

গ ∵ রাশিটির উৎপাদক বিশ্লেষিত রূপ E

∴ $(b+c)(c+a)(a+b)+abc=E$

বা, $(b+c)(c+a)(a+b)+abc=abc$ [প্রশ্নমতে $E=abc$]

বা, $(b+c)(c+a)(a+b)=0$ ..... (ii)

এখন,

বামপক্ষ $= H.S=(a+b+c)^3$

$=\{(a+b)+c\}^3$

$=(a+b)^3+c^3+3(a+b)c.(a+b+c)$

$=a^3+b^3+3ab(a+b)+c^3+3(a+b)c.(a+b+c)$

$=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(ab+ca+bc+c^2)$

$=a^3+b^3+c^3+3(a+b)\{a(b+c)+c(b+c)\}$

$=a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$

$=a^3+b^3+c^3+3.0$ [(ii)-নং ব্যবহার করে]

$=a^3+b^3+c^3=$ ডানপক্ষ

∴ $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3$ (দেখানো হলো)

প্রশ্ন ▶ ২০ $x+3$ ও $x^4-x^3-6x^2$ দুইটি বীজগণিতীয় রাশি।

ক. রাশি দুইটির সাহায্যে একটি প্রকৃত মূলদ ভগ্নাংশ এবং একটি অপ্রকৃত মূলদ ভগ্নাংশ গঠন কর। ২

খ. ২য় রাশিটিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ৪

গ. রাশি দুইটির সাহায্যে গঠিত প্রকৃত মূলদ ভগ্নাংশটিকে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

২০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রকৃত মূলদ ভগ্নাংশ: $\frac{x+3}{x^4-x^3-6x^2}$

অপ্রকৃত মূলদ ভগ্নাংশ: $\frac{x^4-x^3-6x^2}{x+3}$

খ ২য় রাশিটি হলো, $x^4-x^3-6x^2=x^2(x^2-x-6)$

এখন, $x^2-x-6=x^2-3x+2x-6$

$=x(x-3)+2(x-3)$

$=(x-3)(x+2)$

∴ ২য় রাশিটির উৎপাদকে বিশ্লেষিত রূপ: $x^2(x-3)(x+2)$

গ গঠিত প্রকৃত মূলদ ভগ্নাংশ $=\frac{x+3}{x^4-x^3-6x^2}$

$=\frac{x+3}{x^2(x-3)(x+2)}$ ['খ' হতে]

ধরি, $\frac{x+3}{x^2(x-3)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-3}+\frac{D}{x+2}$

বা, $x+3=Ax(x-3)(x+2)+B(x-3)(x+2)+Cx^2(x+2)+Dx^2(x-3)$ ..... (i)

$x=0$ হলে (i) নং থেকে পাই, $3=B(-3).2 \therefore B=-\frac{1}{2}$

$x=3$ হলে (i) নং থেকে পাই, $6=C.9.5 \Rightarrow C=\frac{6}{45}=\frac{2}{15}$

$x=-2$ হলে (i) নং থেকে পাই—

$1=D.4(-5) \therefore D=-\frac{1}{20}$

(i) নং সমীকরণের উভয় পাশে x^3 এর সহগ সমতা করে পাই,

$0=A+C+D$

$\therefore A=-(C+D)$

বা, $A=-C-D=\frac{1}{20}-\frac{2}{15}=\frac{3-8}{60}=-\frac{5}{60}=-\frac{1}{12}$

∴ আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশিত রূপ:

$-\frac{1}{12}x-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{20(x+2)}+\frac{2}{15(x-3)}$

[A, B, C ও D এর মান বসিয়ে]

(Ans.)

প্রশ্ন ▶ ২১ $a^3+b^3+c^3-3abc$ একটি সমমাত্রিক রাশি।

ক. সমমাত্রিক রাশিটির মাত্রা কত? রাশিটি প্রতিসম কি না যাচাই কর। ২

খ. রাশিটিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ৪

গ. যদি রাশিটির সাংখ্যিক মান 0 হয় এবং $a+b+c\neq 0$ হয় তবে দেখাও যে, $a=b=c$. ৪

২১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক সমমাত্রিক রাশিটির মাত্রা 3.

রাশিটির প্রতিসম। কেননা, রাশিটিতে যেকোনো দুইটি চলক যেমন a, b পরস্পর স্থান বিনিময় করলে প্রদত্ত রাশি

$=b^3+a^3+c^3-3bac$

$=a^3+b^3+c^3-3abc$ হয়।

অর্থাৎ রাশিটি অপরিবর্তিত থাকে। সুতরাং রাশিটি প্রতিসম।

খ প্রদত্ত রাশি, $a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc$

$=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2\}-3ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)(a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2)-3ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)(a^2+2ab+b^2-ac-bc+c^2-3ab)$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

গ আমরা জানি,

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

এখন, $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$=\frac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\}$

$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

∴ $a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$

∵ রাশিটির সাংখ্যিক মান 0 অর্থাৎ $a^3+b^3+c^3-3abc=0$

অর্থাৎ $\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$

∵ $\frac{1}{2}(a+b+c)\neq 0 \therefore (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

আমরা জানি, কতগুলো রাশির বর্গের যোগফল 0 হলে তারা পৃথক পৃথকভাবে 0 হবে

অর্থাৎ $a-b=0$, $b-c=0$ এবং $c-a=0$

বা, $a=b$ বা, $b=c$ বা, $c=a$

∴ $a=b=c$ (দেখানো হলো)

প্রশ্ন ▶ ২২ $\frac{6a^2x^3+a^2x^2-a^2x}{18x^3+15x^2-x-2}$ একটি বীজগাণিতিক ভগ্নাংশ।

ক. $a=2$ এবং $x=3$ হলে ভগ্নাংশটির লবের মান নির্ণয় কর। ২

খ. ভগ্নাংশটির হরকে উৎপাদকে প্রকাশ কর। ৪

গ. ভগ্নাংশটির প্রকৃতি নির্ণয় কর। ভগ্নাংশটির সরল মান নির্ণয় কর। ৪

২২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ভগ্নাংশের লব $=6a^2x^3+a^2x^2-a^2x$

এখন $a=2$ এবং $x=3$ হলে,

লব $=6(2)^2.(3)^3+(2)^2.(3)^2-(2)^2.3$

www.bdniyog.com

$= 24.27 + 4.9 - 4.3$
$= 672$

খ মনে করি, ভগ্নাংশটির হর $P(x) = 18x^3 + 15x^2 - x - 2$

$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 18\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 15\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - 2$

$= 18\left(-\frac{1}{8}\right) + 15\left(\frac{1}{4}\right) - \frac{3}{2}$

$= -\frac{9}{4} + \frac{15}{4} - \frac{3}{2} = \frac{-9+15-6}{4} = 0$

$\therefore x - \left(-\frac{1}{2}\right)$ বা, $x + \frac{1}{2}$ বা, $(2x + 1)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক

হবে, $P(x) = 18x^3 + 15x^2 - x - 2$
$= 18x^3 + 9x^2 + 6x^2 + 3x - 4x - 2$
$= 9x^2(2x + 1) + 3x(2x + 1) - 2(2x + 1)$
$= (2x + 1)(9x^2 + 3x - 2)$
$= (2x + 1)(9x^2 - 3x + 6x - 2)$
$= (2x + 1)\{3x(3x - 1) + 2(3x - 1)\}$
$= (2x + 1)(3x - 1)(3x + 2)$

$\therefore$ হরের উৎপাদকে বিশ্লেষিত রূপ: $(2x + 1)(3x - 1)(3x + 2)$

গ ভগ্নাংশটিতে হর ও লব এর মাত্রা সমান।

সুতরাং ভগ্নাংশটি একটি অপ্রকৃত ভগ্নাংশ।

ভগ্নাংশের লব $= 6a^2x^3 + a^2x^2 - a^2x$
$= a^2x(6x^2 + x - 1)$
$= a^2x(6x^2 + 3x - 2x - 1)$
$= a^2x\{3x(2x + 1) - 1(2x + 1)\}$
$= a^2x(2x + 1)(3x - 1)$

$\therefore$ প্রদত্ত ভগ্নাংশ $\frac{6a^2x^3 + a^2x^2 - a^2x}{18x^3 + 15x^2 - x - 2} = \frac{a^2x(2x+1)(3x-1)}{(2x+1)(3x-1)(3x+2)}$ ['খ' থেকে]

$= \frac{a^2x}{3x+2}$

$\therefore$ ভগ্নাংশটির সরল মান $= \frac{a^2x}{3x+2}$

প্রশ্ন ▶ ২৩ $\frac{(ax+1)^2}{(x-y)(z-x)} + \frac{(ay+1)^2}{(x-y)(y-z)} + \frac{(az+1)^2}{(y-z)(z-x)}$ এবং $\frac{a^2-(b-c)^2}{(a+c)^2-b^2} + \frac{b^2-(a-c)^2}{(a+b)^2-c^2} + \frac{c^2-(a-b)^2}{(b+c)^2-a^2}$ দুইটি রাশি যাদেরকে যথাক্রমে P ও Q দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

ক. যুক্তিসহ $\frac{(ax+1)^2}{(x-y)(z-x)}$ ভগ্নাংশের প্রকৃতি নির্ণয় কর। ২

খ. P রাশিটির সরল মান নির্ণয় কর। ৪

গ. Q রাশিটির সরল মান নির্ণয় করে দেখাও যে, $P + a^2Q = 0$. ৪

২৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\frac{(ax+1)^2}{(x-y)(z-x)} = \frac{a^2x^2 + 2ax + 1}{zx - x^2 - yz + xy}$

ভগ্নাংশটিতে হর ও লব এর মাত্রা সমান 2.

সুতরাং ভগ্নাংশটি একটি অপ্রকৃত ভগ্নাংশ।

খ প্রদত্ত রাশি $= \frac{(ax+1)^2}{(x-y)(z-x)} + \frac{(ay+1)^2}{(x-y)(y-z)} + \frac{(az+1)^2}{(y-z)(z-x)}$

$= \frac{(ax+1)^2(y-z) + (ay+1)^2(z-x) + (az+1)^2(x-y)}{(x-y)(y-z)(z-x)}$ .....(i)

(i) এর লব $= (a^2x^2 + 2ax + 1)(y - z) + (a^2y^2 + 2ay + 1)(z - x) + (a^2z^2 + 2az + 1)(x - y)$
$= a^2\{x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y)\} 2a\{x(y - z) + y(z - x) + z(x - y)\} + \{(y - z) + (z - x) + (x - y)\}$

কিন্তু $x^2(y-z) + y^2(z-x) + z^2(x-y) = -(x-y)(y-z)(z-x)$

আবার, $x(y - z) + y(z - x) + z(x - y) = 0$ এবং $(y - z) + (z - x) + (x - y) = 0$

$\therefore$ (i) নং এর লব $= -a^2(x - y)(y - z)(z - x)$

সুতরাং প্রদত্ত রাশি $= \frac{-a^2(x-y)(y-z)(z-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)} = -a^2$. **(Ans.)**

গ প্রদত্ত রাশি $= \frac{a^2-(b-c)^2}{(a+c)^2-b^2} + \frac{b^2-(a-c)^2}{(a+b)^2-c^2} + \frac{c^2-(a-b)^2}{(b+c)^2-a^2}$

প্রথম ভগ্নাংশ $= \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{(a+b+c)(a-b+c)} = \frac{a+b-c}{a+b+c}$

দ্বিতীয় ভগ্নাংশ $= \frac{(a+b-c)(b-a+c)}{(a+b+c)(a+b-c)} = \frac{b-a+c}{a+b+c}$

তৃতীয় ভগ্নাংশ $= \frac{(c+a-b)(c-a+b)}{(b+c+a)(b+c-a)} = \frac{c+a-b}{a+b+c}$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= \frac{a+b-c}{a+b+c} + \frac{b-a+c}{a+b+c} + \frac{c+a-b}{a+b+c}$
$= \frac{a+b-c+b-a+c+c+a-b}{a+b+c}$
$= \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1$

এখন, বামপক্ষ $= P + a^2Q = -a^2 + a^2(1)$
$= -a^2 + a^2 = 0 =$ ডানপক্ষ

প্রশ্ন ▶ ২৪ চলক x এর তিনটি রাশি $(x + 3)$, $(x^2 - 9)$, x^3.

ক. উপরিউক্ত রাশিসমূহ হতে ১ম ও ২য় রাশি দ্বারা একটি প্রকৃত এবং ২য় ও ৩য় রাশি দ্বারা একটি অপ্রকৃত ভগ্নাংশ তৈরি কর। ২

খ. অপ্রকৃত ভগ্নাংশটি থেকে একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ পৃথক কর। ৪

গ. 'খ' হতে প্রাপ্ত প্রকৃত ভগ্নাংশটিকে আংশিক ভগ্নাংশ রূপে প্রকাশ কর। ৪

২৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক এখানে, প্রথম রাশি $= x + 3$

দ্বিতীয় রাশি $= x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$

এবং তৃতীয় রাশি $= x^3$

এখন, $\frac{x+3}{(x+3)(x-3)} = \frac{1}{x-3}$, যা একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ

এবং $\frac{x^3}{x^2-9}$, যা একটি অপ্রকৃত ভগ্নাংশ।

খ 'ক' হতে প্রাপ্ত অপ্রকৃত ভগ্নাংশটি হচ্ছে, $\frac{x^3}{x^2-9}$

এখন, $\frac{x^3}{x^2-9} = \frac{x^3-9x+9x}{x^2-9} = \frac{x(x^2-9)+9x}{x^2-9}$

$= \frac{x(x^2-9)}{(x^2-9)} + \frac{9x}{x^2-9} = x + \frac{9x}{x^2-9}$

$= x + \frac{9x}{(x+3)(x-3)}$

এখানে, $\frac{9x}{(x+3)(x-3)}$ একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ

খ 'খ' হতে প্রাপ্ত প্রকৃত ভগ্নাংশটি হচ্ছে, $\frac{9x}{(x+3)(x-3)}$

মনে করি, $\frac{9x}{(x+3)(x-3)} \equiv \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-3}$ ..... (1)

সমীকরণ (1) এর উভয়পক্ষকে $(x + 3)(x - 3)$ দ্বারা গুণ করে পাই, $9x \equiv A(x - 3) + B(x + 3)$ ..... (2)

সমীকরণ (2)-এ $x = 3$ বসিয়ে পাই,

$9 \times 3 = A(3 - 3) + B(3 + 3)$

বা, $27 = A \times 0 + B \times 6$

বা, $27 = 6B$

www.bdniyog.com

বা, $B = \frac{27}{6}$

$B = \frac{9}{2}$

আবার, সমীকরণ (2)- এ $x = -3$ বসিয়ে পাই,

$9(-3) = A(-3-3) + B(-3+3)$

বা, $-27 = -6A + B \times 0$

বা, $A = \frac{27}{6}$

$A = \frac{9}{2}$

A ও B এর মান সমীকরণ (1)-এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{9x}{(x+3)(x-3)} = \frac{\frac{9}{2}}{x+3} + \frac{\frac{9}{2}}{x-3}$$

$$\frac{9x}{(x+3)(x-3)} = \frac{9}{2(x+3)} + \frac{9}{2(x-3)}$$ (Ans.)

প্রশ্ন ব্যাংক উত্তরসহ সৃজনশীল রচনামূলক প্রশ্ন

প্রশ্ন ▶ ২৫ $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)$,

$\frac{a^2+bc}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2+ca}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2+ab}{(c-a)(c-b)}$ দুইটি বীজগাণিতিক রাশি।

ক. দেখাও যে, প্রথম বীজগাণিতিক রাশিটি চক্রক্রমিক কিন্তু প্রতিসম নয়। ২

খ. প্রথম বীজগাণিতিক রাশিটিকে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ৪

গ. দ্বিতীয় বীজগাণিতিক রাশিটির সরল মান কত? ৪

উত্তর: খ. $-(a-b)(b-c)(c-a)$; **গ.** 2

প্রশ্ন ▶ ২৬ $bc(a+d)$, $ca(b+d)$, $ab(c+d)$, $(a-b)(a-c)$, $(b-c)(b-a)$, $(c-a)(c-b)$, $abc(b-c) + abc(c-a) + abc(a-b)$ ও $bc + a^2 - ab - ac$ বীজগাণিতিক রাশি।

ক. ১ম, ২য় ও ৩য় রাশিটিকে পর্যায়ক্রমে লব এবং ৪র্থ, ৫ম ও ৬ষ্ঠ রাশিটিকে পর্যায়ক্রমে হর ধরে মূলদীয় ভগ্নাংশ গঠন করে যোগফলরূপে প্রকাশ কর। ২

খ. শেষ দুইটি বীজগাণিতিক রাশিটির যোগফল নির্ণয় করে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ৪

গ. প্রাপ্ত মূলদীয় ভগ্নাংশগুলোর যোগফল কত? ৪

উত্তর: ক. $\frac{bc(a+d)}{(a-b)(a-c)} + \frac{ca(b+d)}{(b-c)(b-a)} + \frac{ab(c+d)}{(c-a)(c-b)}$;

খ. $(b-a)(c-a)$; **গ.** d

প্রশ্ন ▶ ২৭ মনে কর, $N(x) = (x-1)(x+5)$, $D(x) = (x-2)(x-4)$.

ক. $\frac{N(x)}{D(x)}$ মূলদ্বীয় ভগ্নাংশরূপে প্রকাশ কর এবং কোন প্রকৃতির ভগ্নাংশ ব্যাখ্যা কর। ২

খ. 'ক' হতে প্রাপ্ত ভগ্নাংশটি থেকে একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ পৃথক কর। ৪

গ. 'খ' হতে প্রাপ্ত প্রকৃত ভগ্নাংশটিকে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ করে দেখাও যে, $\frac{(x-1)(x+5)}{(x-2)(x-4)} = 1 - \frac{7}{2(x-2)} - \frac{27}{2(x-4)}$ ৪

প্রশ্ন ▶ ২৮ $N(x) = x^4 + 2x^2 - 2$, $D(x) = x^4 + x^2 - 2$.

ক. $\frac{N(x)}{D(x)}$ মূলদীয় ভগ্নাংশ রূপে প্রকাশ কর এবং কোন প্রকৃতির ভগ্নাংশ ব্যাখ্যা কর। ২

খ. 'ক' হতে প্রাপ্ত ভগ্নাংশটিকে প্রকৃত ভগ্নাংশের যোগফলরূপে প্রকাশ কর। ৪

গ. 'খ' হতে প্রাপ্ত প্রকৃত ভগ্নাংশটিকে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

উত্তর: খ. $\frac{x^2}{x^4+x^2-2}$; **গ.** $-\frac{1}{6(x+1)} + \frac{1}{6(x-1)} + \frac{2}{3(x^2+2)}$

প্রশ্ন ▶ ২৯ $P(x) = 2x^4 - 5x^2 + 6x - 3$ এবং $Q(x) = 4x^3 - 5x^2 + 3x - 2$

ক. $P(x)$ বহুপদীকে $x-1$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ কত হবে?

খ. দেখাও যে, $x-1$ রাশিটি $P(x)$ এবং $Q(x)$ বহুপদীদ্বয়ের সাধারণ উৎপাদক।

গ. $P(x)$ ও $Q(x)$ বহুপদীদ্বয়কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

উত্তর: ক. 0; **গ.** $(x-1)(2x^3 + 2x^2 - 3x + 3)$, $(x-1)(4x^2 - x + 2)$

প্রশ্ন ▶ ৩০ $P(x) = 4x^3 - 7x^2 + 5x - 2$ এবং $g(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$ দুইটি বহুপদী।

ক. $g(1)$ নির্ণয় কর।

খ. $g(x)$ এর উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর।

গ. দেখাও যে, $(x-1)$, $p(x)$ ও $g(x)$ বহুপদীদ্বয়ের সাধারণ উৎপাদক।

উত্তর: ক. 0; **খ.** $(x-1)(x+2)(x+3)$

প্রশ্ন ▶ ৩১ $P(x) = 2x^2 + 3$ এবং $g(y) = y^2 - 5y + 4$.

ক. $P(5)$ নির্ণয় কর। ২

খ. $g(y)$ কে $(y-4)$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল $P(5)$ এর সমান হলে y এর মান কত? ৪

গ. $\frac{P(x)}{g(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর। ৪

উত্তর: ক. $P(5) = 53$.; **খ.** 54; **গ.** $2 - \frac{5}{3(x-1)} + \frac{35}{3(x-4)}$

প্রশ্ন ▶ ৩২ দুইটি বহুপদীর একটি $P(x) = x^4 - 5x^3 + 7x^2 - a$ এবং অপরটি $Q(x) = x^3 + 7x^2 - x - 7$

[এস ও এস হারমান মেইনার স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা]

ক. $P(x)$ ও $Q(x)$ বহুপদীদ্বয়ের মুখ্য সহগ ও ধ্রুবপদ নির্ণয় কর। ২

খ. $P(x)$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $x-2$ হলে দেখাও যে, $a = 4$ ৪

গ. দেখাও যে, $x+1$ এবং $x-1$ উভয়ে $Q(x)$ বহুপদীর সাধারণ উৎপাদক। ৪

উত্তর: ক. 1, $-a$ এবং 1, -7

প্রশ্ন ▶ ৩৩ $P(a, b, c) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ একটি বহুপদী এবং $Q(x, y, z) = (x+y+z)(xy+yz+zx) - xyz$ একটি বহুপদী।

[সরকারি বালিকা বিদ্যালয়, পটুয়াখালী]

ক. $P(a, b, c)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ২

খ. যদি $Q(x, y, z) = 0$ হয়, তবে দেখাও যে, $(x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + z^3$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $P(a, b, c) = \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\}$ ৪

উত্তর: ক. $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

www.bdniyog.com

প্রশ্ন ▶ ৩৪ x চলকের বহুপদী, $P(x) = 8x^3 - x^2 + 4x^4 - 8x - 3$ এবং y চলকের বহুপদী, $P(y) = ay^5 + by^4 + cy^3 + cy^2 + by + a$.

[হবিগঞ্জ সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়, হবিগঞ্জ]

ক. P(x) কে বহুপদীর আদর্শরূপে প্রকাশ করে এর মাত্রা ও মুখ্য সহগ নির্ণয় কর। ২

খ. P(x) কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ৪

গ. দেখাও যে, y – r, P(y) এর একটি উৎপাদক হলে (ry – 1) ও P(y) এর একটি উৎপাদক হবে। ৪

উত্তর: ক. $4x^4 + 8x^3 - x^2 - 8x - 3$, 4, 4;

খ. $(x + 1)(x - 1)(2x + 1)(2x + 3)$

প্রশ্ন ▶ ৩৫ $P(x) = x^n - a^n$ যেখানে x ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা এবং a একটি ধ্রুবক। [অগ্রদা সরকারী উচ্চ বিদ্যালয়, ব্রাহ্মণবাড়ীয়া]

ক. দেখাও (x – a) বহুপদীর একটি উৎপাদক। ২

খ. θ(x) নির্ণয় কর যেন $P(x) = (x - a)\theta(x)$ ৪

গ. x জোড় হলে θ(x) নির্ণয় কর যেন $P(x) = (x + a)\theta(x)$ ৪

উত্তর: খ. $\theta(x) = x^{x-1} + ax^{x-2} + a^2x^{x-3} + ... + a^{x-1}$

প্রশ্ন ▶ ৩৬ $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ একটি বহুপদী।

[ঝালকাঠি সরকারি হরচন্দ্র বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, ঝালকাঠি]

ক. a = 0, b = 3, c = 5 এবং d = 2 শর্তে P(x) নির্ণয় করে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ২

খ. দেখাও যে, P(x) এর একটি উৎপাদক (x + 1) হবে যদি a + c = b + d হয়। ৪

গ. ক নং এর শর্তাধীনে যে রাশিগুলো দ্বারা P(x) কে ভাগ করলে ভাগশেষ 52 হয়, তাদের সেট নির্ণয় কর। ৪

উত্তর: ক. $(x + 1)(3x + 2)$; **গ.** {x + 5, 3x – 10}

প্রশ্ন ▶ ৩৭ $P(x) = mx^3 + 5x^2 - nx + 60$ বহুপদীকে x – 1 দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ 10 এবং x – 3 দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ 84 থাকে।

[মোহাম্মদপুর প্রিপারেটরী উচ্চ মাধ্যমিক (বালিকা) বিদ্যালয়, ঢাকা]

ক. ভাগশেষ উপপাদ্যটির বৈশিষ্ট্য লিখ। ২

খ. m এবং n এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. m এবং n এর মান দুটোর গুণনীয়ক সমূহ লিখ। m এর গুণনীয়ক সমূহকে B সেটের এবং n এর গুণনীয়ক সমূহকে C সেটের উপাদান ধরে $B \cup C$ সেটের উপাদানগুলো তালিকা পদ্ধতিতে লিপিবদ্ধ কর। অতপর ভেনচিত্রের সাহায্যে দেখাও। ৪

উত্তর: খ. m = 6, n = 61; **গ.** B = {1, 2, 3, 6, 61} এবং C = {1, 61}; $B \cup C$ = {1, 2, 3, 6, 61}

প্রশ্ন ▶ ৩৮ $F(x) = x^{16} - 1$ এবং $G(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8}$

[অগ্রগামী সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়, সিলেট]

ক. দেখাও যে, (x + 1) ও (x – 1) উভয়ই F(x) এর একটি উৎপাদক। ২

খ. F(x) কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর। ৪

গ. দেখাও যে, $G(x) + \frac{16}{F(x)} = \frac{1}{1-x}$ ৪

উত্তর: খ. $(x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)(x^2 + \sqrt{3}x + 1)(x^2 - \sqrt{3}x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$

internet-o-linked
প্রশ্ন ব্যাংকের আরও প্রশ্ন ও উত্তরের জন্যে নিচের ওয়েব অ্যাড্রেসটি টাইপ করুন
ssc.panjeree.com/hmt/hm02qbs.pdf

REVISION R

এ অংশে অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ তথ্য ও সূত্র, পরীক্ষার আগে যার উপর চোখ বুলিয়ে নেওয়া প্রয়োজন বা অবশ্যই মনে রাখতে হবে এমন বিষয়সমূহ একনজরে উল্লেখ করা হয়েছে। পরীক্ষার আগে এ বিষয়গুলো রিভিশন দিলে পরীক্ষায় নির্ভুলভাবে অঙ্ক সমাধান করতে পারবে।

- বহুপদী বিশেষ ধরনের বীজগাণিতিক রাশি। এরূপ রাশিতে এক বা একাধিক পদ থাকে।
- বহুপদী রাশির পদগুলো এক বা একাধিক চলকের শুধুমাত্র অঋণাত্মক পূর্ণসাংখ্যিক ঘাত ও ধ্রুবকের গুণফল।
- x একটি চলক হলে a, $ax + b$, $ax^2 + bx + c$ ইত্যাদি আকারের রাশি x চলকের বহুপদী।
- $2x + 5y + 6$, $x^2 + 6xy + y^2 - 5x + 6y + 8$ ইত্যাদি পদগুলো দুই চলকের বহুপদী। এতে x ও y দুইটি চলক আছে।
- $p(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ রাশিটিতে x, y ও z তিনটি চলক থাকায় এটি তিন চলকের বহুপদী।
- $2x^5 - 3x^5 - x^4 + 2x - 5$ বহুপদীর চলক x, বহুপদীর মাত্রা 6, মুখ্যপদ $2x^6$, মুখ্য সহগ 2, ধ্রুবপদ – 5.
- দুইটি বহুপদীর যোগফল, বিয়োগফল ও গুণফল সবসময় বহুপদী হয়। কিন্তু ভাগফল বহুপদী হতেও পারে অথবা নাও হতে পারে।

সমতা সূত্র :

- যদি $ax + b = px + q$ হয় তাহলে a = p, b = q [উভয়পক্ষে সহগ সমীকৃত করে]
- $ax^2 + bx + c = px^2 + qx + r$ হয় তবে a = p, b = q, c = r [উভয়পক্ষে সহগ সমীকৃত করে]
- সমতা চিহ্নের উভয় পক্ষে x এর একই ঘাতযুক্ত পদের সহগদ্বয় পরস্পর সমান।
- দুইটি বহুপদী P(x) ও Q(x) সকল x এর জন্য সমান হলে, তাদের সমতা অভেদ এবং লেখা হয় $P(x) \equiv Q(x)$

ভাগশেষ ও উৎপাদক উপপাদ্য :

- P(x) বহুপদীকে x – a দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ P(a) হবে।
- P(x) বহুপদীকে ax + b দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $P\left(-\frac{b}{a}\right)$
- P(a) = 0 হলে (x – a) হচ্ছে P(x) এর একটি উৎপাদক।
- P(x) বহুপদীর x – a একটি উৎপাদক হলে P(a) = 0।

সমমাত্রিক, প্রতিসম ও চক্রক্রমিক রাশি

- বহুপদীর প্রত্যেক পদের মাত্রা একই হলে তাকে সমমাত্রিক বহুপদী বলে।
- একাধিক চলক বিশিষ্ট রাশির যে কোনো দুইটি চলকের স্থান বিনিময়ে রাশিটি অপরিবর্তিত থাকলে প্রতিসম রাশি হয়।
- ab + bc + ca রাশিটি a, b, c চলকের এবং $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx$ রাশিটি x, y, z চলকের প্রতিসম রাশি।

www.bdniyog.com

- চক্রক্রমিক রাশিতে চলকগুলোর স্থান চক্রাকারে পরিবর্তন হলেও রাশির মান অপরিবর্তিত থাকে।
- তিন চলকের প্রত্যেক প্রতিসম রাশি চক্র-ক্রমিক। কিন্তু প্রত্যেক চক্র-ক্রমিক রাশি প্রতিসম নয়।
- $x^2 + y^2 + z^2$ চক্র-ক্রমিক রাশি কারণ x এর স্থলে y, y এর স্থলে z এবং z এর স্থলে x বসালে রাশিটি $y^2 + z^2 + x^2$ পূর্বের রাশির সমান হয়।

চক্র-ক্রমিক বহুপদীর-উৎপাদকে বিশ্লেষণ

(ক) কোনো চক্র-ক্রমিক বহুপদীর $(a - b)$ একটি উৎপাদক হলে $(b - c)$ এবং $(c - a)$ রাশিটির উৎপাদক হবে।

(খ) এক মাত্রার এবং দুই মাত্রার সমমাত্রিক চক্র-ক্রমিক বহুপদী যথাক্রমে $k(a + b + c)$ ও $k(a^2 + b^2 + c^2) + m(ab + bc + ca)$ যেখানে k ও m ধ্রুব।

(গ) দুইটি বহুপদী যদি এমন হয় যে চলকগুলোর সকল মানের জন্য তাদের মান সমান হয়, তবে বহুপদী দুইটির অনুরূপ পদগুলোর সহগ সমান হবে।

সূত্র (ক) প্রয়োগে প্রদত্ত রাশির যতগুলি একঘাত উৎপাদক পাওয়া যায় প্রদত্ত রাশির মাত্রা তা থেকে এক বেশি হলে অপর উৎপাদক $k(a + b + c)$ আকারের এবং দুই বেশি হলে $k(a^2 + b^2 + c^2) + m(ab + bc + ca)$ আকারের হবে।

■ **এক নজরে এ অনুশীলনীতে ব্যবহৃত সূত্রসমূহ :**

- $bc(b - c) + ca(c - a) + ab(a - b) = -(b - c)(c - a)(a - b)$
- $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b) = -(b - c)(c - a)(a - b)$
- $a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2) = (b - c)(c - a)(a - b)$
- $a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b) = -(b - c)(c - a)(a - b)(a + b + c)$
- $b^2c^2(b^2 - c^2) + c^2a^2(c^2 - a^2) + a^2b^2(a^2 - b^2) = -(b - c)(c - a)(a - b)(b + c)(c + a)(a + b)$
- $(ab + bc + ca)(a + b + c) - abc = (a + b)(b + c)(c + a)$
- $(b + c)(c + a)(a + b) + abc = (a + b + c)(ab + bc + ca)$
- $(a + b + c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a + b)(b + c)(c + a)$

■ **মূলদ ভগ্নাংশ**

একটি বহুপদীকে লব এবং একটি বহুপদীকে হর ধরে গঠিত ভগ্নাংশকে মূলদীয় ভগ্নাংশ বলে। যেমন,

$\frac{x}{(x-1)(x-5)}$ এবং $\frac{x^2+1}{(x+8)(x^2+5x+7)}$ মূলদীয় ভগ্নাংশ।

■ **আংশিক ভগ্নাংশ** (Partial Fraction)

যদি কোনো ভগ্নাংশকে একাধিক ভগ্নাংশের যোগফল রূপে প্রকাশ করা যায় তবে শেষোক্ত ভগ্নাংশগুলোর প্রত্যেকটিকে প্রথমোক্ত ভগ্নাংশের আংশিক ভগ্নাংশ বলা হয়।

ধরা যাক, N(x) ও D(x) উভয়ে x এর বহুপদী। তাহলে $\frac{N(x)}{D(x)}$ আকারের মূলদীয় ভগ্নাংশকে প্রকৃত ভগ্নাংশ (Proper fraction) বলা হবে যদি হর D(x) এর মাত্রা লব N(x) এর চেয়ে বড় হয়। যদি D(x) এর মাত্রা N(x) এর চেয়ে ছোট বা সমান হয় তবে সেই ভগ্নাংশকে অপ্রকৃত ভগ্নাংশ (Improper fraction) বলা হয়।

■ **আংশিক ভগ্নাংশ নির্ণয় পদ্ধতি**

- যদি $\frac{N(x)}{D(x)}$ প্রকৃত ভগ্নাংশ হয় এবং D(x) কে একঘাতিক ভিন্ন ভিন্ন উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায়, তবে D(x) এর প্রত্যেক একঘাতিক উৎপাদক P(x) এর জন্য $\frac{A}{P(x)}$ আকারের একটি আংশিক ভগ্নাংশ ধরে লেখা যায়।

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{A}{P(x)} + \frac{B}{Q(x)} + \frac{C}{R(x)} + \dots\dots\dots\dots\dots\dots \text{(i)}$$

এখানে $D(x) = P(x)\,Q(x)\,R(x)\,\dots\dots$ এবং A, B, C ধ্রুবক। এখন (i) এর উভয়পক্ষে D(x) দ্বারা গুণ করে আমরা দুইটি বহুপদীয় অভেদ পাই যা x এর সকল মানের জন্য সত্য হয়। এই অভেদে x এর সুবিধাজনক মান বসিয়ে A, B, C এর মান বের করে প্রদত্ত ভগ্নাংশটিকে আংশিক ভগ্নাংশে রূপান্তর করা যায়।

- যদি $\frac{N(x)}{D(x)}$ অপ্রকৃত ভগ্নাংশ হয় এবং D(x) কে একঘাতিক ভিন্ন ভিন্ন উৎপাদকে বিশ্লেষণ করা যায় তবে $\frac{N(x)}{D(x)}$ কে প্রথমে প্রকৃত ভগ্নাংশে রূপান্তরিত করে পূর্বে বর্ণিত উপায়ে অগ্রসর হতে হবে।

অর্থাৎ $\frac{N(x)}{D(x)}$ অপ্রকৃত হলে আমরা N(x) কে D(x) দ্বারা ভাগ করব যতক্ষণ না ভাগশেষ R(x) এর মাত্রা D(x) এর কম হয়। ভাগফল Q(x) হলে লেখা যাবে $\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$. যেখানে $\left[\frac{R(x)}{D(x)}\right]$ প্রকৃত ভগ্নাংশ।

এভাবে প্রদত্ত ভগ্নাংশটি থেকে প্রকৃত ভগ্নাংশ পাওয়া যায় যা পূর্বে উল্লেখিত নিয়মে আংশিক ভগ্নাংশে পরিণত করা যায়।

এখানে অধ্যায়টির অনুশীলনী, বহুনির্বাচনি ও সৃজনশীল প্রশ্নগুলো বিশ্লেষণ করে স্টার মার্কসহ সাজেশন দেওয়া হয়েছে। পরীক্ষার আগে অবশ্যই এ অঙ্কগুলো সমাধান করবে। তাহলে পরীক্ষায় যেকোনো অঙ্কের সমাধান সহজেই করতে পারবে।

সাজেশন | বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

	প্রশ্ন নম্বর
★★★	২, ৫, ৭, ৯, ১০, ১৬, ১৮, ২০, ২১, ২৪, ২৮, ৩০, ৩৮, ৩৯, ৪০, ৪৩, ৪৮, ৪৯, ৫১, ৫৪, ৫৭, ৫৮, ৬০, ৬৪, ৬৫, ৬৮, ৭১, ৭৩, ৭৬, ৮০, ৮১, ৮২, ৮৬, ৮৭, ৮৮, ৯১, ৯৫, ৯৬, ৯৯, ১০১, ১০২, ১০৩, ১০৪, ১০৫, ১০৬
★★	৮, ১১, ১২, ১৫, ১৯, ২৩, ২৬, ২৯, ৩৩, ৩৪; ৩৫, ৩৬, ৪৭, ৫০, ৫২, ৫৬,-৬৬, ৬৭, ৭৫, ৭৮, ৭৯, ৮৪, ৮৫, ৯০, ৯২, ৯৩, ৯৪, ৯৮

সাজেশন | সৃজনশীল রচনামূলক প্রশ্ন

	প্রশ্ন নম্বর
★★★	২, ৩, ৪, ৬, ৯, ১০, ১৩, ১৬, ২০, ২২
★★	৫, ৭, ১১, ১২, ১৪, ১৮, ২৩

www.bdniyog.com