শ্রেণির কাজ পৃষ্ঠা নং ৫৪৯

অধ্যায়-৯

সূচকীয় ও লগারিদমীয় ফাংশন

অনুশীলনী-৯.১

অনুশীলনীটি পড়ে যা জানতে পারবে—

১. মূলদ সূচক ও অমূলদ সূচকের ব্যাখ্যা।
২. সূচকের বিভিন্ন সূত্রের প্রমাণ ও প্রয়োগ।
৩. সূচক ও লগারিদমের পারস্পরিক সম্পর্কের ব্যাখ্যা।
৪. মূল এর ব্যাখ্যা।
৫. মূলদ ভগ্নাংশের ব্যাখ্যা।

স্কটিস গণিতবিদ জন নেপিয়ার (*John Napier*, 1550-1671) জোতির্বিদ্যার প্রতি তাঁর আগ্রহ ছিল যা গণিতে অবদান রাখতে সাহায্য করে। বড় বড় সংখ্যার গণনাকে অধিকতর ভালো ও সহজতর করতে একটি বিশেষ পদ্ধতি আবিষ্কার করেন যা বর্তমানে লগারিদম *logarithm)* নামে পরিচিত।

৯টি অনুশীলনীর প্রশ্ন|
৮৪টি বহুনির্বাচনি প্রশ্ন ■ ৪৭টি সাধারণ বহুনির্বাচনি ■ ১৬টি বহুপদী সমাপ্তিসূচক ■ ২১টি অভিন্ন তথ্যভিত্তিক
১৮টি সৃজনশীল প্রশ্ন ■ ৯টি শ্রেণির কাজ ■ ৫টি মাস্টার ট্রেইনার প্রণীত ■ ৪টি প্রশ্নব্যাংক

অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

১. প্রমাণ কর যে, $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p = a^{\frac{mp}{n}}$ যেখানে $m, p \in \mathbb{Z}$ এবং $n \in \mathbb{N}$

সমাধান: $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p = \left\{\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m\right\}^p$ $\left[\because a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m\right]$

$= \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{mp}$ $[\because (a^m)^n = a^{mn}]$

$= a^{\frac{mp}{n}}$ $\left[\because a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m\right]$

$\therefore \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p = a^{\frac{mp}{n}}$ **(প্রমাণিত)**

২. প্রমাণ কর যে, $\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{mn}}$ যেখানে $m, n \in \mathbb{Z}, m \neq 0, n \neq 0$

সমাধান: ধরি, $\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = x$

বা, $a^{\frac{1}{m}} = x^n$ $[\because \sqrt[n]{a^m} = x$ হলে $a^m = x^n]$

বা, $a = (x^n)^m$

বা, $a = x^{mn}$ $[\because (a^m)^n = a^{mn}]$

$\therefore x = a^{\frac{1}{mn}}$

অর্থাৎ, $\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{mn}}$ $\left[\because x = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}\right]$ **(প্রমাণিত)**

৩. প্রমাণ কর যে, $(ab)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}}$, যেখানে $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$

সমাধান: ধরি, $(ab)^{\frac{1}{n}} = x, a^{\frac{1}{n}} = y, b^{\frac{1}{n}} = z$

$\therefore x^n = ab, y^n = a, z^n = b$

এখন, $x^n = ab$

বা, $x^n = y^n z^n$ [মান বসিয়ে]

বা, $x^n = (yz)^n$ $[\because (ab)^n = a^n b^n]$

$\therefore x = yz$

অর্থাৎ, $(ab)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}}$

$\therefore \left\{(ab)^{\frac{1}{n}}\right\}^m = \left(a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}}\right)^m$ [উভয় পক্ষের ঘাত m এ উন্নীত করে]

বা, $(ab)^{\frac{m}{n}} = \left\{(a)^{\frac{1}{n}}\right\}^m \left\{(b)^{\frac{1}{n}}\right\}^m$

$\left[\because a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m \text{ এবং } \left\{(ab)^n = a^n b^n\right\}\right]$

$\therefore (ab)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}}$ **(প্রমাণিত)**

৪. দেখাও যে, (ক) $(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}) = a - b$

(খ) $\dfrac{a^3 + a^{-3} + 1}{a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{-3}{2}} + 1} = (a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{-3}{2}} - 1)$

সমাধান:

(ক) বামপক্ষ $= \left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)$

$= \left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)\left\{\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2 + a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} + \left(b^{\frac{1}{3}}\right)^2\right\}$

$= \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(b^{\frac{1}{3}}\right)^2$ $[\because (x-y)(x^2+xy+y^2) = x^3 - y^3]$

$= a^{\frac{3}{3}} - b^{\frac{3}{3}}$ $\left[\because \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{m}{n}}\right]$

$= a^1 - b^1$

$= a - b =$ ডানপক্ষ

$\therefore (a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}) = a - b$ **(দেখানো হলো)**

(খ) বামপক্ষ $= \dfrac{a^3 + a^{-3} + 1}{a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} + 1}$

$$= \frac{\left(a^{3/2}\right)^2 + \left(a^{-3/2}\right)^2 + 1}{a^{3/2} + a^{-3/2} + 1}$$

$$= \frac{\left(a^{3/2} + a^{-3/2}\right)^2 - 2\cdot a^{3/2}.a^{-3/2} + 1}{a^{3/2} + a^{-3/2} + 1}$$

$[\because x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy]$

$$= \frac{\left(a^{3/2} + a^{-3/2}\right)^2 - 2\cdot a^0 + 1}{a^{3/2} + a^{-3/2} + 1}$$

$\left[\because a^{3/2} \cdot a^{-3/2} = a^{3/2 - 3/2} = a^0\right]$

$$= \frac{\left(a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}}\right)^2 - 1}{a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} + 1} \quad [\because a^0 = 1]$$

$$= \frac{\left(a^{3/2} + a^{-3/2} + 1\right)\left(a^{3/2} + a^{-3/2} - 1\right)}{a^{3/2} + a^{-3/2} + 1}$$

$[\because a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)]$

$= (a^{3/2} + a^{-3/2} - 1)$

= ডানপক্ষ

$\therefore \dfrac{a^3 + a^{-3} + 1}{a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{-3}{2}} + 1} = (a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{-3}{2}} - 1)$ **(দেখানো হলো)**

৫. সরল কর:

(ক) $\left\{\left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{a^2 - b^2}{a - b}}\right\}^{\frac{a}{a+b}}$

সমাধান: $\left\{\left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{a^2 - b^2}{a - b}}\right\}^{\frac{a}{a+b}} = \left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{a^2 - b^2}{a - b} \times \frac{a}{a+b}}$ $[\because (a^r)^s = a^{rs}]$

$$= x^{\frac{1}{a} \times \frac{a^2 - b^2}{a - b} \times \frac{a}{a+b}}$$

$$= x^{\frac{1}{a} \times \frac{(a+b)(a-b)}{(a-b)} \times \frac{a}{(a+b)}}$$

$= x^1 = x$

Ans. x

(খ) $\dfrac{a^{\frac{3}{2}} + ab}{ab - b^3} - \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - b}$

সমাধান: $\dfrac{a^{\frac{3}{2}} + ab}{ab - b^3} - \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - b}$

$$= \frac{a\left(\sqrt{a} + b\right)}{b\left(a - b^2\right)} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - b} \qquad \left[\because a^{\frac{3}{2}} = a . a^{\frac{1}{2}} = a\sqrt{a}\right]$$

$$= \frac{a(\sqrt{a} + b)}{b\{(\sqrt{a})^2 - (b)^2\}} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - b}$$

$$= \frac{a\left(\sqrt{a} + b\right)}{b\left(\sqrt{a} + b\right)\left(\sqrt{a} - b\right)} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - b}$$

$$= \frac{a}{b\left(\sqrt{a} - b\right)} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - b} = \frac{a - b\sqrt{a}}{b\left(\sqrt{a} - b\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a} - b\right)}{b\left(\sqrt{a} - b\right)} \qquad [\because a = a^{\frac{1}{2}}. a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}. \sqrt{a}\,]$$

$$= \frac{\sqrt{a}}{b}$$

Ans. $\dfrac{\sqrt{a}}{b}$

(গ) $\dfrac{\left(\frac{a + b}{b}\right)^{\frac{a}{a - b}} \times \left(\frac{a - b}{a}\right)^{\frac{a}{a - b}}}{\left(\frac{a + b}{b}\right)^{\frac{b}{a - b}} \times \left(\frac{a - b}{a}\right)^{\frac{b}{a - b}}}$

সমাধান: $\dfrac{\left(\frac{a + b}{b}\right)^{\frac{a}{a - b}} \times \left(\frac{a - b}{a}\right)^{\frac{a}{a - b}}}{\left(\frac{a + b}{b}\right)^{\frac{b}{a - b}} \times \left(\frac{a - b}{a}\right)^{\frac{b}{a - b}}}$

$$= \frac{\left(\frac{a + b}{b}\right)^{\frac{a}{a - b}}}{\left(\frac{a + b}{b}\right)^{\frac{b}{a - b}}} \times \frac{\left(\frac{a - b}{a}\right)^{\frac{a}{a - b}}}{\left(\frac{a - b}{a}\right)^{\frac{b}{a - b}}}$$

$$= \left(\frac{a + b}{b}\right)^{\frac{a}{a - b} - \frac{b}{a - b}} \times \left(\frac{a - b}{a}\right)^{\frac{a}{a - b} - \frac{b}{a - b}} \quad \left[\because \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}\right]$$

$$= \left(\frac{a + b}{b}\right)^{\frac{a - b}{a - b}} \times \left(\frac{a - b}{a}\right)^{\frac{a - b}{a - b}} = \left(\frac{a + b}{b}\right)^1 \times \left(\frac{a - b}{a}\right)^1$$

$$= \frac{a + b}{b} \times \frac{a - b}{a} = \frac{a^2 - b^2}{ab}$$

উত্তর: $\dfrac{a^2 - b^2}{ab}$

বিকল্প সমাধান:

$$\frac{\left(\frac{a + b}{b}\right)^{\frac{a}{a - b}} \times \left(\frac{a - b}{a}\right)^{\frac{a}{a - b}}}{\left(\frac{a + b}{b}\right)^{\frac{b}{a - b}} \times \left(\frac{a - b}{a}\right)^{\frac{b}{a - b}}}$$

$$= \frac{\left(\frac{a + b}{b} \times \frac{a - b}{a}\right)^{\frac{a}{a - b}}}{\left(\frac{a + b}{b} \times \frac{a - b}{a}\right)^{\frac{b}{a - b}}} = \frac{\left(\frac{a^2 - b^2}{ab}\right)^{\frac{a}{a - b}}}{\left(\frac{a^2 - b^2}{ab}\right)^{\frac{b}{a - b}}}$$

$$= \left(\frac{a^2 - b^2}{ab}\right)^{\frac{a}{a - b} - \frac{b}{a - b}} = \left(\frac{a^2 - b^2}{ab}\right)^{\frac{a - b}{a - b}}$$

$$= \frac{a^2 - b^2}{ab}$$

Ans. $\dfrac{a^2 - b^2}{ab}$

(ঘ) $\frac{1}{1+a^{-m}b^{n}+a^{-m}c^{p}}+\frac{1}{1+b^{-n}c^{p}+b^{-n}a^{m}}+\frac{1}{1+c^{-p}a^{m}+c^{-p}b^{n}}$

সমাধান:

$$\frac{1}{1+a^{-m}b^{n}+a^{-m}c^{p}}+\frac{1}{1+b^{-n}c^{p}+b^{-n}a^{m}}+\frac{1}{1+c^{-p}a^{m}+c^{-p}b^{n}}$$

প্রদত্ত রাশির প্রথম অংশ $=\frac{1}{1+a^{-m}b^{n}+a^{-m}c^{p}}$

$$=\frac{a^{m}}{a^{m}\left(1+a^{-m}b^{n}+a^{-m}c^{p}\right)}$$

[লব ও হরকে a^m দ্বারা গুণ করে]

$$=\frac{a^{m}}{a^{m}+a^{-m+m}b^{n}+a^{-m+m}c^{p}}$$

$$=\frac{a^{m}}{a^{m}+a^{0}b^{n}+a^{0}c^{p}}$$

$$=\frac{a^{m}}{a^{m}+b^{n}+c^{p}} \qquad [\because a^{0}=1]$$

অনুরূপভাবে, দ্বিতীয় অংশ $=\frac{b^{n}}{a^{m}+b^{n}+c^{p}}$

এবং তৃতীয় অংশ $=\frac{c^{p}}{a^{m}+b^{n}+c^{p}}$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $=\frac{1}{1+a^{-m}b^{n}+a^{-m}c^{p}}+\frac{1}{1+b^{-n}c^{p}+b^{-n}a^{m}}+\frac{1}{1+c^{-p}a^{m}+c^{-p}b^{n}}$

$$=\frac{a^{m}}{a^{m}+b^{n}+c^{p}}+\frac{b^{n}}{a^{m}+b^{n}+c^{p}}+\frac{c^{p}}{a^{m}+b^{n}+c^{p}}$$

$$=\frac{a^{m}+b^{n}+c^{p}}{a^{m}+b^{n}+c^{p}}=1$$

Ans. 1

(ঙ) $\sqrt[bc]{\frac{x^{b/c}}{x^{c/b}}}\times\sqrt[ca]{\frac{x^{c/a}}{x^{a/c}}}\times\sqrt[ab]{\frac{x^{a/b}}{x^{b/a}}}$

সমাধান: $\sqrt[bc]{\frac{x^{b/c}}{x^{c/b}}}\times\sqrt[ca]{\frac{x^{c/a}}{x^{a/c}}}\times\sqrt[ab]{\frac{x^{a/b}}{x^{b/a}}}$

$$=\left(\frac{x^{b/c}}{x^{c/b}}\right)^{\frac{1}{bc}}\times\left(\frac{x^{c/a}}{x^{a/c}}\right)^{\frac{1}{ca}}\times\left(\frac{x^{a/b}}{x^{b/a}}\right)^{\frac{1}{ab}}$$

$$=\left(x^{\frac{b}{c}-\frac{c}{b}}\right)^{\frac{1}{bc}}\times\left(x^{\frac{c}{a}-\frac{a}{c}}\right)^{\frac{1}{ca}}\times\left(x^{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}\right)^{\frac{1}{ab}} \qquad \left[\because\frac{x^{r}}{x^{s}}=x^{r-s}\right]$$

$$=\left(x^{\frac{b^{2}-c^{2}}{bc}}\right)^{\frac{1}{bc}}\times\left(x^{\frac{c^{2}-a^{2}}{ca}}\right)^{\frac{1}{ca}}\times\left(x^{\frac{a^{2}-b^{2}}{ab}}\right)^{\frac{1}{ab}}$$

$$=x^{\frac{b^{2}-c^{2}}{b^{2}c^{2}}}.x^{\frac{c^{2}-a^{2}}{c^{2}a^{2}}}.x^{\frac{a^{2}-b^{2}}{a^{2}b^{2}}} \qquad [\because (x^{r})^{s}=x^{rs}]$$

$$=x^{\frac{b^{2}-c^{2}}{b^{2}c^{2}}+\frac{c^{2}-a^{2}}{c^{2}a^{2}}+\frac{a^{2}-b^{2}}{a^{2}b^{2}}}$$

$$=x^{\frac{a^{2}\left(b^{2}-c^{2}\right)+b^{2}\left(c^{2}-a^{2}\right)+c^{2}\left(a^{2}-b^{2}\right)}{a^{2}b^{2}c^{2}}}$$

$$=x^{\frac{a^{2}b^{2}-c^{2}a^{2}+b^{2}c^{2}-a^{2}b^{2}+c^{2}a^{2}-b^{2}c^{2}}{a^{2}b^{2}c^{2}}}$$

$$=x^{\frac{0}{a^{2}b^{2}c^{2}}}=x^{0}=1$$

Ans. 1

বিকল্প সমাধান: $\sqrt[bc]{\frac{x^{b/c}}{x^{c/b}}}\times\sqrt[ca]{\frac{x^{c/a}}{x^{a/c}}}\times\sqrt[ab]{\frac{x^{a/b}}{x^{b/a}}}$

$$=\frac{x^{\frac{b}{c}\times\frac{1}{bc}}}{x^{\frac{c}{b}\times\frac{1}{bc}}}\times\frac{x^{\frac{c}{a}\times\frac{1}{ca}}}{x^{\frac{a}{c}\times\frac{1}{ca}}}\times\frac{x^{\frac{a}{b}\times\frac{1}{ab}}}{x^{\frac{b}{a}\times\frac{1}{ab}}}$$

$$=\frac{x^{\frac{1}{c^{2}}}}{x^{\frac{1}{b^{2}}}}\times\frac{x^{\frac{1}{a^{2}}}}{x^{\frac{1}{c^{2}}}}\times\frac{x^{\frac{1}{b^{2}}}}{x^{\frac{1}{a^{2}}}}$$

$$=1$$

Ans. 1

(চ) $\frac{(a^{2}-b^{-2})^{a}(a-b^{-1})^{b-a}}{(b^{2}-a^{-2})^{b}(b+a^{-1})^{a-b}}$

সমাধান: $\frac{\left(a^{2}-b^{-2}\right)^{a}\left(a-b^{-1}\right)^{b-a}}{\left(b^{2}-a^{-2}\right)^{b}\left(b+a^{-1}\right)^{a-b}}$

$$=\frac{\left(a^{2}-\frac{1}{b^{2}}\right)^{a}\left(a-\frac{1}{b}\right)^{b-a}}{\left(b^{2}-\frac{1}{a^{2}}\right)^{b}\left(b+\frac{1}{a}\right)^{a-b}}$$

$$=\frac{\left\{\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(a-\frac{1}{b}\right)\right\}^{a}\left(a-\frac{1}{b}\right)^{b-a}}{\left\{(b+\frac{1}{a})(b-\frac{1}{a})\right\}^{b}(b+\frac{1}{a})^{a-b}}$$

$$=\frac{\left(a+\frac{1}{b}\right)^{a}\left(a-\frac{1}{b}\right)^{a}\left(a-\frac{1}{b}\right)^{b-a}}{\left(b+\frac{1}{a}\right)^{b}\left(b-\frac{1}{a}\right)^{b}\left(b+\frac{1}{a}\right)^{a-b}}$$

$$=\frac{\left(a+\frac{1}{b}\right)^{a}\left(a-\frac{1}{b}\right)^{a+b-a}}{\left(b-\frac{1}{a}\right)^{b}\left(b+\frac{1}{a}\right)^{b+a-b}}$$

$$=\frac{\left(a+\frac{1}{b}\right)^{a}\left(a-\frac{1}{b}\right)^{b}}{\left(b-\frac{1}{a}\right)^{b}\left(b+\frac{1}{a}\right)^{a}}$$

$$=\frac{\left(\frac{ab+1}{b}\right)^{a}\left(\frac{ab-1}{b}\right)^{b}}{\left(\frac{ab-1}{a}\right)^{b}\left(\frac{ab+1}{a}\right)^{a}}$$

$$=\left(\frac{\frac{ab+1}{b}}{\frac{ab+1}{a}}\right)^{a}\times\left(\frac{\frac{ab-1}{b}}{\frac{ab-1}{a}}\right)^{b}$$

$$=\left(\frac{ab+1}{b}\times\frac{a}{ab+1}\right)^{a}\times\left(\frac{ab-1}{b}\times\frac{a}{ab-1}\right)^{b}$$

$$=\left(\frac{a}{b}\right)^{a}\times\left(\frac{a}{b}\right)^{b}$$

$$=\left(\frac{a}{b}\right)^{a+b}$$

Ans. $\left(\frac{a}{b}\right)^{a+b}$

[বি.দ্র. পাঠ্যবইয়ের প্রশ্নে b^2 এর স্থলে b^{-2} হবে।]

৬. দেখাও যে,

(ক) যদি $x = a^{q+r}b^p, y = a^{r+p}b^q, z = a^{p+q}b^r$ হয়, তবে $x^{q-r}.y^{r-p}.z^{p-q} = 1$

(খ) যদি $a^p = b, b^q = c$ এবং $c^r = a$ হয়, তবে $pqr = 1$

(গ) যদি $a^x = p, a^y = q$ এবং $a^2 = (p^y.q^x)^z$ হয়, তবে $xyz = 1$

সমাধান:

(ক) দেওয়া আছে, $x = a^{q+r}b^p, y = a^{r+p}b^q, z = a^{p+q}b^r$

বামপক্ষ $= x^{q-r}.y^{r-p}.z^{p-q}$

$= (a^{q+r}b^p)^{q-r}(a^{r+p}b^q)^{r-p}(a^{p+q}b^r)^{p-q}$ [মান বসিয়ে]

$= a^{(q+r)(q-r)}b^{p(q-r)}a^{(r+p)(r-p)}b^{q(r-p)}a^{(p+q)(p-q)}b^{r(p-q)}$

$= a^{q^2-r^2}.b^{pq-rp}.a^{r^2-p^2}.b^{qr-pq}.a^{p^2-q^2}.b^{rp-qr}$

$= a^{q^2-r^2+r^2-p^2+p^2-q^2}.b^{pq-rp+qr-pq+rp-qr}$

$= a^0.b^0$

$= 1.1$ $[\because a^0 = 1.]$

$= 1 =$ ডানপক্ষ

$\therefore x^{q-r}y^{r-p}z^{p-q} = 1$ **(দেখানো হলো)**

(খ) দেওয়া আছে, $a^p = b, b^q = c, c^r = a$

এখানে, $c^r = a$

বা, $(b^q)^r = a$ $[\because b^q = c]$

বা, $b^{qr} = a$ $[\because (a^r)^s = a^{rs}]$

বা, $(a^p)^{qr} = a$ $[\because a^p = b]$

বা, $a^{pqr} = a$ $[\because (a^r)^s = a^{rs}]$

বা, $a^{pqr} = a^1$

$\therefore pqr = 1$ **(দেখানো হলো)**

(গ) দেওয়া আছে, $a^x = p, a^y = q$ এবং $a^2 = (p^y q^x)^z$

এখানে, $(p^y q^x)^z = a^2$

বা, $\left\{(a^x)^y(a^y)^x\right\}^z = a^2$ $[\because p = a^x, q = a^y]$

বা, $(a^{xy}a^{xy})^z = a^2$ $[\because (a^r)^s = a^{rs}]$

বা, $(a^{xy+xy})^z = a^2$ $[\because a^r.a^s = a^{r+s}]$

বা, $(a^{2xy})^z = a^2$

বা, $a^{2xyz} = a^2$ $(\because (a^r)^s = a^{rs}]$

বা, $2xyz = 2$

$\therefore xyz = 1$ **(দেখানো হলো)**

৭. (ক) যদি $x\sqrt[3]{a} + y\sqrt[3]{b} + z\sqrt[3]{c} = 0$ এবং $a^2 = bc$ হয়, তবে দেখাও যে, $ax^3 + by^3 + cz^3 = 3axyz$

সমাধান: দেওয়া আছে,

$x\sqrt[3]{a} + y\sqrt[3]{b} + z\sqrt[3]{c} = 0$ এবং $a^2 = bc$

এখানে, $x\sqrt[3]{a} + y\sqrt[3]{b} + z\sqrt[3]{c} = 0$

বা, $x\sqrt[3]{a} = -\left(y\sqrt[3]{b} + z\sqrt[3]{c}\right)$

বা, $\left(x\sqrt[3]{a}\right)^3 = \left\{-\left(y\sqrt[3]{b} + z\sqrt[3]{c}\right)\right\}^3$ [উভয় পক্ষকে ঘন করে]

বা, $x^3\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 = -y^3\left(b^{\frac{1}{3}}\right)^3 - z^3\left(c^{\frac{1}{3}}\right)^3 - 3y\sqrt[3]{b}\,z\sqrt[3]{c}\left(y\sqrt[3]{b} + z\sqrt[3]{c}\right)$

$[\because (x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)]$

বা, $ax^3 = -by^3 - cz^3 - 3yz\sqrt[3]{bc}\left(-x\sqrt[3]{a}\right)$

$\left[\because x\sqrt[3]{a} = -\left(y\sqrt[3]{b} + z\sqrt[3]{c}\right)\right]$

বা, $ax^3 + by^3 + cz^3 = 3xyz\left(a^2\right)^{\frac{1}{3}}(a)^{\frac{1}{3}}$ $[\because a^2 = bc]$

বা, $ax^3 + by^3 + cz^3 = 3xyz\,a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}$

$\therefore ax^3 + by^3 + cz^3 = 3axyz$ **(দেখানো হলো)**

(খ) যদি $x = (a+b)^{\frac{1}{3}} + (a-b)^{\frac{1}{3}}$ এবং $a^2 - b^2 = c^3$ হয়, তবে দেখাও যে, $x^3 - 3cx - 2a = 0$

সমাধান: দেওয়া আছে,

$x = (a+b)^{\frac{1}{3}} + (a-b)^{\frac{1}{3}}$ এবং $a^2 - b^2 = c^3$

এখানে, $x = (a+b)^{\frac{1}{3}} + (a-b)^{\frac{1}{3}}$

বা, $x^3 = \left\{(a+b)^{\frac{1}{3}} + (a-b)^{\frac{1}{3}}\right\}^3$ [উভয় পক্ষকে ঘন করে]

বা, $x^3 = \left\{(a+b)^{\frac{1}{3}}\right\}^3 + \left\{(a-b)^{\frac{1}{3}}\right\}^3 + 3.(a+b)^{\frac{1}{3}}(a-b)^{\frac{1}{3}}\left\{(a+b)^{\frac{1}{3}} + (a-b)^{\frac{1}{3}}\right\}$ $[\because (x+y)^3 = x^3+y^3+3xy(x+y)]$

বা, $x^3 = a + b + a - b + 3(a^2 - b^2)^{\frac{1}{3}}.x$

$\left[\because (a+b)^{\frac{1}{3}} + (a-b)^{\frac{1}{3}} = x\right]$

বা, $x^3 = 2a + 3.(c^3)^{\frac{1}{3}}.x$ $[\because a^2 - b^2 = c^3]$

বা, $x^3 = 2a + 3cx$

$\therefore x^3 - 3cx - 2a = 0$ **(দেখানো হলো)**

(গ) যদি $a = 2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}$ হয়, তবে দেখাও যে, $2a^3 - 6a = 5$

সমাধান: দেওয়া আছে, $a = 2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}$

বা, $a^3 = \left(2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}\right)^3$ [উভয় পক্ষকে ঘন করে]

বা, $a^3 = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3 + \left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^3 + 3\cdot2^{\frac{1}{3}}\cdot2^{-\frac{1}{3}}\left(2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}\right)$

$[\because (x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x+y)]$

বা, $a^3 = 2^1 + 2^{-1} + 3\cdot2^0\cdot a$

$\left[\because 2^{\frac{1}{3}}\cdot2^{-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}} = 2^0 \text{ এবং } 2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}} = a\right]$

বা, $a^3 = 2 + \frac{1}{2} + 3a$

বা, $a^3 = \frac{4+1+6a}{2}$

বা, $2a^3 = 4 + 1 + 6a$

$\therefore 2a^3 - 6a = 5$ **(দেখানো হলো)**

(ঘ) যদি $a^2 + 2 = 3^{\frac{2}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}}$ এবং $a \geq 0$ হয়, তবে দেখাও যে, $3a^3 + 9a = 8$

সমাধান: দেওয়া আছে,

$a^2 + 2 = 3^{\frac{2}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}}$

বা, $a^2 = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2 + \left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^2 - 2$

বা, $a^2 = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2 + \left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^2 - 2\cdot3^{\frac{1}{3}}\cdot3^{-\frac{1}{3}}$ $\left[\because 3^{\frac{1}{3}}.3^{-\frac{1}{3}} = 3^0 = 1\right]$

বা, $a^2 = \left(3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}\right)^2$

বা, $a = 3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}$ [উভয় পক্ষে বর্গমূল এবং $\because a \geq 0$ যেহেতু ধনাত্মক মান নিয়ে]

বা, $a^3 = \left(3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}\right)^3$ [উভয় পক্ষকে ঘন করে]

বা, $a^3 = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^3 - 3 \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{-\frac{1}{3}}\left(3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}\right)$

$[\because (a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab\,(a-b)]$

বা, $a^3 = 3 - 3^{-1} - 3\,.\,3^0.a$

$\left[\because 3^{\frac{1}{3}}.3^{-\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}} = 3^0\right.$ এবং $\left.3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}} = a\right]$

বা, $a^3 = 3 - \frac{1}{3} - 3a$

বা, $a^3 + 3a = \frac{8}{3}$

$\therefore 3a^3 + 9a = 8$ **(দেখানো হলো)**

[বি. দ্র. পাঠ্য বইয়ের প্রশ্নে $3^{\frac{1}{3}}$এর স্থলে $3^{\frac{2}{3}}$ হবে]

(ঙ) যদি $a^2 = b^3$ হয়, তবে দেখাও যে, $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{3}}$

সমাধান: এখানে, $a^2 = b^3 \quad \therefore a = b^{\frac{3}{2}}$

আবার, $a^2 = b^3$

বা, $b^3 = a^2$

$\therefore b = a^{\frac{2}{3}}$

এখন, বামপক্ষ $= \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}}$

$= \frac{a^{3/2}}{b^{3/2}} + \frac{b^{2/3}}{a^{2/3}}$

$= \frac{a^{3/2}}{a} + \frac{b^{2/3}}{b}$ $\left[\because a = b^{3/2}, b = a^{2/3}\right]$

$= a^{\frac{3}{2}-1} + b^{\frac{2}{3}-1}$

$= a^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{3}}$

= ডানপক্ষ

$\therefore \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{2}} + b^{-\frac{1}{3}}$ **(দেখানো হলো)**

(চ) যদি $b = 1 + 3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}$ হয়,তবে দেখাও যে, $b^3 - 3b^2 - 6b - 4 = 0$

সমাধান: এখানে,

$b = 1 + 3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}$

বা, $b - 1 = 3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}$

বা, $(b-1)^3 = \left(3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}\right)^3$ [উভয় পক্ষকে ঘন করে]

বা, $b^3 - 3b^2 + 3b - 1 = \left(3^{\frac{2}{3}}\right)^3 + \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3 + 3.3^{\frac{2}{3}}.3^{\frac{1}{3}}\left(3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}\right)$

$[\because (x+y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy\,(x+y)]$

বা, $b^3 - 3b^2 + 3b - 1 = 3^2 + 3 + 3 \cdot 3^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}} \cdot (b-1)$

$\left[\because 3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}} = b - 1\right]$

বা, $b^3 - 3b^2 + 3b - 1 = 9 + 3 + 3 \cdot 3^1(b-1)$

বা, $b^3 - 3b^2 + 3b - 1 = 12 + 9b - 9$

বা, $b^3 - 3b^2 + 3b - 1 - 12 - 9b + 9 = 0$

$\therefore b^3 - 3b^2 - 6b - 4 = 0$ **(দেখানো হলো)**

(ছ) যদি $a + b + c = 0$ হয়, তবে দেখাও যে,

$$\frac{1}{x^b + x^{-c} + 1} + \frac{1}{x^c + x^{-a} + 1} + \frac{1}{x^a + x^{-b} + 1} = 1$$

সমাধান:

বামপক্ষ $= \frac{1}{x^b + x^{-c} + 1} + \frac{1}{x^c + x^{-a} + 1} + \frac{1}{x^a + x^{-b} + 1}$

$= \frac{1}{x^b + \frac{1}{x^c} + 1} + \frac{1}{x^c + x^{-a} + 1} + \frac{1}{x^a + x^{-b} + 1}$

$= \frac{x^c}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{1}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{1}{x^a + \frac{1}{x^b} + 1}$

$[\because a + b + c = 0 \therefore b + c = -a]$

$= \frac{x^c}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{1}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{x^b}{x^{a+b} + x^b + 1}$

$= \frac{x^c}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{1}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{x^b}{x^{-c} + x^b + 1}$

$= \frac{x^c}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{1}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{x^b}{\frac{1}{x^c} + x^b + 1}$

$= \frac{x^c}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{1}{1 + x^c + x^{b+c}} + \frac{x^b.x^c}{1 + x^c + x^{b+c}}$

$= \frac{x^c + 1 + x^{b+c}}{1 + x^c + x^{b+c}} = \frac{1 + x^c + x^{b+c}}{1 + x^c + x^{b+c}} = 1$

$\therefore \frac{1}{x^b + x^{-c} + 1} + \frac{1}{x^c + x^{-a} + 1} + \frac{1}{x^a + x^{-b} + 1} = 1$ **(দেখানো হলো)**

৮. (ক) যদি $a^x = b, b^y = c$ এবং $c^z = 1$ হয়, তবে $xyz =$ কত?

সমাধান: দেওয়া আছে,

$c^z = 1$

বা, $(b^y)^z = 1 \quad [\because b^y = c]$

বা, $\{(a^x)^y\}^z = 1 \quad [\because a^x = b]$

বা, $\{a^{xy}\}^z = 1$

বা, $a^{xyz} = a^o$

$\therefore xyz = 0$ **(Ans.)**

[বি: দ্র: পাঠ্যবইয়ের উত্তর ভুল আছে]

(খ) যদি $x^a = y^b = z^c$ এবং $xyz = 1$ হয়, তবে $ab + bc + ca =$ কত?

সমাধান: ধরি, $x^a = y^b = z^c = k$

$\therefore x^a = k$

$\therefore x = k^{\frac{1}{a}}$

অনুরূপভাবে, $y = k^{\frac{1}{b}}$ এবং $z = k^{\frac{1}{c}}$

এখন, $xyz = 1$

বা, $k^{\frac{1}{a}}.k^{\frac{1}{b}}.k^{\frac{1}{c}} = 1 \quad [\because x = k^{\frac{1}{a}}, y = k^{\frac{1}{b}}$ এবং $z = k^{\frac{1}{c}}]$

বা, $k^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = 1$

বা, $k^{\frac{bc + ca + ab}{abc}} = k^{\circ}$

বা, $\frac{ab + bc + ca}{abc} = 0$

বা, $ab + bc + ca = 0 \times abc$

$\therefore ab + bc + ca = 0$ **(Ans.)**

(গ) যদি $9^x = (27)^y$ হয়, তাহলে $\frac{x}{y}$ এর মান কত?

সমাধান: দেওয়া আছে, $9^x = (27)^y$

বা, $(3^2)^x = (3^3)^y$

বা, $3^{2x} = 3^{3y}$

বা, $2x = 3y$

$\therefore \frac{x}{y} = \frac{3}{2}$ **(Ans.)**

৯. সমাধান কর:

(ক) $3^{2x+2} + 27^{x+1} = 36$

সমাধান: $3^{2x+2} + 27^{x+1} = 36$

বা, $3^{2x+2} + (3^3)^{x+1} = 36$

বা, $3^{2x+2} + 3^{3x+3} = 36$

বা, $\{3^{(x+1)}\}^2 + \{3^{(x+1)}\}^3 = 36$

বা, $a^2 + a^3 = 36$ [$3^{(x+1)} = a$ ধরে]

বা, $a^3 + a^2 - 36 = 0$

বা, $a^3 - 3a^2 + 4a^2 - 12a + 12a - 36 = 0$

বা, $a^2(a-3) + 4a(a-3) + 12(a-3) = 0$

বা, $(a-3)(a^2 + 4a + 12) = 0$

হয়, $a - 3 = 0$

$\therefore a = 3$

বা, $3^{x+1} = 3^1$ [a এর মান বসিয়ে]

বা, $x + 1 = 1$

$\therefore x = 0$

অথবা, $a^2 + 4a + 12 = 0$

$\therefore a = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.1.12}}{2.1}$

$\therefore a = \frac{-4 \pm \sqrt{16-48}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-32}}{2}$

$\therefore a^2 + 4a + 12 \neq 0$

কারণ a এর কোনো বাস্তবমান উপরিউক্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করে না।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 0$

(খ) $5^x + 3^y = 8$

$5^{x-1} + 3^{y-1} = 2$

সমাধান: $5^x + 3^y = 8$ .... (i)

$5^{x-1} + 3^{y-1} = 2$ .... (ii)

(ii) নং থেকে পাই,

$5^{x-1} + 3^{y-1} = 2$

বা, $\frac{5^x}{5} + 3^{y-1} = 2$

$\therefore 5^x + 5.\ 3^{y-1} = 10$ .... (iii)

সমীকরণ, (iii) থেকে (i) বিয়োগ করে পাই,

$5.3^{y-1} - 3^y = 2$

বা, $5.\frac{3^y}{3} - 3^y = 2$

বা, $5.3^y - 3^y.3 = 6$

বা, $2.3^y = 6$

বা, $3^y = 3$

বা, $3^y = 3^1$

$\therefore y = 1$

(iii) নং এ $y = 1$ বসিয়ে পাই,

$5^x + 5.3^{1-1} = 10$

বা, $5^x + 5.1 = 10$ [$\therefore 3^0 = 1$]

বা, $5^x = 10 - 5$

বা, $5^x = 5$

বা, $5^x = 5^1$

$\therefore x = 1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $(x, y) = (1,1)$

(গ) $4^{3y-2} = 16^{x+y}$

$3^{x+2y} = 9^{2x+1}$

সমাধান: $4^{3y-2} = 16^{x+y}$ .... (i)

$3^{x+2y} = 9^{2x+1}$ .... (ii)

(i) নং থেকে পাই,

$4^{3y-2} = (4^2)^{x+y}$

বা, $4^{3y-2} = 4^{2x+2y}$

বা, $3y - 2 = 2x + 2y$

$\therefore 2x - y + 2 = 0$ .... (iii)

(ii) নং থেকে পাই,

$3^{x+2y} = (3^2)^{2x+1}$

বা, $3^{x+2y} = 3^{4x+2}$

বা, $x + 2y = 4x + 2$

$\therefore 3x - 2y + 2 = 0$ .... (iv)

(iii) নং কে 3 দ্বারা এবং (iv) নং কে 2 দ্বারা গুণ করে বিয়োগ করে পাই,

$$\begin{array}{l} \quad 6x - 3y + 6 = 0 \\ \quad 6x - 4y + 4 = 0 \\ \ - \qquad + \qquad - \\ \hline \therefore \qquad y + 2 = 0 \end{array}$$

$\therefore y = -2$

y এর মান (iv) নং এ বসিয়ে পাই,

$3x + 4 + 2 = 0$

বা, $3x + 6 = 0$

বা, $3x = -6$

$\therefore x = -2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $(x, y) = (-2, -2)$

[বি: দ্র: পাঠ্যবইয়ের উত্তর ভুল আছে]

(ঘ) $2^{2x+1}.2^{3y+1} = 8$

$2^{x+2}.2^{y+2} = 16$

সমাধান:

$2^{2x+1}.2^{3y+1} = 8$ ....(i)

$2^{x+2}.2^{y+2} = 16$ ....(ii)

(i) নং থেকে পাই,

$2^{2x+1}.2^{3y+1} = 8$

বা, $2^{2x+1+3y+1} = 2^3$

বা, $2^{2x+3y+2} = 2^3$

বা, $2x + 3y + 2 = 3$

$\therefore 2x + 3y - 1 = 0$ .... (iii)

(ii) নং থেকে পাই,

$2^{x+2}.2^{y+2} = 16$

বা, $2^{x+2+y+2} = 2^4$

বা, $x + y + 4 = 4$

বা, $x + y = 0$

$\therefore x = -y$ .... (iv)

(iv) নং থেকে x এর মান (iii) নং এ বসিয়ে পাই,

$-2y + 3y - 1 = 0$

$\therefore y = 1$

(iv) নং $y = 1$ বসিয়ে পাই,

$\therefore x = -1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $(x, y) = (-1, 1)$

মাস্টার ট্রেইনার প্রণীত সৃজনশীল বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

★★ ৯.১ মূলদ ও অমূলদ সূচক | Text পৃষ্ঠা-১৮১

- মূলদ সূচক সম্বলিত a^m আকারে প্রতীকে a কে নিধান বা ভিত্তি (base) এবং m কে a এর ঘাতের সূচক (exponent) বলা হয়। a^m কে a এর m ঘাত বা শক্তি (power) বলা হয় এবং a ঘাত m(a to the power m) পড়া হয়।
- $\mathbb{R}$ সকল বাস্তব সংখ্যার সেট, $\mathbb{N}$ সকল স্বাভাবিক সংখ্যা বা ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যার সেট, Z সকল পূর্ণ সংখ্যার সেট ও Q সকল মূলদ সংখ্যার সেট।
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$।
- অমূলদ সংখ্যার সেট $Q' = \mathbb{R}/Q$

১. সকল মূলদ ও অমূলদ সংখ্যার সেট কোনটি? (মধ্যম)
(ক) $\mathbb{N}$ (খ) Z (গ) Q (ঘ) R **গ**

২. $a \neq 0$ এবং a ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হলে, a^n কী নির্দেশ করে? (সহজ)
(ক) n সংখ্যক a এর গুণফল (খ) n সংখ্যক a এর যোগফল
(গ) a এবং n এর গুণফল (ঘ) a সংখ্যক n এর গুণফল **ক**

৩. $(\sqrt{3})^5$ সূচকীয় রাশির নিধান বা ভিত্তি কত? (মধ্যম)
(ক) 5 (খ) $\sqrt{3}$ (গ) $\frac{5}{2}$ (ঘ) 3 **ঘ**

ব্যাখ্যা: ভিত্তি সব সময় একটি অখণ্ড সংখ্যা।
এখানে $(\sqrt{3})^5 = 3^{\frac{5}{2}}$ ∴ ভিত্তি 3

৪. সকল বাস্তব সংখ্যার ক্ষেত্রে—
i. $\mathbb{N} \subset Q$
ii. $R \subset Z$
iii. $Q \subset R$
নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)
(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii **খ**

৫. বাস্তব সংখ্যার ক্ষেত্রে—[বি কে জি সি সরকারী বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, হবিগঞ্জ]
i. $\mathbb{R}$ সকল বাস্তব সংখ্যার সেট।
ii. $\mathbb{N}$ সকল পূর্ণ সংখ্যার সেট।
iii. Q সকল মূলদ সংখ্যার সেট।
নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)
(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii **খ**

৬. যদি $p > 0, n \geq 1$ হয় তবে, p^n = কত? (মধ্যম)
i. $p \times p \times p \times \ldots\ldots \times p$ (n সংখ্যক p এর গুণন)
ii. $p^{1+1+1 \ldots\ldots +1}$ (n সংখ্যক 1 এর যোগ)
iii. $p^{1 \times 1 \times 1 \ldots\ldots \times 1}$
নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)
(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii **ক**

ব্যাখ্যা: $1 + 1 + 1 + \ldots\ldots\ldots + 1 = n.1 = n$
এবং, $1 \times 1 \times 1 \times \ldots\ldots\ldots \times 1 = 1^n = 1$

৭. $(ab)^n$ =
i. n সংখ্যক ab এর ক্রমিক গুণ
ii. n সংখ্যক a এর গুণ × n সংখ্যক b এর গুণ
iii. $(a^{1+1+1+\ldots\ldots+1}) \times (b^{1+1+1+\ldots\ldots+1})$ বা, (n সংখ্যক 1 এর যোগ)
নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)
(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii **ঘ**

৮. অমূলদ সংখ্যার ক্ষেত্রে—
i. $\sqrt{3}$ একটি অমূলদ সংখ্যা
ii. $\frac{p}{q}$ আকারের সংখ্যা অমূলদ সংখ্যা যেখানে $a > 1$
iii. পূর্ণ সংখ্যার ঘাত অমূলদ সংখ্যা হলে সংখ্যাটি অমূলদ।
নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)
(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii **খ**

৯. মূলদ সংখ্যা Q ও অমূলদ সংখ্যা Q' হলে—
i. $R = Q \cup Q'$
ii. $Q \cap Q' = \phi$
iii. $(Q')^{2n} \in Q, n \in \mathbb{N}$
নিচের কোনটি সঠিক? (কঠিন)
(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii **ক**

নিচের তথ্যের আলোকে (১০-১১) নং প্রশ্নের উত্তর দাও।
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

১০. $\mathbb{N}$ দ্বারা নিচের কোনটি বুঝায়? (সহজ) [ফেনী সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, ফেনী]
(ক) সকল বাস্তব সংখ্যার সেট
(খ) সকল ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যার সেট
(গ) সকল ধনাত্মক ও ঋণাত্মক সংখ্যার সেট
(ঘ) সকল মূলদ সংখ্যার সেট **খ**

১১. Z এর বর্গের সেট কোনটি? (মধ্যম)
(ক) বাস্তব সংখ্যার সেট (খ) অমূলদ সংখ্যার সেট
(গ) ঋণাত্মক সংখ্যার সেট (ঘ) জোড় সংখ্যার সেট **ক**

★★★ ৯.২ সূচক সম্পর্কিত সূত্র | Text পৃষ্ঠা-১৮২

- $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ হলে, $a^1 = a$
  $a^{n+1} = a^n.a$
- $a \in \mathbb{R}$ এবং $m, n \in \mathbb{N}$ হলে, $a^m.a^n = a^{m+n}$
- এখানে, $a^m.a^n = a^{m+n}$ কে সূচকের মৌলিক সূত্র বলা হয়।
- $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ এবং $m, n \in \mathbb{N}$ হলে, $\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n}, \text{hLb } m > n \\ \frac{1}{a^{n-m}}, \text{hLb } n > m \end{cases}$
- $a \in \mathbb{R}$ এবং $m, n \in \mathbb{N}$ হলে, $(a^m)^n = a^{mn}$
- $a, b \in \mathbb{R}$ এবং $n \in \mathbb{N}$ হলে, $(a.b)^n = a^n.b^n$
- $a \neq 0, b \neq 0$ এবং $m, n \in \mathbb{Z}$ হলে,(i) $a^m.a^n = a^{m+n}$ (ii) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
  (iii) $(a^m)^n = a^{mn}$ (iv) $(ab)^n = a^n.b^n$ (v) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

১২. $a \in \mathbb{R}, a \neq 0, m, n \in \mathbb{N}$ এবং $m < n$ হলে $\frac{a^m}{a^n}$ = ? (সহজ)
(ক) a^{n-m} (খ) a^{m+n} (গ) $\frac{1}{a^{m-n}}$ (ঘ) $\frac{1}{a^{n-m}}$ **ঘ**

১৩. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, এক্ষেত্রে কোন শর্তটি সঠিক? (সহজ)
(ক) $a > 1$ (খ) $a < 1$ (গ) $a \neq 0$ (ঘ) $a = 0$ **গ**

১৪. $a \neq 0$ হলে, a^0 = কত? (সহজ)
(ক) 1 (খ) a (গ) 0 (ঘ) ∞ **ক**

১৫. $a \neq 0, b \neq 0$ এবং $m, n \in \mathbb{Z}$ হলে $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}$ = কোনটি? (সহজ)
(ক) $\frac{a^n}{b^n}$ (খ) $\frac{b^n}{a^n}$ (গ) $\frac{1}{a^n b^n}$ (ঘ) $\frac{1}{a^n}$ **খ**

১৬. 10^{-0} = কত? (সহজ)
(ক) 0 (খ) $\frac{1}{10}$ (গ) 1 (ঘ) 10 **গ**

১৭. $(a^p)^q$ = কত? (সহজ)
(ক) $a^{p/q}$ (খ) a^{p+q} (গ) $(a^q)^p$ (ঘ) a^{p^q} **গ**

১৮. $a^p \times a^{-p}$ = কত? (সহজ)
(ক) 0 (খ) 1 (গ) a^{2p} (ঘ) $\frac{1}{a^{2p}}$ **খ**

১৯. $(a^{-1})^{-1}$ = কত? যেখানে $a \in \mathbb{R}$ (সহজ)
(ক) 1 (খ) $\frac{1}{a}$ (গ) a (ঘ) a^2 **গ**

২০. $\left(\frac{a}{b}\right)^a \times \left(\frac{a}{b}\right)^b$ = কত? (সহজ)
(ক) $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}}$ (খ) $\left(\frac{a}{b}\right)^{a+b}$ (গ) $\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}$ (ঘ) $\left(\frac{a}{b}\right)^{b-a}$ **খ**

২১. $\left(a^{\frac{3}{2}} \; b^{\frac{2}{3}}\right)^6$ = কত? (মধ্যম) [সাবেরা সোবহান সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, ব্রাহ্মণবাড়ীয়া]
(ক) $a^9 b^3$ (খ) $a^4 b^4$ (গ) $a^9 b^4$ (ঘ) $a^4 b^9$ **গ**

ব্যাখ্যা: $\left(a^{\frac{3}{2}} \; b^{\frac{2}{3}}\right)^6 = \left(a^{\frac{3}{2}}\right)^6 \left(b^{\frac{2}{3}}\right)^6 = a^{\frac{3}{2} \times 6} \; b^{\frac{2}{3} \times 6} = a^9 b^4$

২২. $\left(\frac{2}{3}\right)^7 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-7}$ **= কত?** (সহজ)
(ক) 0 (খ) 1 (গ) $\frac{2^{14}}{3^{14}}$ (ঘ) 2^{14} খ

২৩. $\{1-(1-x^3)^{-1}\}^{-1}$ **= কত?** (কঠিন)
(ক) $\frac{1}{x^3}+1$ (খ) $1-\frac{1}{x^3}$ (গ) $\frac{1}{1+x^3}$ (ঘ) $\frac{2-x^3}{1-x^3}$ খ

ব্যাখ্যা: $\{1-(1-x^3)^{-1}\}^{-1} = \left(1-\frac{1}{1-x^3}\right)^{-1} = \left(\frac{1-x^3-1}{1-x^3}\right)^{-1}$
$= \frac{1-x^3}{-x^3} = \frac{1}{-x^3} - \frac{x^3}{-x^3} = 1-\frac{1}{x^3}$

২৪. $a=-2, b=3$ **হলে** $x^a \times \sqrt[a]{x^b}$ **= কত?** (মধ্যম)
(ক) $\frac{1}{\sqrt{x}}$ (খ) $\frac{1}{\sqrt{x^7}}$ (গ) $\sqrt{x}$ (ঘ) x^7 খ

ব্যাখ্যা: $x^a . x^{\frac{b}{a}} = x^{a+\frac{b}{a}} = x^{\frac{a^2+b}{a}} = x^{\frac{(-2)^2+3}{-2}} = x^{-\frac{7}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x^7}}$

২৫. $\sqrt{2\sqrt{a^4\frac{1}{a^2}}+a^2+1}$ **= কত?** (মধ্যম)
(ক) $\sqrt{a^2+3}$ (খ) a^2 (গ) $a+1$ (ঘ) $\sqrt{a+1}$ গ

ব্যাখ্যা: $\sqrt{2\sqrt{a^4.\frac{1}{a^2}}+a^2+1} = \sqrt{2\sqrt{a^2}+a^2+1}$
$= \sqrt{2a+a^2+1} = \sqrt{(a+1)^2} = a+1$

২৬. $\frac{x}{2} - \{x^{-1}+(2x^{-1}-x^{-1})\}^{-1}$ **= কত?**(মধ্যম)
(ক) 0 (খ) 1 (গ) x (ঘ) 2x ক

ব্যাখ্যা: $\frac{x}{2} - \{x^{-1}+(2x^{-1}-x^{-1})\}^{-1} = \frac{x}{2} - \left\{\frac{1}{x}+\left(\frac{2-1}{x}\right)\right\}^{-1}$
$= \frac{x}{2} - \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\right)^{-1} = \frac{x}{2} - \left(\frac{2}{x}\right)^{-1} = \frac{x}{2} - \frac{x}{2} = 0$

২৭. $m, n \in \mathbb{N}$ **এবং** $a \neq 0$ **হলে—**
i. $a^m . a^n = a^{m+n}$
ii. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
iii. $(a^m)^n = a^{mn}$
নিচের কোনটি সঠিক ? (সহজ)
(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii ঘ

২৮. $a \in \mathbb{R}$ **এবং** $a \neq 0$ **হলে—**
i. $a^0 = 0$
ii. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
iii. $a^{-n} . a^n = 1$
নিচের কোনটি সঠিক ? (সহজ)
(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii গ

২৯. $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a, b, c > 0$ **এবং** $m, n \in \mathbb{N}$ **হলে—**
i. $a^{m-n} b^n = a^m\left(\frac{b}{a}\right)^n$
ii. $a^{-2m} = \left(\frac{1}{a^m}\right)^2$
iii. $\sqrt[5]{a^{10}b^{15}} = a^2b^3$
নিচের কোনটি সঠিক ? (মধ্যম)
(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii গ

★★★ ৯.৩ মূল এর ব্যাখ্যা | Text পৃষ্ঠা-১৬৬|

- $a < 0$ এবং $n \in \mathbb{N}, n > 1$, n বিজোড় হলে, $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{|a|}$
- যদি $a > 0$ এবং $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ হয়, যেখানে, $m, p \notin \mathbb{Z}$, $n, q \in \mathbb{N}, n > 1$, $q > 1$, তবে $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[q]{a^p}$

৩০. $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ **এবং** $a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ **হলে x কে a এর n তম মূল হিসাবে প্রকাশ করে নিচের কোনটি?** (মধ্যম)
(ক) $n^x = a$ (খ) $\sqrt[n]{a} = x$ (গ) $\sqrt[n]{x} = a$ (ঘ) $x = a^n$ খ

ব্যাখ্যা: a এর n তম মূল হচ্ছে $\sqrt[n]{a}$, যা x দ্বারা প্রকাশ করলে হবে $\sqrt[n]{a} = x$ ।

৩১. 3 তম মূলকে বলা হয়– (সহজ)
(ক) বর্গমূল (খ) ঘনমূল (গ) চতুর্থাতমূল (ঘ) বর্গ খ

৩২. -8 **এর ঘনমূল কত?** (মধ্যম) [আইডিয়াল স্কুল এন্ড কলেজ, মতিঝিল, ঢাকা; মতিঝিল মডেল স্কুল এন্ড কলেজ, ঢাকা]
(ক) 2 (খ) -2 (গ) 4 (ঘ) -4 খ

ব্যাখ্যা: -8 এর ঘনমূল $\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2$

৩৩. 0 এর n তম মূল কত? (সহজ)
(ক) n (খ) 0 (গ) $\frac{1}{n}$ (ঘ) 1 খ

৩৪. a এর শূন্য (0) তম মূল কত? (সহজ)
(ক) 0 (খ) 1 (গ) $\frac{1}{a}$ (ঘ) ∞ ঘ

ব্যাখ্যা: $\sqrt[0]{a} = a^{\frac{1}{0}} = a^{\infty} = \infty$

৩৫. $a > 0$ **হলে নিচের কোনটি সঠিক?** (মধ্যম)
(ক) $\sqrt[n]{a} < 0$ (খ) $\sqrt[n]{a} > 0$ (গ) $\sqrt[n]{a} \leq 0$ (ঘ) $\sqrt[n]{a} \geq 0$ খ

৩৬. কোন শর্ত পূরণ করলে a এর n তম মূল পাওয়া যাবে? (মধ্যম)
(ক) $a > 0, n > 1$ হয় (খ) $a < 0, n < 1$ হয়
(গ) $a < 0, n > 1$ হয়
(ঘ) $a \in \mathbb{R}, n > 1$, n বিজোড় হয় ঘ

৩৭. নিচের কোন শর্ত পূরণ করলে a এর একটি n তম মূল ঋণাত্মক হবে? (সহজ)
(ক) $a > 0, n \in \mathbb{Z}, n < 1$ বিজোড় সংখ্যা হয়
(খ) $a > 0, n \in \mathbb{N}, n < 1$ জোড় সংখ্যা
(গ) $a < 0, n \in \mathbb{N}, n > 1$ বিজোড় সংখ্যা হয়
(ঘ) $a < 0, n \in \mathbb{Z}, n > 1$ জোড় সংখ্যা হয় গ

৩৮. $a > 0, m \in \mathbb{Z}$ **এবং** $n \in \mathbb{N}, n > 1$ **হলে** $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m$ **= কোনটি?** (কঠিন)
(ক) $a^{\frac{mn}{2}}$ (খ) $\sqrt[n]{a^m}$ (গ) $a^{\frac{n}{m}}$ (ঘ) $a^{\frac{1}{mn}}$ খ

৩৯. $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p$ **= কত? যেখানে,** $m, p \in \mathbb{R}$ **এবং** $n \in \mathbb{N}$ (সহজ)
(ক) $a^{\frac{m}{np}}$ (খ) $a^{\frac{mp}{n}}$ (গ) $a^{\frac{np}{m}}$ (ঘ) $a^{\frac{p}{mn}}$ খ

৪০. যদি $a > 0$ **এবং** $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ **হয়, যেখানে** $m, p \in \mathbb{Z}$ **এবং** $n, q \in \mathbb{N}, n > 1, q > 1$ **তবে** $\sqrt[n]{a^m}$ **= কত?** (কঠিন)
(ক) $\sqrt[q]{a^p}$ (খ) $\sqrt[p]{a^q}$ (গ) $\sqrt{a^{pq}}$ (ঘ) $\sqrt[pq]{a}$ ক

৪১. $\sqrt[12]{a^8\sqrt{a^6\sqrt{a^4}}}$ **এর সরল মান কত?** (মধ্যম)
(ক) a^{12} (খ) $a^{\frac{1}{12}}$ (গ) 1 (ঘ) a ঘ

ব্যাখ্যা: $\sqrt[12]{a^8\sqrt{a^6.a^{4\frac{1}{2}}}} = \sqrt[12]{a^8.\sqrt{a^{6+2}}} = \sqrt[12]{a^8 a^{8.\frac{1}{2}}} = \sqrt[12]{a^{12}} = a$

৪২. সূচকের ক্ষেত্রে—
i. $\sqrt{4} = 2$ ।
ii. $\sqrt[3]{-8} = -2$
iii. $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a \text{ যখন}, a \geq 0 \\ -a \text{ যখন}, a < 0 \end{cases}$
নিচের কোনটি সঠিক ? (মধ্যম)
(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii ঘ

৪৩. সূচকের ক্ষেত্রে—

i. 2 এবং – 2 উভয়ই 16 এর ৪র্থ মূল।
ii. – 27 এর ঘনমূল 3।
iii. – 9 এর কোনো বর্গমূল নাই কারণ যেকোনো বাস্তব সংখ্যার বর্গ অঋণাত্মক।

নিচের কোনটি সঠিক ? (মধ্যম)

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii **খ**

৪৪. $a > 0, n, k \in \mathbb{N}, n > 1$ হলে—

i. $a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$ ii. $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$ iii. $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{|a|}$

নিচের কোনটি সঠিক ? (মধ্যম)

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii **ক**

ব্যাখ্যা: $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{|a|}$ হবে যদি $a < 0$ এবং n বিজোড় সংখ্যা হয়।

৪৫. $a > 0; m, k \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{N}; n > 1$ হলে—

i. $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$ ii. $\left(\sqrt[n]{a^m}\right) = a^{\frac{n}{m}}$ iii. $\sqrt[m]{a^m} = a$

নিচের কোনটি সঠিক ? (মধ্যম)

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii **খ**

নিচের তথ্যের আলোকে (৪৬-৪৯) নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

$a < 0$ এবং $n \in \mathbb{N}, n > 1$

৪৬. n বিজোড় সংখ্যা হলে $\sqrt[n]{a}$ এ a এর কয়টি n তম মূল আছে? (সহজ)

(ক) 1 (খ) 2 (গ) $2n + 1$ (ঘ) n^2 **ক**

৪৭. n বিজোড় সংখ্যা হলে মূলটি কেমন হবে? (সহজ)

(ক) ধনাত্মক (খ) ঋণাত্মক
(গ) অঋণাত্মক (ঘ) ধনাত্মক ও ঋণাত্মক **খ**

৪৮. n জোড় সংখ্যা হলে a এর n তম মূল কয়টি? (মধ্যম)

(ক) 0 (খ) 1 (গ) 2 6 (ঘ) ∞ **খ**

৪৯. n বিজোড় হলে $(a)^{\frac{1}{n}} =$ (মধ্যম)

(ক) $-(|a|)^{\frac{1}{n}}$ (খ) $(a)^{-\frac{1}{n}}$ (গ) $(|a|)^{-\frac{1}{n}}$ (ঘ) $(|a|)^n$ **ক**

নিচের তথ্যের আলোকে (৫০-৫২) নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

$\sqrt[ab]{\frac{y^a}{y^b}}, \sqrt[bc]{\frac{y^b}{y^c}}, \sqrt[ca]{\frac{y^c}{y^a}}$ তিনটি রাশি।

৫০. প্রথম রাশির y^x আকারে প্রকাশিত রূপ কোনটি? (সহজ)

(ক) $\frac{1}{y^{\frac{a-b}{ab}}}$ (খ) $y^{\frac{a-b}{ab}}$ (গ) $\sqrt[ab]{y^{a-b}}$ (ঘ) $y^{\frac{ab}{a-b}}$ **খ**

৫১. $b = 2c$ হলে প্রথম ও তৃতীয় রাশির গুণফলের মান কোনটি? (সহজ)

(ক) $\frac{1}{\sqrt[c]{y}}$ (খ) $\frac{1}{\sqrt[2c]{y}}$ (গ) $\sqrt[c]{y}$ (ঘ) y^{2c} **খ**

ব্যাখ্যা: $\sqrt[2ac]{\frac{y^a}{y^{2c}}} \times \sqrt[ca]{\frac{y^c}{y^a}} = y^{\frac{a-2c}{2ac}} \times y^{\frac{c-a}{ca}}$

$= y^{\frac{a-2c}{2ac} + \frac{c-a}{ca}} = y^{\frac{a-2c+2c-2a}{2ac}} = y^{\frac{-a}{2ac}} = \frac{1}{\sqrt[2c]{y}}$

৫২. রাশি তিনটির গুণফলের মান কত?(কঠিন)

(ক) 0 (খ) 1 (গ) $y^{\frac{a-b}{abc}}$ (ঘ) $y^{\frac{a}{b}}$ **খ**

ব্যাখ্যা: $\sqrt[ab]{y^{a-b}} \times \sqrt[bc]{y^{b-c}} = y^{\frac{a-b}{ab}}\, y^{\frac{b-c}{bc}}\, y^{\frac{c-a}{ca}}$

$= y^{\frac{a-b}{ab} + \frac{b-c}{bc} + \frac{c-a}{ca}} = y^{\frac{ca-bc+ab-ca+bc-ab}{abc}}$

- $= y^{\frac{0}{abc}} = y^0 = 1$

★★★ ৯.৪ মূলদ ভগ্নাংশ সূচক | Text পৃষ্ঠা-১৮৭

- $a \in \mathbb{R}$ এবং $n \in \mathbb{N}, n > 1$ হলে, $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt{a}$ যখন $a > 0$ অথবা $a < 0$ এবং বিজোড়।
- $a > 0, m \in \mathbb{Z}$ এবং $n \in \mathbb{N}, n > 1$ হলে, $a^{\frac{m}{n}} = a^{\left(\frac{1}{n}\right)^m}$
- যদি $a^x = 1$ হয়, যেখানে $a > 0$ এবং $a \neq 1$ তাহলে $x = 0$
- যদি $a^x = 1$ হয়, যেখানে $a > 0$ এবং $x \neq 0$ তাহলে $a = 1$
- যদি $a^x = a^y$ হয়, যেখানে $a > 0$ এবং $a \neq 1$ তাহলে $x = y$
- যদি $a^x = b^x$ হয়, যেখানে $\frac{a}{b} > 0$ এবং $x \neq 0$ তাহলে $a = b$.

৫৩. $a > 0$ হলে সকল $x \in \mathbb{R}$ এর জন্যে কোনটি সঠিক? (সহজ)
[শহীদ বীর উত্তম লেঃ আনোয়ার গার্লস কলেজ, ঢাকা]

(ক) $\frac{-1}{a^x} > 0$ (খ) $a^x > 0$ (গ) $a^x < 0$ (ঘ) $a^x = 0$ **খ**

৫৪. সূচক নিয়ম $(a^m)^n = a^{mn}$ সত্য হলে $\left(\frac{1}{a^n}\right)^n =$ কত? (সহজ)

(ক) $\sqrt[n]{a}$ (খ) a (গ) $a^{\frac{1}{n}}$ (ঘ) a^n **খ**

৫৫. $a < 0$ এবং $n \in \mathbb{N}, n > 1$ এবং বিজোড় হলে $a^{\frac{1}{n}} =$ কত? (মধ্যম)

(ক) $|a|^{\frac{1}{n}}$ (খ) $-|a|^{\frac{1}{n}}$ (গ) $|-a|^{\frac{1}{n}}$ (ঘ) $|a^{\frac{1}{n}}|$ **খ**

৫৬. $n \in \mathbb{N}$ হলে এবং, $a > 1$ হলে $a^{\frac{1}{2n}} =$ কোনটি?(সহজ)

(ক) $\sqrt[n]{a}$ (খ) $\sqrt[2n]{a}$ (গ) $\sqrt{a^n}$ (ঘ) $\sqrt[n]{a^2}$ **খ**

৫৭. $m, n \in \mathbb{N}$ হলে, $\left(\frac{1}{a^m}\right)^{\frac{1}{n}} =$ কত? (সহজ)

(ক) $a^{\frac{n}{m}}$ (খ) $a^{\frac{m}{n}}$ (গ) a^{mn} (ঘ) $\frac{1}{a^{mn}}$ **ঘ**

৫৮. $a^{\frac{m}{n}} . a^{\frac{p}{q}} =$ কোনটি? (মধ্যম)

(ক) $a^{\frac{mq}{nq}} . a^{\frac{pm}{qn}}$ (খ) $\left(\frac{1}{a^{qn}}\right)^{pm}$
(গ) $a^{\frac{mq}{nq} + \frac{np}{mq}}$ (ঘ) $\left(\frac{1}{a^{nq}}\right)^{mq+np}$ **ঘ**

ব্যাখ্যা: $a^{\frac{m}{n}} . a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = \left(\frac{1}{a^{nq}}\right)^{mq+np}$

৫৯. যদি $a^x = 1, a > 0$ এবং $a \neq 0$ হয় তবে কোনটি সঠিক?(সহজ) [সাতক্ষীরা সরকারি মাধ্যমিক বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়]

(ক) $a = 1$ (খ) $x = 0$ (গ) $a = x$ (ঘ) $a = 0$ **খ**

৬০. যদি $a^p = b, b^q = c$ এবং $c^r = a$ হলে $pqr =$ কত? (কঠিন)

(ক) 1 (খ) 2 (গ) a^2 (ঘ) a^r **ক**

৬১. $9^x = (27)^y$ হলে $\frac{x}{y} =$ কত?(সহজ)

(ক) $\frac{2}{3}$ (খ) 2 (গ) $\frac{3}{2}$ (ঘ) 3 **গ**

ব্যাখ্যা: $3^{2x} = 3^{3y}$ বা, $2x = 3y$ বা $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$

৬২. $(\sqrt{3})^{x+5} = \left(\sqrt[3]{3}\right)^{2x+5}$ হলে x এর মান কত? (সহজ)

(ক) 4 (খ) 5 (গ) 6 (ঘ) 7 **খ**

ব্যাখ্যা: $3^{\frac{x+5}{2}} = 3^{\frac{2x+5}{3}}$ বা, $\frac{x+5}{2} = \frac{2x+5}{3}$ বা, $3(x+5) = 2(2x+5)$
বা, $3x + 15 = 4x + 10$ বা, $4x - 3x = 15 - 10$ $\therefore x = 5$

৬৩. যদি $a^b = b^a$ হয়, তবে $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}} =$ কত? (কঠিন)

(ক) $a^{\frac{a}{b}+1}$ (খ) $b^{\frac{b}{a}-1}$ (গ) $b^{\frac{a}{b}-1}$ (ঘ) $a^{\frac{a}{b}-1}$ **ঘ**

ব্যাখ্যা: $a^b = b^a$ বা, $a^{\frac{b}{a}} = b^{\frac{a}{a}} = b^1 = b$

$\therefore \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{a^{\frac{b}{a}}}\right)^{\frac{a}{b}} = \left(a^{1-\frac{b}{a}}\right)^{\frac{a}{b}} = a^{\frac{a}{b}\left(1-\frac{b}{a}\right)} = a^{\frac{a}{b}-1}$

৬৪. যদি $(\sqrt{x})^{(x\sqrt{x})} = (x\sqrt{x})^x$ হয় তবে x এর মান কত?(মধ্যম) [নরসিংদী সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়].

(ক) $\frac{9}{4}$ (খ) 4 (গ) 9 (ঘ) 18 **গ**

ব্যাখ্যা: $(\sqrt{x})^{x\sqrt{x}} = (x\sqrt{x})^x$ বা, $x^{\frac{x\sqrt{x}}{2}} = (x)^{\left(\frac{3}{2}\right)^x}$

বা $(x^x)^{\frac{\sqrt{x}}{2}} = (x^x)^{\frac{3}{2}}$ বা, $\frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{3}{2}$ বা, $\sqrt{x} = 3$ বা, $x = 9$

৬৫. $\sqrt{x^{-1}y}\,.\sqrt{y^{-1}z}\,.\sqrt{z^{-1}x}$ = কত? (সহজ)

(ক) 1 (খ) xyz (গ) $\frac{x}{y}$ (ঘ) $\frac{1}{x}$ **ক**

৬৬. যদি $\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{n}{m}} = m^{\frac{m}{n}-1}$ এবং $m = 2n$ হয় তবে n এর মান কত?(মধ্যম)

(ক) $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ (খ) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (গ) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ঘ) $\pm\sqrt{2}$ **খ**

ব্যাখ্যা: m = 2n হলে $\left(\frac{2n}{n}\right)^{\frac{n}{2n}} = (2n)^{\frac{2n}{n}-1}$

$(2)^{\frac{1}{2}} = (2n)^{2-1}$ বা, $\sqrt{2} = 2n$ বা, $n = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

৬৭. $a^{-x}(a^x + b^{-x}) = 1 + \frac{1}{a^2b^2}$ হলে x = কত? (মধ্যম)

(ক) −2 (খ) −1 (গ) 2 (ঘ) 3 **গ**

ব্যাখ্যা: $a^{-x}.a^x + a^{-x}.b^{-x} = 1 + (ab)^{-2}$

বা, $1 + (ab)^{-x} = 1 + (ab)^{-2}$ বা, $(ab)^{-x} = (ab)^{-2} \Rightarrow x = 2$

৬৮. x এর কোন মানের জন্য $2^{x+3} + 2^{x+1} = 320$? (কঠিন)

(ক) 5 (খ) 6 (গ) 7 (ঘ) 8 **ক**

ব্যাখ্যা: $2^x.2^3 + 2^x.2^1 = 320$ বা, $8.2^x + 2.2^x = 320$

বা, $10.2^x = 320$ বা, $2^x = 32 = 2^5$ বা, $x = 5$

৬৯. $\left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)$ এর মান কত? (কঠিন)

(ক) $a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}$ (খ) $a^3 - b^3$ (গ) $a - b$ (ঘ) $a^2 - b^2$ **গ**

ব্যাখ্যা: $\left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)$

$= \left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)\left\{\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2 + a^{\frac{1}{3}}.b^{\frac{1}{3}} + \left(b^{\frac{1}{3}}\right)^2\right\}$

$= \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(b^{\frac{1}{3}}\right)^3 = a - b$

৭০. $a^x = b^y = c^z$ হলে— i. $a = b^{\frac{y}{x}}$ ii $b = c^{\frac{z}{y}}$ iii. $c = b^{\frac{y}{z}}$

নিচের কোনটি সঠিক ? (মধ্যম)

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii **ঘ**

৭১. $a, a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n > 0$ এবং $r, r_1, r_2, r_3, \ldots\ldots, r_k \in Q$ হলে—

i. $a^{r_1} a^{r_2} \ldots\ldots . a^{r_k} = a^{r_1 + r_2 + \ldots + r_k}$

ii. $(a_1 . a_2 \ldots . a_n)^r = a_1^r . a_2^r \ldots\ldots a_n^r$

iii. $a^{\frac{m}{n}} . a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq+np}{nq}}$

নিচের কোনটি সঠিক ? (কঠিন)

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii **ঘ**

৭২. $a^p = b$, $b^q = c^r = a$ হলে—

i. $b^{rq} = a$

ii. $pqr = 1$

iii. $a^{pqr} = b$

নিচের কোনটি সঠিক ? (কঠিন)

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii **ক**

ব্যাখ্যা: $c^r = a$ বা, $(b^q)^r = a$ বা, $b^{rq} = a$

বা, $(a^p)^{rq} = a$ বা, $a^{pqr} = a^1$ বা, $pqr = 1$

নিচের তথ্যের আলোকে (৭৩-৭৫) নং প্রশ্নের উত্তর দাও;

$x^y = y^x$ একটি সূচকীয় সমীকরণ যেখানে $x = 2y$

৭৩. $y^2 - 2y$ = কত? (মধ্যম)

(ক) 0 (খ) −5 (গ) 5 (ঘ) |5| **ক**

ব্যাখ্যা: $\therefore x^y = y^x$ বা, $(2y)^y = y^{2y}$ বা, $(2y)^y = (y^2)^y$

বা, $2y = y^2$ বা, $y^2 - 2y = 0$

৭৪. y এর মান কত? (সহজ)

(ক) 0, −2 (খ) 0, 2 (গ) 2, 0 (ঘ) −2, 0 **খ**

ব্যাখ্যা: $y^2 - 2y = 0$ বা, $y(y-2) = 0$ বা, $y = 0, 2$

৭৫. x এর মান কত?(সহজ)

(ক) 0, −4 (খ) 0, 4 (গ) 4, 0 (ঘ) −4, 0 **খ**

ব্যাখ্যা: $y = 0$ অথবা, $y = 2$

বা, $x = 2 \times 0$ বা, $x = 2 \times 2$ বা, $x = 0$ বা, $x = 4$

নিচের তথ্যের আলোকে (৭৬-৭৮) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}} = c^{\frac{1}{z}} = k$ এবং $abc = 1$ ।

৭৬. নিচের কোনটি সঠিক? (সহজ)

(ক) $a = b^{\frac{y}{x}}$ (খ) $a = b^{\frac{1}{xy}}$ (গ) $a = b^{\frac{x}{y}}$ (ঘ) $b = c^{\frac{1}{zx}}$ **গ**

৭৭. abc নিচের কোনটির সমান? (মধ্যম)

(ক) k^{xyz} (খ) $k^{\frac{1}{xyz}}$ (গ) $k^{\frac{1}{x+y+z}}$ (ঘ) k^{x+y+z} **ঘ**

ব্যাখ্যা: $abc = k^x.k^y.k^z$ বা, $abc = k^{x+y+z}$

৭৮. x + y + z = কত? (সহজ)

(ক) 1 (খ) 0 (গ) −1 (ঘ) k **খ**

ব্যাখ্যা: $abc = k^{x+y+z} = 1 = k^0$ $\therefore x + y + z = 0$

নিচের তথ্যের আলোকে (৭৯-৮১) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$xyz \neq 0$, $a^x = b^y = c^z$ এবং a, b ও c ক্রমিক সমানুপাতি ।

৭৯. a, b ও c ক্রমিক সমানুপাতি হলে কোনটি সঠিক? (সহজ)

(ক) $a^2 = bc$ (খ) $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ (গ) $b^2 = ac$ (ঘ) $c = \frac{a}{b}$ **গ**

৮০. উপরিউক্ত শর্তের আলোকে x, y ও z এর মধ্যে সম্পর্ক কোনটি? (কঠিন)

(ক) $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} = 1$ (খ) $\frac{y}{x} + \frac{z}{y} = 2$

(গ) $\frac{y}{x} + \frac{y}{z} = 2$ (ঘ) $x + y + 1 = 2z$ **গ**

ব্যাখ্যা: $a^x = b^y$ $\therefore a = b^{\frac{y}{x}}$ এবং $c^z = b^y$ $\therefore c = b^{\frac{y}{z}}$

অতএব, $b^2 = ac$ বা, $b^2 = b^{\frac{y}{x}}.b^{\frac{y}{z}} = b^{\frac{y}{x}+\frac{y}{z}}$ $\therefore \frac{y}{x} + \frac{y}{z} = 2$

৮১. abc = 1 হলে $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ = কত? (কঠিন)

(ক) 0 (খ) 1 (গ) 2 (ঘ) ∞ **ক**

ব্যাখ্যা: $a^x = b^y = c^z = k$, $\therefore a = k^{\frac{1}{x}}, b = k^{\frac{1}{y}}, c = k^{\frac{1}{z}}$

$\therefore abc = k^{\frac{1}{x}}.k^{\frac{1}{y}}.k^{\frac{1}{z}} = k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$

বা, $1 = k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$ বা, $k^0 = k^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$ $\therefore \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$

নিচের তথ্যের আলোকে (৮২-৮৪) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$4^x - 3.2^{x+2} + 2^5 = 0$ একটি সূচকীয় সমীকরণ এবং $2^x = y$.

৮২. $y^2 - 12y$ = কত? (কঠিন)

(ক) 32 (খ) −32 (গ) 16 (ঘ) −16 **খ**

ব্যাখ্যা: $4^x - 3.2^{x+2} + 2^5 = 0$ বা, $2^{2x} - 3.2^x.2^2 + 32 = 0$

বা, $(2^x)^2 - 12.2^x = -32$ বা, $y^2 - 12y = -32$

৮৩. y এর মান কত? (মধ্যম)

(ক) 4, −8 (খ) −4, 8 (গ) −4, −8 (ঘ) 4, 8 **ঘ**

ব্যাখ্যা: $y^2 - 12y + 32 = 0$ বা, $y^2 - 8y - 4y + 32 = 0$

বা, $(y-4)(y-8) = 0$ বা, $y = 4, 8$

৮৪. x এর মান কত? (মধ্যম)

(ক) 2, 3 (খ) −2, 3 (গ) −2, 3 (ঘ) −2, −3 **ক**

ব্যাখ্যা: $y = 4$ অথবা, $y = 8$

বা, $2^x = 2^2$ বা, $2^x = 2^3$

$x = 2$ $x = 3$

শ্রেণির কাজের ওপর সৃজনশীল রচনামূলক প্রশ্ন.

প্রশ্ন ▶ ১ $a \in \mathbb{R}$ **এবং** $m, n \in \mathbb{N}$ **হলে,** $(a^m)^n = a^{mn}$ ◀ কাজ; পৃষ্ঠা-১৮৫

ক. $n = 1$ এর জন্য বাক্যটির সত্যতা যাচাই কর। ২

খ. গাণিতিক আরোহ পদ্ধতিতে দেখাও যে, $(a^m)^n = a^{mn}$. ৪

গ. $a \neq 0$ এবং $m \in \mathbb{N}$ ও $n \in \mathbb{Z}$ হলে, দেখাও যে, $(a^m)^n = a^{mn}$. ৪

১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $m \in \mathbb{N}$ কে নির্দিষ্ট করে এবং n কে চলক ধরে খোলা বাক্য $(a^m)^n = a^{mn}$ ... ... (i) বিবেচনা করি।

(i) এ $n = 1$ বসিয়ে দেখা যায়,

বামপক্ষ $= (a^m)^1 = a^m$

ডানপক্ষ $= a^{m \cdot 1} = a^m$

$\therefore n = 1$ এর জন্য (i) সত্য।

খ $n = 1$ এর জন্য (i) সত্য। ['ক' হতে পাই]

ধরি, $n = k$ এর জন্য (i) সত্য।

অর্থাৎ $(a^m)^k = a^{mk}$ ... ... (ii)

এখন, $(a^m)^{k+1} = (a^m)^k . (a^m)$ $[\because a^{n+1} = a^n . a]$

$= a^{mk} . a^m$ [(ii) নং হতে]

$= a^{mk + m}$

$= a^{m(k+1)}$

$\therefore n = k + 1$ এর জন্যও (i) সত্য।

সুতরাং গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি অনুসারে সকল $n \in \mathbb{N}$ এর জন্য (i) সত্য। **(দেখানো হলো)**

খ 'খ' থেকে পাই, $(a^m)^n = a^{mn}$ .... (1)

এখানে, $a \neq 0$ এবং $m \in \mathbb{N}$ ও $n \in \mathbb{Z}$

প্রথমে মনে করি, $n > 0$ এক্ষেত্রে খ থেকে (1) এর সত্যতা স্বীকার করে নেওয়া হয়েছে।

এখন মনে করি, $n = 0$ এক্ষেত্রে $(a^m)^n = (a^m)^0 = a^0 = 1$ এবং

$a^{mn} = a^0 = 1$

$\therefore$ (1) নং সত্য।

আবার মনে করি, $n < 0$ এবং $n = -k$ যেখানে $k \in \mathbb{N}$

এক্ষেত্রে $(a^m)^n = (a^m)^{-k} = \frac{1}{(a^m)^k} = \frac{1}{a^{mk}} = a^{-mk} = a^{m(-k)} = a^{mn}$

$\therefore a \neq 0$ এবং $m \in \mathbb{N}$ ও $n \in \mathbb{Z}$ এর জন্য $(a^m)^n = a^{mn}$. **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ২ $a, b \in \mathbb{R}$ **এবং** $n \in \mathbb{N}$ **হলে,** $(a . b)^n = a^n b^n$.

◀ কাজ; পৃষ্ঠা-১৮৫

ক. $n = 1$ এর জন্য বাক্যটির সত্যতা যাচাই কর। ২

খ. গাণিতিক আরোহ পদ্ধতিতে দেখাও যে, $(a . b)^n = a^n b^n$ ৪

গ. $a \neq 0$ এবং $n \in \mathbb{Z}$ হলে, দেখাও যে, $(a . b)^n = a^n b^n$ ৪

২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক এখানে, $(a.b)^n = a^n . b^n$ ... ... (i) যেখানে $a, b \in \mathbb{R}$ এবং $n \in \mathbb{N}$

$n = 1$ হলে, (i) বাক্যটি সত্য। কারণ সেক্ষেত্রে,

বামপক্ষ $= (a.b)^1 = a.b$ $[\because a^1 = a]$

ডানপক্ষ $= a^1 . b^1 = a.b$ $[\because a^1 = a]$

খ $n = 1$ এর জন্য (i) সত্য। ['ক' হতে পাই]

ধরি, (i) বাক্যটি $n = k$ এর জন্য সত্য।

অর্থাৎ $(a.b)^k = a^k . b^k$ ... ... (ii)

এখন, $(a . b)^{k+1} = (a.b)^k (a.b)$ $[\because a^{n+1} = a^n . a]$

$= a^k . b^k . a . b$ [(ii)নং হতে]

$= a^k . a . b^k . b$

$= a^{k+1} . b^{k+1}$ $[a^n . a = a^{n+1}]$

$\therefore$ (i) বাক্যটি $n = k + 1$ এর জন্যও সত্য।

সুতরাং গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি অনুসারে সকল $n \in \mathbb{N}$ এর জন্য (i) সত্য। **(দেখানো হলো)**

গ 'খ' থেকে পাই, $(a . b)^n = a^n b^n$ .... (i)

এখানে, $a \neq 0$ এবং $n \in \mathbb{Z}$

প্রথমে, মনে করি, $n > 0$ এক্ষেত্রে 'খ' থেকে (I) এর সত্যতা স্বীকার করে নেওয়া হয়েছে।

এখন মনে করি, $n = 0$, এ ক্ষেত্রে $(a . b)^n = (a . b)^0 = a^0 . b^0$

$= 1.1 = 1$

এবং $a^n b^n = a^0 . b^0 = 1.1 = 1$

$\therefore$ (I) নং সত্য।

সবশেষে মনে করি, $n < 0$ এবং $n = -k$, যেখানে, $k \in \mathbb{N}$

এক্ষেত্রে $(a . b)^n = (a.b)^{-k} = \frac{1}{(a.b)^k} = \frac{1}{a^k . b^k} = a^{-k} . b^{-k} = a^n . b^n$

$\therefore a \neq 0$ এবং $n \in \mathbb{Z}$ এর জন্য $(a.b)^n = a^n . b^n$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ৩ $a > 0$ **এবং** $n \in \mathbb{N}$ **হলে,** $\left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$. ◀ কাজ; পৃষ্ঠা-১৮৫

ক. $n = 1$ এর জন্য বাক্যটির সত্যতা দেখাও। ২

খ. গাণিতিক আরোহ পদ্ধতিতে দেখাও যে $n \in \mathbb{N}$ এর জন্য বাক্যটি সত্য। ৪

গ. অত:পর $\left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$ এর সত্যতা যাচাই কর যেখানে $a, b \in \mathbb{R}, b > 0$ এবং $n \in \mathbb{Z}$। ৪

৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক এখানে, $\left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$ ... ... (i), যেখানে $a > 0$ এবং $n \in \mathbb{N}$

$n = 1$ হলে, (i) সত্য। কারণ সেক্ষেত্রে,

বামপক্ষ $= \left(\frac{1}{a}\right)^1 = \frac{1}{a}$ $[\because a^1 = a]$

ডানপক্ষ $= \frac{1}{a^1} = \frac{1}{a}$ $[\because a^1 = a]$

খ 'ক' হতে পাই, $n = 1$ এর জন্য $\left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n}$ বাক্যটি সত্য।

ধরি, $n = k$ এর জন্য (i) সত্য। তাহলে,

$\left(\frac{1}{a}\right)^k = \frac{1}{a^k}$ ... ... (ii)

এখন, $\left(\frac{1}{a}\right)^{k+1} = \left(\frac{1}{a}\right)^k . \left(\frac{1}{a}\right)$ $[\because a^{n+1} = a^n . a]$

$= \frac{1}{a^k} \cdot \frac{1}{a}$ [(ii) নং হতে]

$= \frac{1}{a^k . a}$

$= \frac{1}{a^{k+1}}$ $[\because a^n a = a^{n+1}]$

$\therefore$ (i) বাক্যটি $n = k + 1$ এর জন্যও সত্য।

সুতরাং গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি অনুসারে সকল $n \in \mathbb{N}$ এর জন্য (i) সত্য।

গ 'খ' হতে সকল $n \in \mathbb{N}$ এর $\left(\frac{1}{a}\right)^n = \left(\frac{1}{a^n}\right)$

এখন, $\left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$ .... (i)

প্রথমে মনে করি, $n = 0$, এক্ষেত্রে $\left(\frac{b}{a}\right)^0 = \frac{b^0}{a^0} = \frac{1}{1} = 1$

এবং $\frac{b^0}{a^0} = \frac{1}{1} = 1$

সুতরাং, $n = 0$ এর জন্য (i) বাক্যটি সত্য।

এখানে, $n > 0$ এবং $n = k$ যেখানে, $k \in \mathbb{N}$

এক্ষেত্রে, $\left(\frac{b}{a}\right)^k = \left(b \cdot \frac{1}{a}\right)^k = b^k \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^k$

$= b^k \cdot \frac{1}{a^k} = \frac{b^k}{a^k} = \frac{b^n}{a^n}.$

আবার, $n < 0$ এবং $n = -k$ যেখানে $k \in \mathbb{N}$

এক্ষেত্রে $\left(\frac{b}{a}\right)^{-k} = \left(b \cdot \frac{1}{a}\right)^{-k}$

$= b^{-k} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{-k}$

$= b^{-k} \cdot \frac{1}{a^{-k}} \left[\left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n} \right]$

$= \frac{b^{-k}}{a^{-k}} = \frac{b^n}{a^n}.$

$\therefore$ a, b $\in \mathbb{N}$ এবং $n \in \mathbb{Z}$ এর জন্য $\left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$

প্রশ্ন ▶ ৪ $a \neq 0$ এবং $m, n \in \mathbb{Z}$ এর জন্য $a^m.a^n = a^{m+n}$.

◀ কাজ; পৃষ্ঠা-১৮৫

ক. $n = 1$ এর জন্য বাক্যটির সত্যতা দেখাও। ২

খ. গাণিতিক আরোহ পদ্ধতিতে দেখাও যে, $m, n \in \mathbb{N}$ এর জন্য বাক্যটি সত্য। ৪

গ. (i) $m > 0$ এবং $n < 0$ (ii) $m < 0$ এবং $n < 0$ এর জন্য বাক্যটির সত্যতা যাচাই কর। ৪

৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $n = 1$ হলে,

বামপক্ষ $= a^m.a^n = a^m.a^1 = a^m.a = a^{m+1}$

ডানপক্ষ $= a^{m+n} = a^{m+1}$

সুতরাং $n = 1$ এর জন্য বাক্যটি সত্য।

খ 'ক' হতে $m = n = 1$ এর জন্য বাক্যটি সত্য।

সুতরাং $m = n = k$ এর জন্য সত্য হবে।

$\therefore a^k.a^k = a^{k+k}$

$= a^{2k}$ .... (i)

$m = n = k + 1$ এর জন্য বাক্যটি সত্য হবে যদি ও কেবল যদি

$a^{k+1}.\ a^{k+1} = a^{k+1+k+1}$

$= a^{2k+2}$

$= a^{2(k+1)}$ ....(ii)

(i) ও (ii) হতে দেখা যায় k এর জন্য বাক্যটি সত্য হলে k + 1 এর জন্য বাক্যটি সত্য। সুতরাং $m, n \in \mathbb{N}$ এর জন্য বাক্যটি সত্য।

$\because n = 1$ এর জন্য (1) সত্য।

এখন ধরি, $n = k$ এর জন্য (1) সত্য। অর্থাৎ $a^m.a^k = a^{m+k}$ ....(2)

তাহলে, $a^m.a^{k+1} = a^m(a^k.a)$ [সূত্র ১]

$= (a^m.a^k).a$ [গুণের সহযোজন]

$= a^{m+k}.a$ [আরোহ কল্পনা]

$= a^{m+k+1}$ [সূত্র ১]

অর্থাৎ, $n = k + 1$, এর জন্য (1) সত্য।

সুতরাং গাণিতিক আরোহ পদ্ধতি অনুযায়ী সকল $n \in \mathbb{N}$ এর জন্য (1) সত্য।

$\therefore$ যে কোনো $m, n \in \mathbb{N}$ এর জন্য $a^m.a^n = a^{m+n}$

গ (I) $m > 0$ এবং $n < 0$

ধরি, $n = -k$ যেখানে $k \in \mathbb{N}$

এবং $m \in \mathbb{N}$

$a^m.\ a^n = a^m.a^{-k}$ [প্রতিস্থাপন]

$= a^m. \frac{1}{a^k} \left[\because a^{-n} = \frac{1}{a^n} \right]$

$= \frac{a^m}{a^k} = a^{m-k}$

কিন্তু $\frac{1}{a^{k-m}} = a^{-(k-m)}$

$= a^{m-k} \quad \left[\because a^{-n} = \frac{1}{a^n} \right]$

$\therefore$ সকল ক্ষেত্রেই $a^m.\ a^n = a^{m-k}$

$= a^{m+(-k)}$

$= a^{m+n}$ [মান বসিয়ে] **(দেখানো হলো)**

(ii) $m < 0$ এবং $n < 0$

ধরি, $m = -p$, $n = -q$ যেখানে $p, q \in \mathbb{N}$

$a^m.a^n = a^{-p}.a^{-q}$

$= \frac{1}{a^p}\frac{1}{a^q} \quad \left[\because a^{-n} = \frac{1}{a^n} \right]$

$= \frac{1}{a^{p+q}}$ [$\because a^m \times a^n = a^{m+n}$]

$= a^{-(p+q)}$

$= a^{-p-q}$

$= a^{-p+(-q)}$

$= a^{m+n}$ [মান বসিয়ে] **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ৫ $\left(\frac{p^a}{p^b}\right) a^2 + ab + b^2$, $\left(\frac{p^b}{p^c}\right) b^2 + bc + c^2$. $\left(\frac{p^c}{p^a}\right) c^2 + ca + a^2$, $\left\{\frac{p^{(x+y)^2}}{p^{xy}}\right\}^{x-y}$, $\left\{\frac{p^{(y+z)^2}}{p^{yz}}\right\}^{y-z}$ ও $\left\{\frac{p^{(z+x)^2}}{p^{zx}}\right\}^{x-z}$ ছয়টি রাশি।

◀ কাজ; পৃষ্ঠা-১৯২

ক. প্রথম ও চতুর্থ রাশিকে সরল কর। ২

খ. $\left(\frac{p^a}{p^b}\right)^{a^2+ab+b^2} \times \left(\frac{p^b}{p^c}\right)^{b^2+bc+c^2} \times \left(\frac{p^c}{p^a}\right)^{c^2+ca+a^2}$ কে সরল কর। ৪

গ. দেখাও যে, $\left\{\frac{p^{(y+z)^2}}{p^{yz}}\right\}^{y-z} \times \left\{\frac{p^{(x+y)^2}}{p^{xy}}\right\}^{x-y} \div \left\{\frac{p^{(z+x)^2}}{p^{zx}}\right\}^{x-z}$

$= \left(\frac{p^a}{p^b}\right)^{a^2+ab+b^2} \times \left(\frac{p^b}{p^c}\right)^{b^2+bc+c^2} \times \left(\frac{p^c}{p^a}\right)^{c^2+ca+a^2}$ ৪

৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রথম রাশি $= \left(\frac{p^a}{p^b}\right) a^2 + ab + b^2$

$= (p^{a-b})^{a^2+ab+b^2}$

$= p^{(a-b)\, a^2+ab+b^2}$

$= p^{a^3-b^3}$ **(Ans.)**

ও চতুর্থ রাশি $= \left\{\frac{p^{(x+y)^2}}{p^{xy}}\right\}^{x-y}$

$= (p^{x^2+y^2+2xy-xy})^{x-y}$

$= p^{(x^2+xy+y^2)(x-y)}$

$= p^{x^3-y^3}$ **(Ans.)**

খ $\left(\frac{p^a}{p^b}\right)^{a^2+ab+b^2} \times \left(\frac{p^b}{p^c}\right)^{b^2+bc+c^2} \times \left(\frac{p^c}{p^a}\right)^{c^2+ca+a^2}$

$= p^{(a-b)(a^2+ab+b^2)} \times p^{(b-c)(b^2+bc+c^2)} \times p^{(c-a)(c^2+ca+a^2)}$

$= p^{a^3-b^3} \times p^{b^3-c^3} \times p^{c^3-a^3}$

$= p^{a^3-b^3+b^3-c^3+c^3-a^3}$

$= p^0$

$= 1$

গ 'খ' থেকে পাই, ডানপক্ষ = 1

আবার, বামপক্ষ $= \left\{\frac{p^{(y+z)^2}}{p^{yz}}\right\}^{y-z} \times \left\{\frac{p^{(x+y)^2}}{p^{xy}}\right\}^{x-y} \div \left\{\frac{p^{(z+x)^2}}{p^{zx}}\right\}^{x-z}$

$= (P^{y^2+2yz+z^2-yz})^{y-z} \times (p^{x^2+2xy+y^2-xy})^{x-y} \div \left(\frac{p^{z^2+2zx+x^2}}{p^{zx}}\right)^{x-z}$

['ক' থেকে পাই]

$= p^{(y^2+2yz+z^2-yz)(y-z)} \times p^{(x-y)(x^2+xy+y^2)} \div p^{(z^2+2zx+x^2-zx)(x-z)}$

$= p^{y^3-z^3} \times p^{x^3-y^3} \div p^{x^3-z^3}$

$= p^{y^3-z^3} \times p^{x^3-y^3} \times p^{-(x^3-z^3)}$

$= p^{y^3-z^3} \times p^{x^3-y^3} \times p^{z^3-x^3}$

$= p^{y^3-z^3+x^3-y^3+z^3-x^3} = p^0 = 1$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডান পক্ষ ['খ' হতে] **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ৬ **কতিপয় সূচক সমন্বিত রাশি ay^{1-p}, by^{1-q}, cy^{1-r} এবং $ay^{1-p} = by^{1-q} = cy^{1-r} = x$ ।**

◀ কাম; পৃষ্ঠা-১৮২

ক. a, b ও c এর মান x, y এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ২

খ. $a^{q-r} \times b^{r-p} \times c^{p-q}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. দেখাও যে, $\left(\frac{p^a}{p^b}\right) a^2 + ab + b^2 \times \left(\frac{p^b}{p^c}\right) b^2 + bc + c^2 \times \left(\frac{p^c}{p^a}\right) c^2 + ca + a^2 = a^{q-r} \times b^{r-p} \times c^{p-q}$ ৪

৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $ay^{1-p} = by^{1-q} = cy^{1-r} = x$

$\therefore ay^{1-p} = x$

বা, $a = \frac{x}{y^{1-p}}$

$\therefore a = xy^{p-1}$

আবার, $by^{1-q} = x$

বা, $b = \frac{x}{y^{1-q}} = xy^{q-1}$

এবং $cy^{1-r} = x$

বা, $c = \frac{x}{y^{1-r}} = xy^{r-1}$

$\therefore a = xy^{p-1}, b = xy^{q-1}, c = xy^{r-1}$

খ ক থেকে পাই, $a = xy^{p-1}$, $b = xy^{q-1}$ এবং $c = xy^{r-1}$

$\therefore a^{q-r}.b^{r-p}.c^{p-q} = (xy^{p-1})^{q-r}.(xy^{q-1})^{r-p}.(xy^{r-1})^{p-q}$

$= x^{q-r}y^{(p-1)(q-r)}.x^{r-p}y^{(q-1)(r-p)}.x^{p-q}y^{(r-1)(p-q)}$

$= x^{q-r+r-p+p-q}.y^{pq-pr-q+r+qr-pq-r+p+pr-qr-p+q}$

$= x^0.y^0$

$= 1 \times 1 = 1$

গ 'খ' হতে পাই, ডানপক্ষ $= a^{q-r} \times b^{r-p} \times c^{p-q} = 1$

বামপক্ষ $= \left(\frac{p^a}{p^b}\right)^{a^2+ab+b^2} \times \left(\frac{p^b}{p^c}\right)^{b^2+bc+c^2} \times \left(\frac{p^c}{p^a}\right)^{c^2+ca+a^2}$

$= p^{(a-b)(a^2+ab+b^2)} \times p^{(b-c)(b^2+bc+c^2)} \times p^{(c-a)(c^2+ca+a^2)}$

$= p^{a^3-b^3} \times p^{b^3-c^3} \times p^{c^3-a^3}$

$= p^{a^3-b^3+b^3-c^3+c^3-a^3}$

$= p^0$

$= 1$

= ডানপক্ষ

$\therefore \left(\frac{p^a}{p^b}\right) a^2 + ab + b^2 \times \left(\frac{p^b}{p^c}\right) b^2 + bc + c^2 \times \left(\frac{p^c}{p^a}\right) c^2 + ca + a^2$

$= a^{q-r} \times b^{r-p} \times c^{p-q}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ৬ $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$ **একটি সূচকীয় সমীকরণ।**

◀ কাম; পৃষ্ঠা-১৮২

ক. সমীকরণটিকে $2^{2x}.a = 3^x.b$ আকারে প্রকাশ কর, যেখানে a ও b ধ্রুবক। ২

খ. সমীকরণটির সমাধান কর। ৪

গ. সমীকরণটির শুদ্ধি পরীক্ষা কর ও দেখাও যে,

$4^x - 3^{x+\frac{1}{2}} \neq 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$ ৪

৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$

বা, $2^{2x} + 2^{2x-1} = 3^{x+\frac{1}{2}} + 3^{x-\frac{1}{2}}$

বা, $2^{2x} + 2^{2x}.2^{-1} = 3^x.3^{\frac{1}{2}} + 3^x.3^{-\frac{1}{2}}$

বা, $2^{2x}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3^x\left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

বা, $2^{2x}\left(\frac{3}{2}\right) = 3^x\left(\frac{3+1}{\sqrt{3}}\right)$

বা, $2^{2x}\left(\frac{3}{2}\right) = 3^x\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)$

এটিই $2^{2x}.a = 3^x.b$ আকার, যেখানে $a = \frac{3}{2}$ ও $b = \frac{4}{\sqrt{3}}$

খ 'ক' থেকে পাই, $2^{2x}\left(\frac{3}{2}\right) = 3^x.\frac{4}{\sqrt{3}}$

বা, $2^{2x-1}.3 = 3^{x-\frac{1}{2}}.4$

বা, $2^{2x-1}.3 = 3^{x-\frac{1}{2}}.2^2$

বা, $2^{2x-1-2} = 3^{x-\frac{1}{2}-1}$

বা, $2^{2x-3} = 3^{x-\frac{3}{2}}$

বা, $2^{2x-3} = 3^{\frac{2x-3}{2}}$

বা, $2^{2x-3} = (\sqrt{3})^{2x-3}$

বা, $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2x-3} = 1$

বা, $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2x-3} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^0$

বা, $2x - 3 = 0$

$\therefore x = \frac{3}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = \frac{3}{2}$

গ 'খ' থেকে পাই, $x = \frac{3}{2}$

তাহলে, বামপক্ষ $= 4^{\frac{3}{2}} - 3^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} = 4.4^{\frac{1}{2}} - 3^{\frac{3-1}{2}}$

$= 4.\sqrt{4} - 3^{\frac{2}{2}} = 4.2 - 3 = 8 - 3 = 5$

ডান পক্ষ $= 3^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}} - 2^{2.\frac{3}{2}-1}$

$= 3^{\frac{3+1}{2}} - 2^{3-1} = 3^{\frac{4}{2}} - 2^2$

$= 3^2 - 2^2 = 9 - 4 = 5$

$\therefore x = \frac{3}{2}$ এর জন্য সমীকরণটি শুদ্ধ।

আবার, $x = \frac{3}{2}$ এর জন্য

$4^x - 3^{x+\frac{1}{2}} = 4^{\frac{3}{2}} - 3^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}} = 4.4^{\frac{1}{2}} - 3^{\frac{3+1}{2}}$

$= 4.\sqrt{4} - 3^{\frac{4}{2}}$

$= 4.2 - 3^2 = 8 - 9 = -1$

এবং $3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1} = 3^{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}} - 2^{2.\frac{3}{2}-1} = 5$

$\therefore 4^x - 3^{x+\frac{1}{2}} \neq 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ৮ $\sqrt[12]{(a^8)\sqrt{a^6}\sqrt{a^4}}$, $[1 - 1\{1 - (1 - x^3)^{-1}\}^{-1}]^{-1}$ **দুইটি রাশি।**
◀ কাজ; পৃষ্ঠা-১৯৩

ক. প্রথম রাশির সরলমান কত? ২

খ. দেখাও যে, ১ম রাশি × ২য় রাশি $= ax^3$ ৪

গ. ১ম রাশি × ২য় রাশি ÷ $[x - \{x^{-1} + (a^{-1} - x^{-1})\}^{-1}]$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\sqrt[12]{(a^8)\sqrt{(a^6)\sqrt{a^4}}} = \sqrt[12]{(a^8)\sqrt{a^6.a^2}} = \sqrt[12]{(a^8)\sqrt{a^8}}$

$$= \sqrt[12]{(a^8)\sqrt{(a^4)^2}} = \sqrt[12]{a^8 .\ a^4} = \sqrt[12]{a^{8+4}}$$

$$= \sqrt[12]{a^{12}} = (a^{12})^{\frac{1}{12}} = a$$

∴ নির্ণেয় সরল মান $= a$

খ 'ক' থেকে পাই, $\sqrt[12]{(a^8)\sqrt{a^6}\sqrt{a^4}} = a$

তাহলে বামপক্ষ = ১ম রাশি × ২য় রাশি

$$= \sqrt[12]{(a^8)\sqrt{a^6}\sqrt{a^4}} \times [1 - 1\{1 - (1 - x^3)^{-1}\}^{-1}]^{-1}$$
$$= a \times [1 - 1\{1 - (1 - x^3)^{-1}\}^{-1}]^{-1}$$
$$= a \times \left[1 - 1\left\{1 - \frac{1}{1 - x^3}\right\}^{-1}\right]^{-1}$$
$$= a \times \left[1 - 1\left\{\frac{1 - x^3 - 1}{1 - x^3}\right\}^{-1}\right]^{-1}$$
$$= a \times \left[1 - 1\left\{\frac{-x^3}{1 - x^3}\right\}^{-1}\right]^{-1}$$
$$= a \times \left[1 - \left(\frac{1 - x^3}{- x^3}\right)\right]^{-1}$$
$$= a \times \left[1 + \frac{1 - x^3}{x^3}\right]^{-1}$$
$$= a \times \left[\frac{x^3 + 1 - x^3}{x^3}\right]^{-1}$$
$$= a \times \left[\frac{1}{x^3}\right]^{-1}$$
$$= ax^3 = \text{ডানপক্ষ}$$

∴ ১ম রাশি × ২য় রাশি $= ax^3$ **(দেখানো হলো)**

গ এখানে, ১ম রাশি × ২য় রাশি ÷ $[x - \{x^{-1} + (a^{-1} - x)^{-1}\}^{-1}]$

$$= ax^3 \div \left[x - \left\{\frac{1}{x} + \left(\frac{1}{a} - x\right)^{-1}\right\}^{-1}\right] \text{ ['খ' থেকে]}$$
$$= ax^3 \div \left[x - \left\{\frac{1}{x} + \left(\frac{1 - ax}{a}\right)^{-1}\right\}^{-1}\right]$$
$$= ax^3 \div \left[x - \left\{\frac{1}{x} + \frac{a}{1 - ax}\right\}^{-1}\right]$$
$$= ax^3 \div \left[x - \left\{\frac{1 - ax + ax}{x(1 - ax)}\right\}^{-1}\right]$$
$$= ax^3 \div \left[x - \left\{\frac{1}{x - ax^2}\right\}^{-1}\right]$$
$$= ax^3 \div [x - \{x - ax^2\}]$$
$$= ax^3 \div [x - x + ax^2]$$
$$= ax^3 \div ax^2$$
$$= \frac{ax^3}{ax^2} = x \quad \textbf{(Ans.)}$$

প্রশ্ন ▶ ৯ $a^m . a^n = (a^m)^n$ **এবং** $m, n \neq 0$ **হলে,**
◀ কাজ; পৃষ্ঠা-১৯৩

ক. দেখাও যে, $m + n - mn = 0$ ২

খ. প্রমাণ কর যে, $m(n - 2) + n(m - 2) = 0$ ৪

গ. দেখাও যে, $m(n - 2) + n(m - 2) = 0$ সমীকরণটি সিদ্ধ হবে যদি ও কেবল যদি $m = n = 2$ হয়। ৪

৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $a^m.a^n = (a^m)^n$

বা, $a^{m+n} = a^{mn}$

∴ $m + n - mn = 0$ **(দেখানো হলো)**

খ বামপক্ষ $= m(n - 2) + n(m - 2)$

$$= mn - 2m + mn - 2n$$
$$= 2mn - 2(m + n)$$
$$= 2mn - 2mn \quad [\because m + n = mn]$$
$$= 0 = \text{ডানপক্ষ}$$

∴ $m(n - 2) + n(m - 2) = 0$ **(প্রমাণিত)**

গ 'খ' থেকে পাই, $m(n - 2) + n(m - 2) = 0$

সমীকরণটির বামপক্ষ $= m(n - 2) + n(m - 2)$

$$= mn - 2m + mn - 2n$$
$$= n.n - 2n + n.n - 2n \text{ [}m = n\text{ বসিয়ে]}$$
$$= n^2 - 2n + n^2 - 2n$$
$$= 2n^2 - 4n$$
$$= 2n(n - 2)$$

∴ $2n(n - 2)$ এর মান তখনই শূন্য হবে যখন $2n(n - 2) = 0$ হয়।

বা, $n - 2 = 0$ হয় $[\therefore 2n \neq 0]$

বা, $n = 2$ হয়

অর্থাৎ, $m = n = 2$ হলে সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।

∴ $m(n - 2) + n(m - 2) = 0$ সমীকরণটি সিদ্ধ হবে যদি ও কেবল যদি $m = n = 2$ হয়। **(দেখানো হলো)**

মাস্টার ট্রেইনার প্রণীত আরও সৃজনশীল রচনামূলক প্রশ্ন

প্রশ্ন ▶ ১০ তিনটি সূচকীয় রাশি বিবেচনা কর,

$$\frac{1}{1 + a^{-m}b^n + a^{-m}c^p}, \frac{1}{1 + b^{-n}c^p + b^{-n}a^m} \text{ এবং } \frac{1}{1 + c^{-p}a^m + c^{-p}b^n}$$

[লক্ষ্মীপুর আদর্শ সামাদ সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়]

ক. প্রথম রাশিটিকে সরলীকরণ কর। ২

খ. রাশি তিনটির যোগফল বের কর। ৪

গ. দেখাও যে 'খ' থেকে প্রাপ্ত যোগফল $\frac{1}{1 + a^{y-z} + a^{y-x}} + \frac{1}{1 + a^{z-x} + a^{z-y}} + \frac{1}{1 + a^{x-y} + a^{x-z}}$ রাশিটির সরল মানের সমান। ৪

১০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রথম রাশি, $\frac{1}{1 + a^{-m}b^n + a^{-m}c^p}$

$$= \frac{1}{1 + \frac{b^n}{a^m} + \frac{c^p}{a^m}}$$
$$= \frac{1}{\frac{a^m + b^n + c^p}{a^m}}$$
$$= 1 \times \frac{a^m}{a^m + b^n + c^p}$$
$$= \frac{a^m}{a^m + b^n + c^p} \quad \textbf{(Ans.)}$$

খ রাশি তিনটির যোগফল,

$$\frac{1}{1+a^{-m}b^{n}+a^{-m}c^{p}}+\frac{1}{1+b^{-n}c^{p}+b^{-n}a^{m}}+\frac{1}{1+c^{-p}a^{m}+c^{-p}b^{n}}$$

'ক' থেকে পাই,

$$\frac{1}{1+a^{-m}b^{n}+a^{-m}c^{p}}=\frac{a^{m}}{a^{m}+b^{n}+c^{p}}$$

একইভাবে $\frac{1}{1+b^{-n}c^{p}+b^{-n}a^{m}}=\frac{b^{n}}{b^{n}+c^{p}+a^{m}}=\frac{b^{n}}{a^{m}+b^{n}+c^{p}}$

এবং $\frac{1}{1+c^{-p}a^{m}+c^{-p}b^{n}}=\frac{c^{p}}{c^{p}+a^{m}+b^{n}}=\frac{c^{p}}{a^{m}+b^{n}+c^{p}}$

$\therefore$ যোগফল $=\frac{a^{m}}{a^{m}+b^{n}+c^{p}}+\frac{b^{n}}{a^{m}+b^{n}+c^{p}}+\frac{c^{p}}{a^{m}+b^{n}+c^{p}}$

$=\frac{a^{m}+b^{n}+c^{p}}{a^{m}+b^{n}+c^{p}}$

$= 1$ **(Ans.)**

গ $\frac{1}{1+a^{y-z}+a^{y-x}}+\frac{1}{1+a^{z-x}+a^{z-y}}+\frac{1}{1+a^{x-y}+a^{x-z}}$

প্রথম পদ $=\frac{1}{1+a^{y-z}+a^{y-x}}$

$=\frac{1}{1+a^{y}.a^{-z}+a^{y}.a^{-x}}$

$=\frac{1}{1+\frac{a^{y}}{a^{z}}+\frac{a^{y}}{a^{x}}}$

$=\frac{1}{\frac{a^{z}.a^{x}+a^{y}.a^{x}+a^{y}.a^{z}}{a^{z}.a^{x}}}$

$=\frac{1}{\frac{a^{z+x}+a^{x+y}+a^{y+z}}{a^{z+x}}}$

$=\frac{a^{z+x}}{a^{z+x}+a^{x+y}+a^{y+z}}$

$=\frac{a^{z+x}}{a^{x+y}+a^{y+z}+a^{z+x}}$

একইভাবে, ২য় পদ $=\frac{1}{1+a^{z-x}+a^{z-y}}$

$=\frac{a^{x+y}}{a^{x+y}+a^{z+y}+a^{z+x}}$

৩য় পদ $=\frac{1}{1+a^{x-y}+a^{x-z}}$

$=\frac{a^{y+z}}{a^{y+z}+a^{x+z}+a^{y+x}}$

$=\frac{a^{y+z}}{a^{x+y}+a^{y+z}+a^{z+x}}$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিটির মান

$=\frac{a^{z+x}}{a^{x+y}+a^{y+z}+a^{z+x}}+\frac{a^{x+y}}{a^{x+y}+a^{y+z}+a^{z+x}}+\frac{a^{y+z}}{a^{x+y}+a^{y+z}+a^{z+x}}$

$=\frac{a^{z+x}+a^{x+y}+a^{y+z}}{a^{x+y}+a^{y+z}+a^{z+x}}$

$=\frac{a^{x+y}+a^{y+z}+a^{z+x}}{a^{x+y}+a^{y+z}+a^{z+x}}$

$= 1$

= 'খ' থেকে প্রাপ্ত যোগফল **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ১১ **$y = 2^x$ এবং $4^x - 3.2^{x+2} + 2^5 = 0$ হলে,**

ক. প্রমাণ কর $y^2 - 12y + 32 = 0$ ২

খ. x ও y-এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $4^a - 3^{a-\frac{1}{2}} = 3^{a+\frac{1}{2}} - 2^{2a-1}$ হলে, দেখাও যে, $a = \frac{3}{x}$ অথবা $a = \frac{x}{2}$ ৪

১১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $y = 2^x$

এবং $4^x - 3.2^{x+2} + 2^5 = 0$

বা, $(2^2)^x - 3.2^x.2^2 + 2^5 = 0$

বা, $(2^x)^2 - 12.2^x + 32 = 0$

বা, $y^2 - 12y + 32 = 0$ [$\because y = 2^x$]

খ 'ক' থেকে $y^2 - 12y + 32 = 0$

বা, $y^2 - 8y - 4y + 32 = 0$

বা, $y(y-8) - 4(y-8) = 0$

বা, $(y-8)(y-4) = 0$

হয় $y - 8 = 0$ অথবা $y - 4 = 0$

বা, $y = 8$ বা, $y = 4$

বা, $2^x = 8$ [$\because 2^x = y$] বা, $2^x = 4$ [$\because 2^x = y$]

বা, $2^x = 2^3$ বা, $2^x = 2^2$

$\therefore x = 3$ $\therefore x = 2$

(Ans.) $(x, y) = (3, 8), (2, 4)$

গ দেওয়া আছে,

$4^a - 3^{a-\frac{1}{2}} = 3^{a+\frac{1}{2}} - 2^{2a-1}$

বা, $4^a + 2^{2a-1} = 3^{a+\frac{1}{2}} + 3^{a-\frac{1}{2}}$

বা, $(2^2)^a + 2^{2a}.2^{-1} = 3^a.3^{\frac{1}{2}} + 3^a\,3^{\frac{-1}{2}}$

বা, $2^{2a} + 2^{2a}.\frac{1}{2} = 3^a\left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

বা, $2^{2a}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3^a\left\{\frac{(\sqrt{3})^2 + 1}{\sqrt{3}}\right\}$

বা, $2^{2a}.\frac{3}{2} = 3^a.\frac{4}{\sqrt{3}}$

বা, $2^{2a}.\frac{1}{2\times4} = 3^a.\frac{1}{3.\sqrt{3}}$

বা, $2^{2a}.\frac{1}{2.2^2} = 3^a.\frac{1}{3.3^{\frac{1}{2}}}$

বা, $2^{2a-1-2} = 3^{a-1-\frac{1}{2}}$

বা, $2^{2a-3} = 3^{\frac{2a-3}{2}} = (\sqrt{3})^{2a-3}$

বা, $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2a-3} = 1 = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^0$

বা, $2a - 3 = 0$

বা, $a = \frac{3}{2}$

'খ' থেকে পাই $x = 2, 3$

$x = 2$ হলে, $a = \frac{3}{2} = \frac{3}{x}$

$x = 3$ হলে, $a = \frac{3}{2} = \frac{x}{2}$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ১২ **একটি সূচকীয় রাশি বিবেচনা করি, $\left\{\left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{a^2-b^2}{a-b}}\right\}^{\frac{a}{a+b}}$**

ক. রাশিটিকে সরলীকরণ কর। ২

খ. প্রদত্ত রাশিটি $= 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{-1}{3}}$ হলে, দেখাও যে $2x^3 - 6x = 5.$ ৪

গ. প্রদত্ত রাশিটি $= (a+b)^{\frac{1}{3}} + (a-b)^{\frac{1}{3}}$ এবং $a^2 - b^2 = c^3$ হয় তাহলে, দেখাও যে, $x^3 - 3cx - 2a = 0$ এবং a ও c - এর কোন মানের জন্য খ ও গ থেকে প্রাপ্ত সমীকরণ একই সমীকরণ নির্দেশ করে। ৪

১২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\left\{\left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{a^2-b^2}{a-b}}\right\}^{\frac{a}{a+b}}$

$= \left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{a^2-b^2}{a-b} \times \frac{a}{a+b}}$

$= \left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{(a+b)(a-b)a}{(a-b)(a+b)}}$

$= \left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{a}$

$= x^{\frac{1}{a} \times a}$

$= x^1$

$= x$ **(Ans.)**

খ 'ক' হতে পাই, প্রদত্ত রাশির সরল মান x

$\therefore x = 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{-1}{3}}$

বা, $x^3 = \left(2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{-1}{3}}\right)^3$

বা, $x^3 = \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3 + \left(2^{\frac{-1}{3}}\right)^3 + 3.2^{\frac{1}{3}}.2^{\frac{-1}{3}}\left(2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{-1}{3}}\right)$

বা, $x^3 = 2 + 2^{-1} + 3.2^{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}} \times x \quad \left[\because x = 2^{\frac{1}{3}} + 2^{\frac{-1}{3}}\right]$

বা, $x^3 = 2 + \frac{1}{2} + 3x.2^0$

বা, $x^3 = \frac{4+1}{2} + 3x.1$

বা, $2x^3 = 5 + 6x$

$\therefore 2x^3 - 6x = 5$ **(দেখানো হলো)**

গ 'ক' হতে পাই প্রদত্ত রাশির সরল মান x

$\therefore x = (a+b)^{\frac{1}{3}} + (a-b)^{\frac{1}{3}}$ এবং $a^2 - b^2 = c^3$

বা, $x^3 = \left\{(a+b)^{\frac{1}{3}} + (a-b)^{\frac{1}{3}}\right\}^3$

বা, $x^3 = \left\{(a+b)^{\frac{1}{3}}\right\}^3 + \left\{(a-b)^{\frac{1}{3}}\right\}^3 + 3(a+b)^{\frac{1}{3}}(a-b)^{\frac{1}{3}}\left\{(a+b)^{\frac{1}{3}} + (a-b)^{\frac{1}{3}}\right\}$

বা, $x^3 = a + b + a - b + 3\{(a+b)(a-b)\}^{\frac{1}{3}}.x$

$\left[\because x = (a+b)^{\frac{1}{3}} + (a-b)^{\frac{1}{3}}\right]$

বা, $x^3 = 2a + 3(a^2-b^2)^{\frac{1}{3}}x$

বা, $x^3 = 2a + 3.(c^3)^{\frac{1}{3}}.x$

বা, $x^3 = 2a + 3cx$

বা, $x^3 - 3cx = 2a$

বা, $2x^3 - 6cx = 4a$ [2 দ্বারা গুণ করে]

'খ' থেকে পাই $2x^3 - 6x = 5$

এখন, সমীকরণ দুটি একই সমীকরণ নির্দেশ করবে যদি উভয় সমীকরণে x^3, x- এর সহগ এবং ধ্রুব পদ সমান হয়।

অর্থাৎ $-6c = -6$ এবং $4a = 5$

বা, $c = 1$ বা, $a = \frac{5}{4}$

Ans. $c = 1, a = \frac{5}{4}$

প্রশ্ন ▶ ১৩ একটি সূচকীয় রাশি বিবেচনা কর,

$\left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}.b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)$; a, b > 0

[সরকারি মুসলিম উচ্চ বিদ্যালয়, চট্টগ্রাম]

ক. রাশিটির সাথে b যোগ করে সরলীকরণ কর। ২

খ. 'ক' থেকে প্রাপ্ত সরল মানটির বর্গ সমান $-2 + 3^{\frac{2}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}}$ হলে, দেখাও যে, $3a^3 + 9a - 8 = 0$ ৪

গ. 'ক' থেকে প্রাপ্ত সরল মানটি $1 + 3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}$ এর সমান হলে দেখাও, $a^3 - 3a^2 - 6a - 4 = 0$ এবং 'খ' থেকে প্রাপ্ত সমীকরণের সাহায্যে a^3 অপসারণ কর। ৪

১৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রদত্ত রাশিটির সাথে b যোগ করলে দাঁড়ায়,

$\left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)\left(a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}}.b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right) + b$

$= \left(a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}\right)\left\{\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^2 + a^{\frac{1}{3}}.b^{\frac{1}{3}} + \left(b^{\frac{1}{3}}\right)^2\right\} + b$

$= \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(b^{\frac{1}{3}}\right)^3 + b \quad [\because a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)]$

$= a - b + b$

$= a$ **(Ans.)**

খ 'ক' থেকে প্রাপ্ত মান a

$\therefore a^2 = -2 + 3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{-2}{3}}$

বা, $a^2 = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^2 + \left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^2 - 2.3^{\frac{1}{3}}3^{\frac{-1}{3}}$

বা, $a^2 = \left(3^{\frac{1}{3}} - 3^{\frac{-1}{3}}\right)^2$

বা, $a = 3^{\frac{1}{3}} - 3^{\frac{-1}{3}}$ [বর্গমূল করে]

বা, $a^3 = \left(3^{\frac{1}{3}} - 3^{\frac{-1}{3}}\right)^3$

বা, $a^3 = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left(3^{\frac{-1}{3}}\right)^3 - 3.3^{\frac{1}{3}}.3^{\frac{-1}{3}}\left(3^{\frac{1}{3}} - 3^{\frac{-1}{3}}\right)$

বা, $a^3 = 3 - 3^{-1} - 3.3^{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}} \times a \quad \left[\because a = 3^{\frac{1}{3}} - 3^{\frac{-1}{3}}\right]$

বা, $a^3 = 3 - \frac{1}{3} - 3.3^0.a$

বা, $a^3 = 3 - \frac{1}{3} - 3a$

বা, $3a^3 = 9 - 1 - 9a$

বা, $3a^3 + 9a - 8 = 0$ **(দেখানো হলো)**

গ 'ক' থেকে প্রাপ্ত সরল মান a

$\therefore a = 1 + 3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}$

বা, $a - 1 = 3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}$

বা, $(a-1)^3 = \left(3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}\right)^3$

বা, $(a-1)^3 = \left(3^{\frac{2}{3}}\right)^3 + \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3 + 3.3^{\frac{2}{3}}\,3.^{\frac{1}{3}}\left(3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}\right)$

বা, $(a-1)^3 = 3^2 + 3 + 3.3^{\frac{2+1}{3}}.(a-1) \quad \left[\because a - 1 = 3^{\frac{2}{3}} + 3^{\frac{1}{3}}\right]$

বা, $(a-1)^3 = 9 + 3 + 3.3(a-1)$

বা, $a^3 - 3a^2 + 3a - 1 = 12 + 9(a-1)$

বা, $a^3 - 3a^2 + 3a - 1 = 12 + 9a - 9$

বা, $a^3 - 3a^2 + 3a - 1 - 12 - 9a + 9 = 0$

বা, $a^3 - 3a^2 - 6a - 4 = 0$ ....(i) **(দেখানো হলো)**

'ক' হতে পাই $3a^3 + 9a - 8 = 0$ .... (ii)

এখন (i) × 3 – (ii) হতে পাই

$$\begin{array}{r} 3a^3 - 9a^2 - 18a - 12 = 0 \\ (-)\ 3a^3 \qquad\quad + \ 9a - \ 8 = 0 \\ \quad (-) \quad (+) \qquad \\ \hline -9a^2 - 27a - 4 = 0 \end{array} \text{ (Ans.)}$$

প্রশ্ন ▶ ১৪ যদি $a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}} = c^{\frac{1}{z}}$ এবং $abc = 1$ হয় তাহলে

ক. $x + y + z =$ কত? ২

খ. 'ক' থেকে $(x + y + z)$ এর মান ব্যবহার করে $\frac{1}{p^y + p^{-z} + 1} + \frac{1}{p^z + p^{-x} + 1} + \frac{1}{p^x + p^{-y} + 1}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. $\frac{(a^2 - b^{-2})^a (a - b^{-1})^{b-a}}{(b^2 - a^{-2})^b (b + a^{-1})^{a-b}} =$ 'খ' এর রাশিটির মানের সমান হলে দেখাও $a + b = 0$. ৪

১৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি, $a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}} = c^{\frac{1}{z}} = k$.

সুতরাং, $a = k^x, b = k^y, c = k^z$

$\therefore abc = k^x k^y k^z = k^{x+y+z}$

দেওয়া আছে, $abc = 1$

$\therefore k^{x+y+z} = 1 = k^o$

$\therefore x + y + z = 0$

খ 'ক' থেকে পাই $x + y + z = 0$

$\therefore x + y = -z$

$$\therefore \frac{1}{p^y + p^{-z} + 1} + \frac{1}{p^z + p^{-x} + 1} + \frac{1}{p^x + p^{-y} + 1}$$

$$= \frac{1}{p^y + p^{x+y} + 1} + \frac{1}{p^{-(x+y)} + p^{-x} + 1} + \frac{p^y}{(p^x + p^{-y} + 1)p^y}$$

[$-z = x + y$ বসিয়ে]

$$= \frac{1}{p^{x+y} + p^y + 1} + \frac{1}{\frac{1}{p^{x+y}} + p^{-x} + 1} + \frac{p^y}{p^{x+y} + p^{-y+y} + p^y}$$

$$= \frac{1}{p^{x+y} + p^y + 1} + \frac{1}{\frac{1 + p^{-x+x+y} + p^{x+y}}{p^{x+y}}} + \frac{p^y}{p^{x+y} + p^o + p^y}$$

$$= \frac{1}{p^{x+y} + p^y + 1} + \frac{p^{x+y}}{p^{x+y} + p^y + 1} + \frac{p^y}{p^{x+y} + p^y + 1}$$

$$= \frac{1 + p^{x+y} + p^y}{p^{x+y} + p^y + 1}$$

$$= \frac{p^{x+y} + p^y + 1}{p^{x+y} + p^y + 1}$$

$= 1$ (Ans.)

গ বামপক্ষ $= \frac{(a^2 - b^{-2})^a (a - b^{-1})^{b-a}}{(b^2 - a^{-2})^b (b + a^{-1})^{a-b}}$

$$= \frac{\left(a^2 - \frac{1}{b^2}\right)^a \left(a - \frac{1}{b}\right)^{b-a}}{\left(b^2 - \frac{1}{a^2}\right)^b \left(b + \frac{1}{a}\right)^{a-b}}$$

$$= \frac{\left(\frac{a^2b^2 - 1}{b^2}\right)^a \left(\frac{ab - 1}{b}\right)^{b-a}}{\left(\frac{a^2b^2 - 1}{a^2}\right)^b \left(\frac{ab + 1}{a}\right)^{a-b}}$$

$$= \frac{\left\{\frac{(ab+1)(ab-1)}{b^2}\right\}^a \left(\frac{ab-1}{b}\right)^{b-a}}{\left\{\frac{(ab+1)(ab-1)}{a^2}\right\}^b \left(\frac{ab+1}{a}\right)^{a-b}}$$

$$= \frac{\frac{(ab+1)^a (ab-1)^a (ab-1)^{b-a}}{b^{2a} b^{b-a}}}{\frac{(ab+1)^b (ab-1)^b (ab+1)^{a-b}}{a^{2b} a^{a-b}}}$$

$$= \frac{(ab+1)^a (ab-1)^{a+b-a}}{b^{2a+b-a}} \times \frac{a^{2b+a-b}}{(ab+1)^{b+a-b} (ab-1)^b}$$

$$= \frac{(ab+1)^a (ab-1)^b}{b^{a+b}} \times \frac{a^{a+b}}{(ab+1)^a (ab-1)^b}$$

$$= \left(\frac{a}{b}\right)^{a+b}$$

প্রশ্নমতে, $\left(\frac{a}{b}\right)^{a+b} = 1$ ['খ' থেকে প্রাপ্ত রাশির মান।]

বা, $\left(\frac{a}{b}\right)^{a+b} = \left(\frac{a}{b}\right)^0$

$\therefore a + b = 0$

প্রশ্ন ব্যাংক উত্তরসহ সৃজনশীল রচনামূলক প্রশ্ন

প্রশ্ন ▶ ১৫ $\frac{(a^2 - b^{-2})^a (a - b^{-1})^{b-a}}{(b^2 - a^{-2})^b (b + a^{-1})^{a-b}}$ একটি সূচকীয় রাশি,

ক. $(a^2 - b^{-2})^a =$ কত ?

খ. $\frac{(a^2 - b^{-2})^a (a - b^{-1})^{b-a}}{(b + a^{-1})^{a-b}} =$ কত ?

গ. প্রদত্ত রাশির সরল মান কত?

উত্তর: ক. $\left(a + \frac{1}{b}\right)^a \left(a - \frac{1}{b}\right)^a$; খ. $\frac{\left(\frac{ab+1}{b}\right)^a \left(\frac{ab-1}{b}\right)^b}{\left(\frac{ab+1}{a}\right)^{a-b}}$;

গ. $\left(\frac{a}{b}\right)^{a+b}$

প্রশ্ন ▶ ১৬ $a = 2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}$ এবং $b^2 + 2 = 3^{\frac{2}{3}} + 3^{-\frac{2}{3}}$, $b > 0$

ক. দ্বিতীয় সমীকরণ থেকে দেখাও যে, $b = 3^{\frac{1}{3}} - 3^{-\frac{1}{3}}$.

খ. প্রমাণ কর যে, $3b^3 + 9b = 8$

গ. প্রথম সমীকরণ থেকে দেখাও যে, $2a^3 - 6a = 5$

প্রশ্ন ▶ ১৭ যদি $a^x = b^y = c^z$ যেখানে, $a \neq b \neq c$.

[মাতৃপীঠ সরকারি বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়, চাঁদপুর]

ক. $b = z$ এবং $c = y$ হলে দেখাও যে, $\left(\frac{y}{z}\right)^{\frac{y}{z}} = y^{\frac{y}{z} - 1}$ ২

খ. a, b এবং c পরপর তিনটি ধনাত্মক অখন্ড সংখ্যা হলে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{z}$. ৪

গ. $abc = 1$ হলে দেখাও যে, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ এবং $\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{xyz}$. ৪

প্রশ্ন ▶ ১৮ $P = x^a, Q = x^b$ এবং $R = x^c$

[সাতক্ষীরা সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়, সাতক্ষীরা]

ক. দেখাও যে, $P \times Q \times R = x$ হলে $a + b + c = 1$ ২

খ. $\left(\frac{P}{Q}\right)^{a^2+ab+b^2} \times \left(\frac{Q}{R}\right)^{b^2+bc+c^2} \times \left(\frac{R}{P}\right)^{c^2+ca+a^2}$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. যদি $a + b + c = 0$ হয় তবে দেখাও যে,

$$\frac{1}{P + \frac{1}{Q} + 1} + \frac{1}{R + \frac{1}{P} + 1} + \frac{1}{Q + \frac{1}{R} + 1}$$ ৪

উত্তর: খ. 1

এ অংশে অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ তথ্য ও সূত্র, পরীক্ষার আগে যার উপর চোখ বুলিয়ে নেওয়া প্রয়োজন বা অবশ্যই মনে রাখতে হবে এমন বিষয়সমূহ একনজরে উল্লেখ করা হয়েছে। পরীক্ষার আগে এ বিষয়গুলো রিভিশন দিলে পরীক্ষায় নির্ভুলভাবে অঙ্ক সমাধান করতে পারবে।

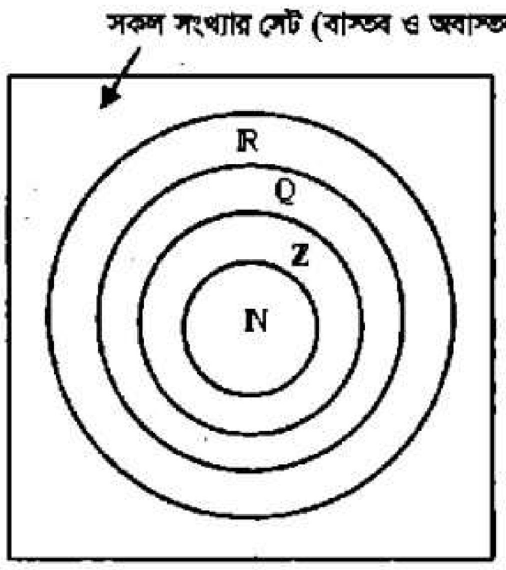
- **মূলদ সূচক (Rational exponent) :** মূলদ সূচক সম্বলিত a^m আকারের প্রতীকে a কে **নিধান** বা **ভিত্তি (base)** এবং m কে a এর ঘাতের **সূচক (exponent)** বলা হয়। a^m কে a এর m ঘাত বা **শক্তি** (power) বলা হয় এবং a ঘাত m (a to the power m) পড়া হয়।
- $\mathbb{R}$ সকল বাস্তব সংখ্যার সেট

  $\mathbb{N}$ সকল স্বাভাবিক সংখ্যা বা ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যার সেট

  $\mathbb{Z}$ সকল পূর্ণ সংখ্যার সেট (ধনাত্মক, ঋণাত্মক ও শূন্য)

  $\mathbb{Q}$ সকল মূলদ সংখ্যার সেট

  সেটগুলোর পারস্পরিক সম্পর্ক নিম্নের চিত্র থেকে বোঝা যায়,



অর্থাৎ, $N \subset Z \subset Q \subset R$

অমূলদ সংখ্যার সেট $Q' = R \setminus Q$

সূচক সম্পর্কিত সূত্র:

- **সূত্র ১:** $a \in R, n \in N$ হলে, $a^1 = a$

  $a^{n+1} = a^n \cdot a$
- **সূত্র ২:** $a \in \mathbb{R}$ এবং $m, n \in \mathbb{N}$ হলে, $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

  * এই সূত্রে বর্ণিত $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ কে সূচকের মৌলিক সূত্র বলা হয়।
- **সূত্র ৩:** $a \in R, a \neq 0$ এবং $m, n \in N$ হলে,

$$\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n}, & \text{যখন } m > n. \\ \frac{1}{a^{n-m}}, & \text{যখন } n > m \end{cases}$$

- **সূত্র ৪:** $a \in \mathbb{R}$ এবং $m, n \in \mathbb{N}$ হলে, $(a^m)^n = a^{mn}$
- **সূত্র ৫:** $a, b, \in \mathbb{R}$ এবং $n \in \mathbb{N}$ হলে, $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- **সূত্র ৬:** $a \neq 0, b \neq 0$ এবং $m, n \in \mathbb{Z}$ হলে,

  (i) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (ii) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (iii) $(a^m)^n = a^{mn}$

  (iv) $(ab)^n = a^n \cdot b^n$ (v) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
- **সূত্র ৭:** $a > 0$ হলে, $\sqrt[n]{a} > 0$
- **সূত্র ৮:** $a<0$ এবং $n \in \mathbb{N}, n > 1$, n বিজোড় হলে, $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{|a|}$
- **সূত্র ৯:** $a > 0, m \in \mathbb{Z}$ এবং $n \in \mathbb{N}, n > 1$ হলে,

  $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$
- **সূত্র ১০:** যদি $a > 0$ এবং $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ হয়, যেখানে $m, p \in \mathbb{Z}$, $n, q \in \mathbb{N}$, $n > 1, q > 1$, তবে $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[q]{a^p}$.
- যদি $a^x = 1$ হয়, যেখানে $a > 0$ এবং $a \neq 1$ তাহলে $x = 0$
- যদি $a^x = 1$ হয়, যেখানে $a > 0$ এবং $x \neq 0$ তাহলে $a = 1$
- যদি $a^x = a^y$ হয়, যেখানে $a > 0$ এবং $a \neq 1$ তাহলে $x = y$
- যদি $a^x = b^x$ হয়, যেখানে $\frac{a}{b} > 0$ এবং $x \neq 0$ তাহলে $a = b$

এখানে অধ্যায়টির অনুশীলনী, বহুনির্বাচনি ও সৃজনশীল প্রশ্নগুলো বিশ্লেষণ করে স্টার মার্কসহ সাজেশন দেওয়া হয়েছে। পরীক্ষার আগে অবশ্যই এ অঙ্কগুলো সমাধান করবে। তাহলে পরীক্ষায় যেকোনো অঙ্কের সমাধান সহজেই করতে পারবে।

সাজেশন | বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

	প্রশ্ন নম্বর
★★★	৩, ৫, ১০, ১১, ১৩, ২০, ২১, ২৪, ২৬, ২৮, ৩২, ৩৮, ৪১, ৫০, ৫১, ৫২, ৫৩, ৫৫, ৫৯, ৬০, ৬৪, ৬৬, ৭০, ৭৬, ৭৭, ৭৮, ৮২, ৮৩, ৮৪
★★	৬, ৭, ১২, ১৫, ২৫, ২৭, ৩০, ৩৩, ৪০, ৪৩, ৪৬, ৪৭, ৪৮, ৪৯, ৫৪, ৫৮, ৬১, ৬২, ৬৫, ৬৮, ৭২, ৭৯, ৮০, ৮১

সাজেশন | সৃজনশীল রচনামূলক প্রশ্ন

	প্রশ্ন নম্বর
★★★	৩, ৬, ৭, ১০, ১২, ১৩, ১৪
★★	২, ৪, ৫, ৮, ১১

অধ্যায়-৯

শ্রেণির কাজ পৃষ্ঠা নং ৫৫০

সূচকীয় ও লগারিদমীয় ফাংশন

অনুশীলনী-৯.২

অনুশীলনীটি পড়ে যা জানতে পারবে—

১. লগারিদমের বিভিন্ন সূত্রের প্রমাণ ও প্রয়োগ।
২. লগারিদমের ভিত্তি পরিবর্তনের নিয়ম।
৩. সূচকীয়, লগারিদমীয় ও পরমমান ফাংশনের ধারণার ব্যাখ্যা এবং এ সংক্রান্ত গাণিতিক সমস্যার সমাধান।
৪. ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কন।
৫. বিভিন্ন প্রকার ফাংশনকে লেখচিত্রের সাহায্যে উপস্থাপন।
৬. ক্যালকুলেটরের সাহায্যে লগ ও প্রতিলগ নির্ণয়।

১৭টি অনুশীলনীর প্রশ্ন।

৭৯টি বহুনির্বাচনি প্রশ্ন ■ ৩৯টি সাধারণ বহুনির্বাচনি ■ ১৭টি বহুপদী সমাপ্তিসূচক ■ ২৩টি অভিন্ন তথ্যভিত্তিক

৩৭টি সৃজনশীল প্রশ্ন ■ ৩টি অনুশীলনী ■ ১৫টি শ্রেণির কাজ ■ ১৪টি মাস্টার ট্রেইনার প্রণীত ■ ৫টি প্রশ্নব্যাংক

অনুশীলনীর সৃজনশীল বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

১. $\left\{\left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{a^2-b^2}{a+b}}\right\}^{\frac{a}{a-b}}$ **এর সরলমান কোনটি?**

ⓚ 0 ⓚ 1

ক 0　　খ 1

গ a　　ঘ x

ঘ

ব্যাখ্যা: $\left\{\left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{a^2-b^2}{a+b}}\right\}^{\frac{a}{a-b}} = \left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{a^2-b^2}{a+b}\times\frac{a}{a-b}}$

$= \left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{(a+b)(a-b)}{a+b}\times\frac{a}{a-b}} = \left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{a} = x$

২. যদি a, b, p > 0 এবং a ≠ 1, b ≠ 1 হয়, তবে

i. $\log_a P = \log_b P \times \log_a b$
ii. $\log_a\sqrt{a} \times \log_b\sqrt{b} \times \log_c\sqrt{c}$ এর মান 2
iii. $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$

উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii　　খ ii ও iii

গ i ও iii　　ঘ i, ii ও iii

গ

ব্যাখ্যা: (i) সূত্রানুসারে।

(ii) $\log_a\sqrt{a} \times \log_b\sqrt{b} \times \log_c\sqrt{c} = \log_a a^{\frac{1}{2}} \times \log_b b^{\frac{1}{2}} \times \log_c c^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2}\log_a a \times \frac{1}{2}\log_b b \times \frac{1}{2}\log_c c$

$= \frac{1}{2}\times 1 \times \frac{1}{2}\times 1 \times \frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{8}$

(iii) ধরি, $p = \log_a y$ এবং $q = \log_a x$.

সুতরাং $a^p = y$,　　$a^q = x$

বা, $(a^p)^q = y^q$

$\therefore$ $y^q = a^{pq}$.

এবং $(a^q)^p = x^p$

বা, $x^p = a^{pq}$.

বা, $x^p = y^q$.

$\therefore$ $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$

৩-৫ নং প্রশ্নের উত্তর দাও যখন x, y, z ≠ 0 এবং $a^x = b^y = c^z$

৩. কোনটি সঠিক ?

ক $a = b^{\frac{y}{z}}$　　খ $a = c^{\frac{z}{y}}$

গ $a = c^{\frac{z}{x}}$　　ঘ $a \neq \frac{b^2}{c}$

গ

ব্যাখ্যা: $a^x = c^z$ বা, $a = (c^z)^{\frac{1}{x}}$ $\therefore a = c^{\frac{z}{x}}$

৪. নিচের কোনটি ac এর সমান?

ক $b^{\frac{y}{x}} . b^{\frac{y}{z}}$　　খ $b^{\frac{y}{x}} . b^{\frac{z}{y}}$

গ $b^{\frac{y}{x}+\frac{z}{y}}$　　ঘ $b^{\frac{x}{y}+\frac{y}{z}}$

ক

ব্যাখ্যা: $a^x = b^y$

$a = (b^y)^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{y}{x}}$

$c^z = b^y$

$c = (b^y)^{\frac{1}{z}} = b^{\frac{y}{z}}$

$\therefore$ $ac = b^{\frac{y}{x}} . b^{\frac{y}{z}}$

৫. $b^2 = ac$ হলে নিচের কোনটি সঠিক?

ক $\frac{1}{x}+\frac{1}{z} = \frac{2}{y}$　　খ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{2}{z}$

গ $\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = \frac{2}{x}$　　ঘ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{z}{2}$

ক

ব্যাখ্যা: $a^x = b^y$ $\therefore a = b^{\frac{y}{x}}$

আবার, $c^z = b^y$ $\therefore c = b^{\frac{y}{z}}$

এখন, $b^2 = ac = b^{\frac{y}{x}} . b^{\frac{y}{z}} = b^{\frac{y}{x}+\frac{y}{z}}$

বা, $\frac{y}{x}+\frac{y}{z} = 2$ $\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{z} = \frac{2}{y}$

অনুশীলনীর প্রশ্ন ও সমাধান

প্রশ্ন-৬. দেখাও যে,

(ক) $\log_k\left(\frac{a^n}{b^n}\right)+\log_k\left(\frac{b^n}{c^n}\right)+\log_k\left(\frac{c^n}{a^n}\right)=0$

সমাধান: বামপক্ষ $=\log_k\left(\frac{a^n}{b^n}\right)+\log_k\left(\frac{b^n}{c^n}\right)+\log_k\left(\frac{c^n}{a^n}\right)$

$=\log_k\frac{a^n}{b^n}\cdot\frac{b^n}{c^n}\cdot\frac{c^n}{a^n}$

$=\log_k 1$

$=0$

= ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

(খ) $\log_k(ab)\log_k\left(\frac{a}{b}\right)+\log_k(bc)\log_k\left(\frac{b}{c}\right)+\log_k(ca)\log_k\left(\frac{c}{a}\right)=0$

সমাধান: বামপক্ষ

$=\log_k(ab)\log_k\left(\frac{a}{b}\right)+\log_k(bc)\log_k\left(\frac{b}{c}\right)+\log_k(ca)\log_k\left(\frac{c}{a}\right)$

$=(\log_k a+\log_k b)(\log_k a-\log_k b)+(\log_k b+\log_k c)(\log_k b-\log_k c)+(\log_k c+\log_k a)(\log_k c-\log_k a)$

$=(\log_k a)^2-(\log_k b)^2+(\log_k b)^2-(\log_k c)^2+(\log_k c)^2-(\log_k a)^2$

$=0$

= ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

(গ) $\log_{\sqrt{a}} b\times\log_{\sqrt{b}} c\times\log_{\sqrt{c}} a=8$

সমাধান: বামপক্ষ $=\log_{\sqrt{a}} b\times\log_{\sqrt{b}} c\log_{\sqrt{c}} a$

$=\log_{\sqrt{a}}(\sqrt{b})^2\times\log_{\sqrt{b}}(\sqrt{c})^2\times\log_{\sqrt{c}}(\sqrt{a})^2$

$=2\log_{\sqrt{a}}\sqrt{b}\times2\log_{\sqrt{b}}\sqrt{c}\times2\log_{\sqrt{c}}\sqrt{a}$ [$\because \log_a P^r=r\log_a P$]

$=8\log_{\sqrt{a}}\sqrt{b}\times\log_{\sqrt{b}}\sqrt{c}\times\log_{\sqrt{c}}\sqrt{a}$

$=8\log_{\sqrt{a}}\sqrt{b}\times\log_{\sqrt{b}}\sqrt{a}$ [$\because \log_a P=\log_a b\times\log_b P$]

$=8\log_{\sqrt{a}}\sqrt{a}$ [$\because \log_a P=\log_a b\times\log_b P$]

$=8\cdot1$ [$\because \log_a a=1$]

$=8$

= ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

(ঘ) $\log_a\log_a\log_a\left(a^{a^{a^b}}\right)=b$

সমাধান: বামপক্ষ $=\log_a\log_a\log_a\left(a^{a^{a^b}}\right)$

$=\log_a\log_a a^{a^b}\log_a a$ [$\because \log_a P^r=r\log_a P$]

$=\log_a\log_a a^{a^b}.1$ [$\because \log_a a^1=1$]

$=\log_a a^b\log_a a$

$=\log_a a^b$ [$\because \log_a a=1$]

$=b\log_a a$

$=b\cdot1$

$=b$

= ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন-৭. (ক) যদি $\frac{\log_k a}{b-c}=\frac{\log_k b}{c-a}=\frac{\log_k c}{a-b}$ **হয়, তবে দেখাও যে,** $a^a b^b c^c=1$

সমাধান: ধরি, $\frac{\log_k a}{b-c}=\frac{\log_k b}{c-a}=\frac{\log_k c}{a-b}=m$

$\therefore$ $\log_k a=m(b-c)$

বা, $a\log_k a=ma(b-c)$ [উভয়পক্ষকে a দ্বারা গুণ করে]

$\therefore$ $\log_k a^a=m(ab-ac)$ ... ... (i)

আবার, $\log_k b=m(c-a)$

বা, $b\log_k b=mb(c-a)$ [উভয়পক্ষকে b দ্বারা গুণ করে]

$\therefore$ $\log_k b^b=m(bc-ab)$ ... ... (ii)

এবং $\log_k c=m(a-b)$

বা, $c\log_k c=mc(a-b)$ [উভয়পক্ষকে c দ্বারা গুণ করে]

$\therefore$ $\log_k c^c=m(ac-bc)$ ... .. (iii)

এখন, (i), (ii) এবং (iii) যোগ করে পাই,

বা, $\log_k a^a+\log_k b^b+\log_k c^c=m(ab-ca+bc-ab+ca-bc)$

বা, $\log_k a^a b^b c^c=0$

বা, $\log_k a^a b^b c^c=\log_k 1$

$\therefore$ $a^a b^b c^c=1$ **(দেখানো হলো)**

(খ) যদি $\frac{\log_k a}{y-z}=\frac{\log_k b}{z-x}=\frac{\log_k c}{x-y}$ **হয়, তবে দেখাও যে,**

(১) $a^{y+z}b^{z+x}c^{x+y}=1$

(২) $a^{y^2+yz+z^2}.b^{z^2+zx+x^2}.c^{x^2+xy+y^2}=1$

সমাধান: (১) ধরি, $\frac{\log_k a}{y-z}=\frac{\log_k b}{z-x}=\frac{\log_k c}{x-y}=m$

তাহলে, $\frac{\log_k a}{y-z}=m$

বা, $\log_k a=m(y-z)$

বা, $(y+z)\log_k a=m(y-z)(y+z)$

[উভয়পক্ষকে (y + z) দ্বারা গুণ করে]

$\therefore$ $\log_k a^{y+z}=m(y^2-z^2)$ .... (i)

আবার, $\frac{\log_k b}{z-x}=m$

বা, $\log_k b=m(z-x)$

বা, $(z+x)\log_k b=m(z+x)(z-x)$

[উভয়পক্ষকে (z + x) দ্বারা গুণ করে]

$\log_k b^{z+x}=m(z^2-x^2)$ .... (ii)

এবং $\frac{\log_k c}{x-y}=m$

বা, $\log_k c=m(x-y)$

বা, $(x+y)\log_k c=m(x+y)(x-y)$

[উভয়পক্ষকে (x + y) দ্বারা গুণ করে]

$\therefore$ $\log_k c^{x+y}=m(x^2-y^2)$ .... (iii)

এখন, (i), (ii) ও (iii) যোগ করে পাই,

$\therefore$ $\log_k a^{y+z}+\log_k b^{z+x}+\log_k c^{x+y}=m(y^2-z^2+z^2-x^2+x^2-y^2)$

বা, $\log_k a^{y+z}b^{z+x}c^{x+y}=0=\log_k 1$

$\therefore$ $a^{y+z}b^{z+x}c^{x+y}=1$ **(দেখানো হলো)**

(২) ধরি $\frac{\log_k a}{y-z}=\frac{\log_k b}{z-x}=\frac{\log_k c}{x-y}=m$

$\therefore$ $\log_k a=m(y-z)$

বা, $(y^2+yz+z^2)\log_k a=m(y-z)(y^2+yz+z^2)$

$\therefore$ $\log_k a^{y^2+yz+z^2}=m(y^3-z^3)$ .... (i)

আবার, $\log_k b=m(z-x)$

বা, $(z^2+zx+x^2)\log_k b=m(z-x)(z^2+zx+x^2)$

$\therefore \quad \log_k b^{z^2+zx+x^2} = m(z^3 - x^3)$ .... (ii)

এবং $\log_k c = m(x - y)$

বা, $(x^2 + xy + y^2)\log_k c = m(x - y)(x^2 + xy + y^2)$

$\therefore \quad \log_k c^{x^2+xy+y^2} = m(x^3 - y^3)$ .... (iii)

এখন, (i), (ii) ও (iii) যোগ করে পাই,

$\log_k a^{y^2+yz+z^2} + \log_k b^{z^2+\text{[illegible]}x^2} + \log_k c^{x^2+xy+y^2}$
$= m(y^3 - z^3) + m(z^3 - x^3) + m(x^3 - y^3)$

বা, $\log_k a^{y^2+yz+z^2} b^{z^2+zx+x^2} c^{x^2+xy+y^2} =$
$m(y^3 - z^3 + z^3 - x^3 + x^3 - y^3)$ $[\because \log_a P^r = r\log_a P]$

বা $\log_k a^{y^2+yz+z^2} b^{z^2+zx+x^2} c^{x^2+xy+y^2} = 0 = \log_k 1$

$\therefore \quad a^{y^2+yz+z^2} b^{z^2+zx+x^2} c^{x^2+xy+y^2} = 1$ **(দেখানো হলো)**

(গ) যদি $\frac{\log_k(1+x)}{\log_k x} = 2$ হয়, তবে দেখাও যে, $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

সমাধান: দেওয়া আছে, $\frac{\log_k(1+x)}{\log_k x} = 2$

বা, $\log_k(1 + x) = 2\log_k x$

বা, $\log_k(1 + x) = \log_k x^2$ $[(\log_a P^r = r\log_a P)]$

বা, $1 + x = x^2$

বা, $x^2 - x - 1 = 0$

বা, $4x^2 - 4x - 4 = 0$ [উভয় পক্ষকে 4 দ্বারা গুণ করে]

বা, $(2x)^2 - 2.2x.1 + 1^2 - 5 = 0$

বা, $(2x - 1)^2 = 5$

বা, $2x - 1 = \sqrt{5}$ [ঋনাত্মক মান বর্জন করে]

বা, $2x = 1 + \sqrt{5}$

বা, $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ **(দেখানো হলো)**

(ঘ) দেখাও যে, $\log_k \frac{x - \sqrt{x^2-1}}{x + \sqrt{x^2-1}} = 2\log_k\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)$

সমাধান: বামপক্ষ $= \log_k \frac{x - \sqrt{x^2-1}}{x + \sqrt{x^2-1}}$

$$= \log_k \frac{\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^2}{\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)}$$

[লগের ভিতরের রাশির লব ও হরকে $\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)$ দ্বারা গুণ করে]

$$= \log_k \frac{\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^2}{x^2 - \left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}$$

$$= \log_k \frac{\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^2}{x^2 - x^2 + 1}$$

$$= \log_k\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^2$$

$= 2\log_k\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)$ $[\because \log_a P^r = r\log_a P]$

$\therefore \log_k \frac{x - \sqrt{x^2-1}}{x + \sqrt{x^2-1}} = 2\log_k\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)$ **(দেখানো হলো)**

(ঙ) যদি $a^{3-x} b^{5x} = a^{5+x} b^{3x}$ হয়, তবে দেখাও যে,
$x \log_k\left(\frac{b}{a}\right) = \log_k a$

সমাধান: দেওয়া আছে, $a^{3-x} b^{5x} = a^{5+x} b^{3x}$

বা, $\frac{b^{5x}}{b^{3x}} = \frac{a^{5+x}}{a^{3-x}}$ [উভয়পক্ষকে $a^{3-x}.b^{3x}$ দ্বারা ভাগ করে]

বা, $b^{5x-3x} = a^{5+x-3+x}$

বা, $b^{2x} = a^{2+2x}$

বা, $b^{2x} = a^2 \cdot a^{2x}$

বা, $\frac{b^{2x}}{a^{2x}} = a^2$ [উভয় পক্ষকে a^{2x} দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\log_k \frac{b^{2x}}{a^{2x}} = \log_k a^2$ [উভয়পক্ষে $\log_k$ নিয়ে]

বা, $\log_k\left(\frac{b}{a}\right)^{2x} = \log_k a^2$

বা, $2x\log_k\left(\frac{b}{a}\right) = 2\log_k a$

$\therefore \quad x\log_k\left(\frac{b}{a}\right) = \log_k a$ **(দেখানো হলো)**

(চ) যদি $xy^{a-1} = p$, $xy^{b-1} = q$, $xy^{c-1} = r$ হয়, তবে দেখাও যে, $(b - c)\log_k p + (c - a)\log_k q + (a - b)\log_k r = 0$

সমাধান: বামপক্ষ $= (b - c)\log_k p + (c - a)\log_k q + (a - b)\log_k r$

$= \log_k p^{b-c} + \log_k q^{c-a} + \log_k r^{a-b}$

$= \log_k(xy^{a-1})^{b-c} + \log_k(xy^{b-1})^{c-a} + \log_k(xy^{c-1})^{a-b}$

$= \log_k x^{b-c} + \log_k y^{ab-ac-b+c} + \log_k x^{c-a} + \log_k y^{bc-ab-c+a} +$
$\log_k x^{a-b} + \log_k y^{ac-bc-a+b}$

$= \log_k x^{b-c} + \log_k x^{c-a} + \log_k x^{a-b} + \log_k y^{ab-ac-b+c} +$
$\log_k y^{bc-ab-c+a} + \log_k y^{ac-bc-a+b}$

$= \log_k(x^{b-c}.x^{c-a}.x^{a-b}) + \log_k(y^{ab-ac-b+c}.y^{bc-ab-c+a}.y^{ac-bc-a+b})$

$= \log_k x^{b-c+c-a+a-b} + \log_k y^{ab-ac-b+c+bc-ab-c+a+ac-bc-a+b}$

$= \log_k x^0 + \log_k y^0$

$= \log_k 1 + \log_k 1$

$= 0 + 0 = 0$

= ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

(ছ) যদি $\frac{ab\log_k(ab)}{a+b} = \frac{bc\log_k(bc)}{b+c} = \frac{ca\log_k(ca)}{c+a}$ হয়, তবে দেখাও যে, $a^a = b^b = c^c$

সমাধান: ধরি, $\frac{ab\log_k(ab)}{a+b} = \frac{bc\log_k(bc)}{b+c} = \frac{ca\log_k(ca)}{c+a} = m$

$\therefore \quad \log_k(ab) = \frac{m(a+b)}{ab}$ .... (i)

আবার $\log_k(bc) = \frac{m(b+c)}{bc}$ .... (ii)

এবং $\log_k(ca) = \frac{m(c+a)}{ca}$ .... (iii)

এখন, (i) নং, (ii) নং ও (iii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$\log_k(ab) + \log_k(bc) + \log_k(ca) = \frac{m(a+b)}{ab} + \frac{m(b+c)}{bc} + \frac{m(c+a)}{ca}$

বা, $\log_k(ab \cdot bc \cdot ca) = m\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right]$

বা, $\log_k(abc)^2 = 2m\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right]$

বা, $2\log_k(abc) = 2m\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right]$

$\therefore \log_k(abc) = m\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right]$ ...... (iv)

(iv) নং থেকে (i) নং বিয়োগ করে পাই,

$\log_k(abc) - \log_k(ab) = m\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right] - \frac{m(a+b)}{ab}$

$= m\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right]$

বা, $\log_k\frac{abc}{ab}=\frac{m}{c}$

বা, $\log_k c=\frac{m}{c}$

বা, $c\log_k c=m$

বা, $\log_k c^c=m$

∴ $c^c=k^m$ ...... (v)

আবার, (iv) নং থেকে (ii) নং বিয়োগ করে পাই,

$$\log_k(abc)-\log_k(bc)=m\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right]-\frac{m(b+c)}{bc}$$

বা, $\log_k\frac{abc}{bc}=m\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right]$

বা, $\log_k a=\frac{m}{a}$

বা, $a\log_k a=m$

বা, $\log_k a^a=m$

∴ $a^a=k^m$ ...... (vi)

পুনরায়, (iv) নং থেকে (iii) নং বিয়োগ করে পাই,

$$\log_k(abc)-\log_k(ca)=m\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right]-\frac{m(c+a)}{ca}$$

বা, $\log_k\frac{abc}{ca}=m\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right]$

বা, $\log_k b=\frac{m}{b}$

বা, $b\log_k b=m$

বা, $\log_k b^b=m$

∴ $b^b=k^m$ ...... (vii)

সুতরাং, (v), (vi) ও (vii) নং থেকে লেখা যায়,

$a^a=b^b=c^c=k^m$

∴ $a^a=b^b=c^c$ **(দেখানো হলো)**

বিকল্প সমাধান:

ধরি, $\frac{ab\log_k ab}{a+b}=\frac{bc\log_k bc}{b+c}=\frac{ca\log_k ca}{c+a}=p$

তাহলে, $\log_k ab=\frac{p(a+b)}{ab}$

বা, $\log_k a+\log_k b=p\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)$ ...... (i)

অনুরূপভাবে, $\log_k b+\log_k c=p\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}\right)$ ...... (ii)

এবং $\log_k c+\log_k a=p\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)$ ...... (iii)

এখন, (i) + (ii) + (iii) থেকে পাই,

$$2(\log_k a+\log_k b+\log_k c)=2p\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

$$\log_k a+\log_k b+\log_k c=p\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \text{ ...... (iv)}$$

আবার, (iv) নং থেকে (i) নং বিয়োগ করে পাই,

$\log_k c=p\left(\frac{1}{c}\right)$

বা, $c\log_k c=p$

∴ $\log_k c^c=p$

(iv) নং থেকে (ii) নং বিয়োগ করে পাই,

$\log_k a=p\left(\frac{1}{a}\right)$

বা, $a\log_k a=p$

∴ $\log_k a^a=p$

(iv) নং থেকে (iii) নং বিয়োগ করে পাই,

$\log_k b=p\left(\frac{1}{b}\right)$

বা, $b\log_k b=p$

∴ $\log_k b^b=p$

সুতরাং, $\log_k a^a=\log_k b^b=\log_k c^c$

∴ $a^a=b^b=c^c$ **(দেখানো হলো)**

(জ) যদি $\frac{x(y+z-x)}{\log_k x}=\frac{y(z+x-y)}{\log_k y}=\frac{z(x+y-z)}{\log_k z}$ হয়, তবে দেখাও যে, $x^yy^x=y^zz^y=z^xx^z$

সমাধান: ধরি, $\frac{x(y+z-x)}{\log_k x}=\frac{y(z+x-y)}{\log_k y}=\frac{z(x+y-z)}{\log_k z}=m$

$\log_k x=\frac{x(y+z-x)}{m}$

আবার, $\log_k y=\frac{y(z+x-y)}{m}$

এবং $\log_k z=\frac{z(x+y-z)}{m}$

এখন, $y\log_k x+x\log_k y=\frac{xy(y+z-x)}{m}+\frac{xy(z+x-y)}{m}$

$=\frac{xy}{m}(y+z-x+z+x-y)=\frac{2xyz}{m}$

বা, $\log_k x^y+\log_k y^x=\frac{2xyz}{m}$

বা, $\log_k x^yy^x=\frac{2xyz}{m}$

∴ $x^yy^x=k^{\frac{2xyz}{m}}$ ...... (i)

আবার, $z\log_k y+y\log_k z=\frac{yz(z+x-y)}{m}+\frac{yz(x+y-z)}{m}$

বা, $\log_k y^z+\log_k z^y=\frac{yz}{m}(z+x-y+x+y-z)$

বা, $\log_k y^zz^y=\frac{2xyz}{m}$

∴ $y^zz^y=k^{\frac{2xyz}{m}}$ ...... (ii)

পুনরায়, $x\log_k z+z\log_k x=\frac{zx(x+y-z)}{m}+\frac{zx(y+z-x)}{m}$

বা, $\log_k z^x+\log_k x^z=\frac{zx}{m}(x+y-z+y+z-x)$

বা, $\log_k z^xx^z=\frac{2xyz}{m}$

∴ $z^xx^z=k^{\frac{2xyz}{m}}$ ...... (iii)

সুতরাং (i), (ii) ও (iii) নং থেকে পাই,

$x^yy^x=y^zz^y=z^xx^z$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন-৮. লগ সারণি (মাধ্যমিক বীজগণিত পুস্তক দ্রষ্টব্য) ব্যবহার করে P এর আসন্ন মান নির্ণয় কর যেখানে,

(ক) $P=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ যেখানে $\pi\approx 3.1416$, $g=981$ এবং $l=25.5$

(খ) $P=10000\times e^{0.05t}$ যেখানে $e=2.718$ এবং $t=13.86$

সমাধান:

(ক) $P=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

বা, $P=2\times 3.1416\sqrt{\frac{25.5}{981}}$ যেখানে $\pi=3.1416$, $l=25.5$, $g=981$

বা, $\log P = \log 6.2832 + \frac{1}{2}\log 25.5 - \frac{1}{2}\log 981$ [log নিয়ে]

বা, $\log P = 0.79818 + \frac{1}{2}(1.40654 - 2.99167)$ [log সারণি থেকে]

বা, $\log P = 0.7818 - 0.79257$

বা, $\log P = 0.005615$

$\therefore$ $P = \text{antilog } 0.005615$

$\therefore$ $P = 1.01302$ (প্রায়)

উত্তর: 1.01302 (প্রায়)

(খ) $P = 10000 \times e^{0.05t}$ যেখানে $e = 2.718$ এবং $t = 13.86$

$\log P = \log 10000 + \log e^{0.05t}$ [log নিয়ে]

বা, $\log P = 4 + 0.05 \times 13.86 \log 2.718$

বা, $\log P = 4 + 0.693 \times 0.43425$ [log সারণি থেকে]

বা, $\log P = 4 + 0.30093$

বা, $\log P = 4.30093$

$\therefore$ $P = \text{antilog } 4.30093 = 19995.62$ (প্রায়)

উত্তর: 19995.62 (প্রায়)

[পাঠ্য বইয়ে $e = 1.718$ এর স্থলে $e = 2.718$ হবে]

প্রশ্ন-৯. $\ln P \approx 2.3026 \times \log P$ সূত্র ব্যবহার করে $\ln P$ এর আসন্ন মান নির্ণয় কর যখন–

(ক) $P = 10000$, (খ) $P = 0.001\, e^2$ (গ) $P = 10^{100} \times \sqrt{e}$

সমাধান:

(ক) দেওয়া আছে,

$P = 10000$

বা, $\log P = \log 10000$ [উভয় পক্ষে log নিয়ে]

$= \log 10^4$

$= 4 \log 10$

$= 4 \times 1$

$\therefore$ $\log P = 4$

এখন, $\ell n\, P = 2.3026 \times \log P$

$= 2.3026 \times 4$ [মান বসিয়ে]

$= 9.2104$ (প্রায়) (Ans.)

(খ) দেওয়া আছে, $P = 0.001\, e^2$

বা, $\log P = \log (0.001 e^2)$ [উভয় পক্ষে log নিয়ে]

$= \log 0.001 + \log e^2$

$= \log 10^{-3} + 2\log e$

$= -3 \log 10 + 2\log 2.71828$ [$\because e = 2.71828$]

$= -3 \times 1 + 2 \times 0.434249452$ [log সরণি থেকে]

$= -3 + 0.868498904$

$\log P = -2.131501096$

$\ell n P = 2.3026 \times \log p$

$= 2.3026 \times (-2.13141162)$ [মান বসিয়ে]

$= -4.90779$ (প্রায়) (Ans.)

(গ) দেওয়া আছে, $P = 10^{100} \times \sqrt{e}$

বা, $\log P\, (10^{100} \times \sqrt{e})$ [উভয় পক্ষে log নিয়ে]

$= \log 10^{100} + \log\sqrt{e}$

$= 100 \log 10 + \frac{1}{2} \log e$

$= 100 \times 1 + \frac{1}{2} \log 2.718$ [$\because e = 2.718$]

$= 100 + \frac{1}{2} \times 0.434249452$ [log সরণি থেকে]

$= 100 + 0.217124726$

$\therefore \log P = 100.217124726$

এখন, $\ell n P = 2.3026 \times \log P$

$= 2.3026 \times 100.21712476$ [মান বসিয়ে]

$= 230.76$ (প্রায়) (Ans.)

প্রশ্ন-১০. লেখচিত্র অঙ্কন কর :

(ক) $y = 3^x$ (খ) $y = -3^x$ (গ) $y = 3^{x+1}$ (ঘ) $y = -3^{x+1}$

(ঙ) $y = 3^{-x+1}$ (চ) $y = 3^{x-1}$

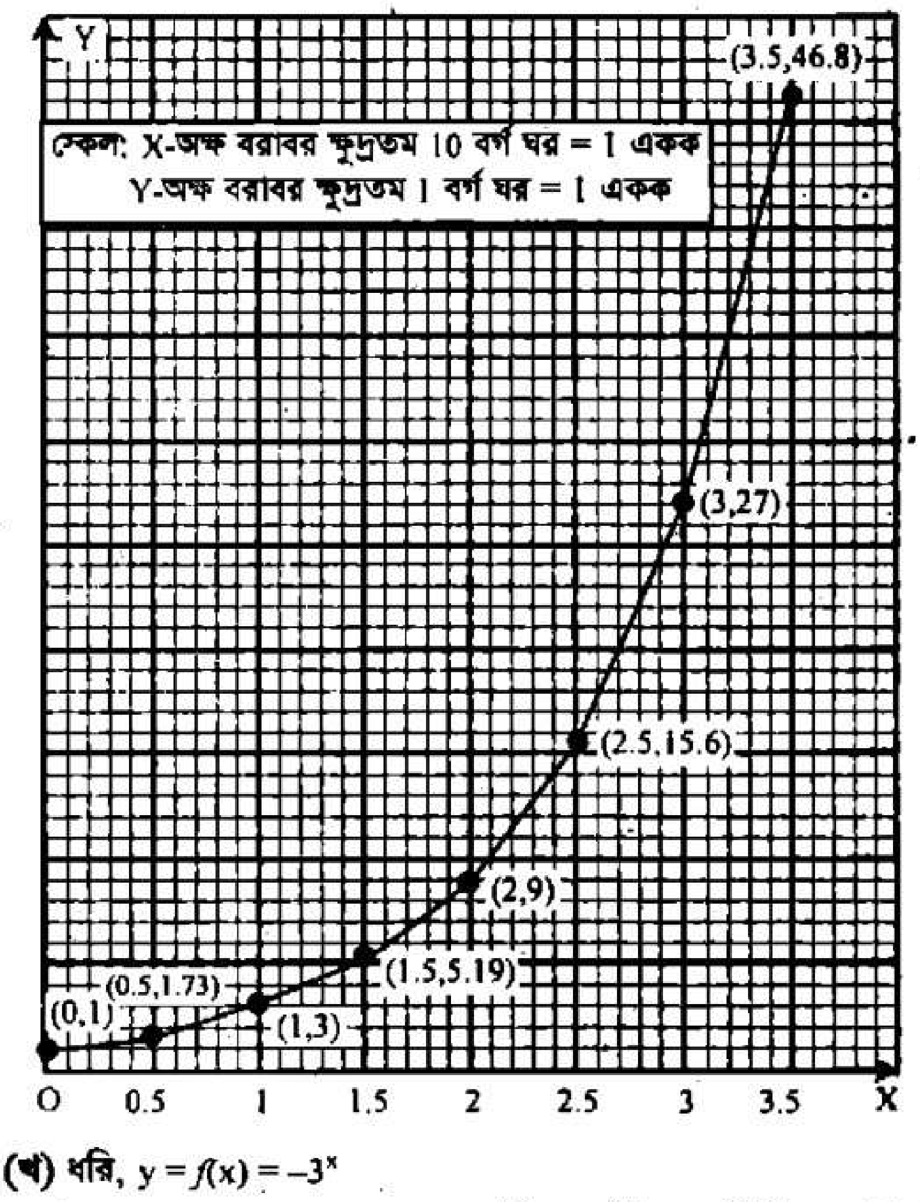
সমাধান :

(ক) ধরি, $y = f(x) = 3^x$

0 থেকে 3.5 এর মধ্যে x এর কয়েকটি মান নিয়ে সংশ্লিষ্ট y এর মান নিম্নের ছকে দেখানো হলো-

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5
y	1	1.73	3	5.19	9	15.6	27	46.8

এখন, ছক কাগজে সুবিধামত X অক্ষ XOX′ এবং Y অক্ষ YOY′ আঁকি। X-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 10 বর্গ ঘর = 1 একক এবং Y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 1 বর্গ ঘর = 1 এক একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো স্থাপন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে $y = f(x) = 3^x$ এর লেখ পাওয়া যায়। যা নিম্নে দেখানো হলো।

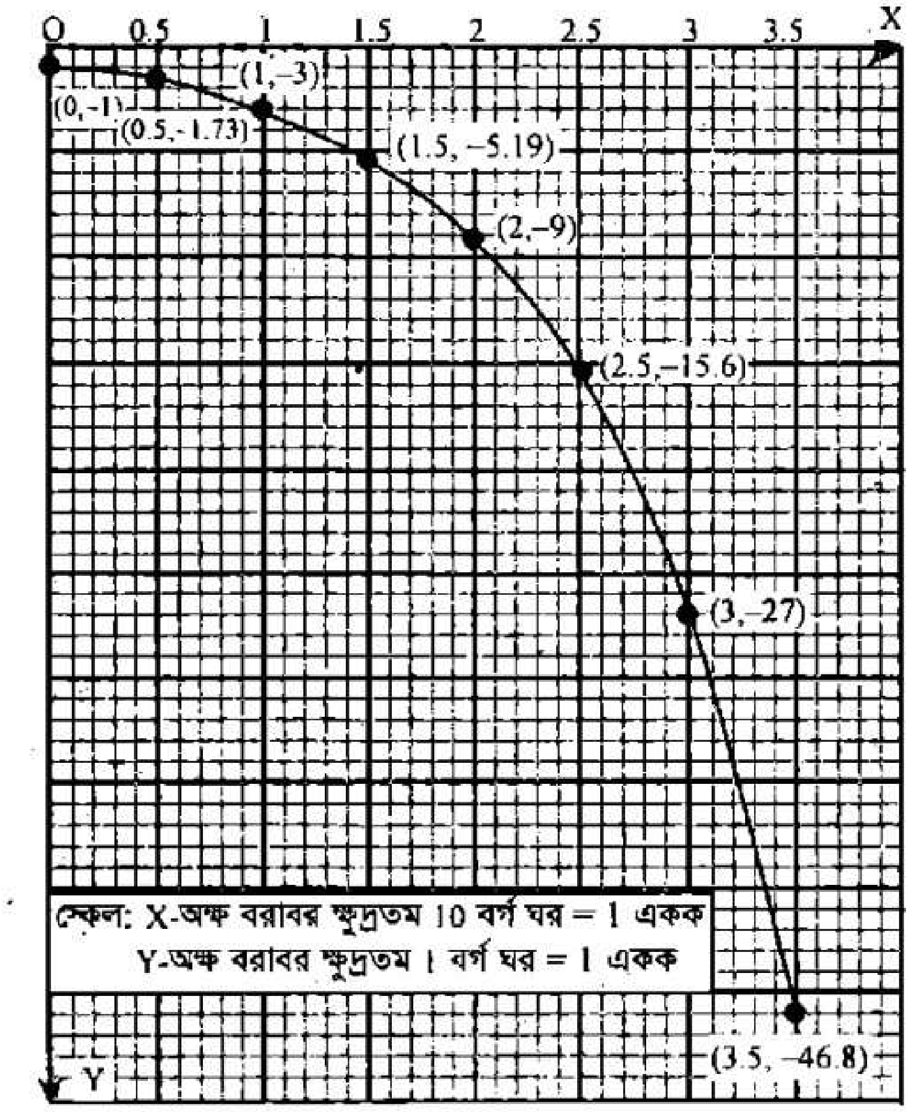


(খ) ধরি, $y = f(x) = -3^x$

0 থেকে 3.5 এর মধ্যে x এর কয়েকটি মান নিয়ে সংশ্লিষ্ট y এর মান নিম্নের ছকে দেখানো হলো—

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5
y	−1	−1.73	−3	−5.19	−9	−15.6	−27	−46.8

এখন, ছক কাগজে সুবিধামত X অক্ষ XOX′ এবং Y অক্ষ YOY′ আঁকি। X-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 10 বর্গ ঘর = 1 একক এবং Y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 1 বর্গঘর = 1 এক একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো পাতন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে $y = f(x) = -3^x$ এর লেখ পাওয়া যায়। যা নিম্নে দেখানো হলো।

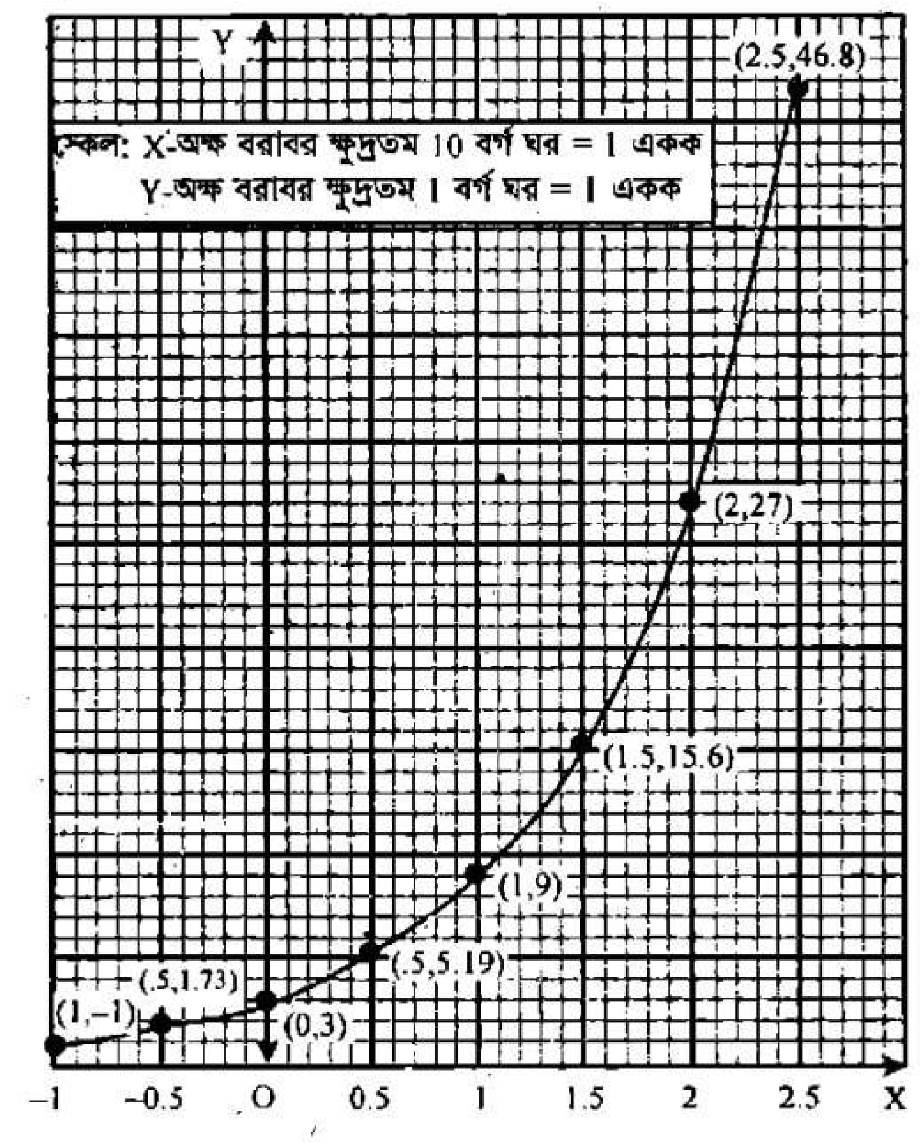


(গ) ধরি, $y = f(x) = 3^{x+1}$

−1 থেকে 3 এর মধ্যে x এর কয়েকটি মান নিয়ে সংশ্লিষ্ট y এর মান নিম্নের ছকে দেখানো হলো—

x	−1	−0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5
y	1	1.73	3	5.19	9	15.6	27	46.8

এখন, ছক কাগজে সুবিধামত X-অক্ষ XOX′ এবং Y অক্ষ YOY′ আঁকি। X-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 10 বর্গ ঘর = 1 একক এবং Y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 1 বর্গঘর = 1 এক একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো পাতন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে $y = f(x) = 3^{x+1}$ এর লেখ পাওয়া যায়। যা নিম্নে দেখানো হলো।



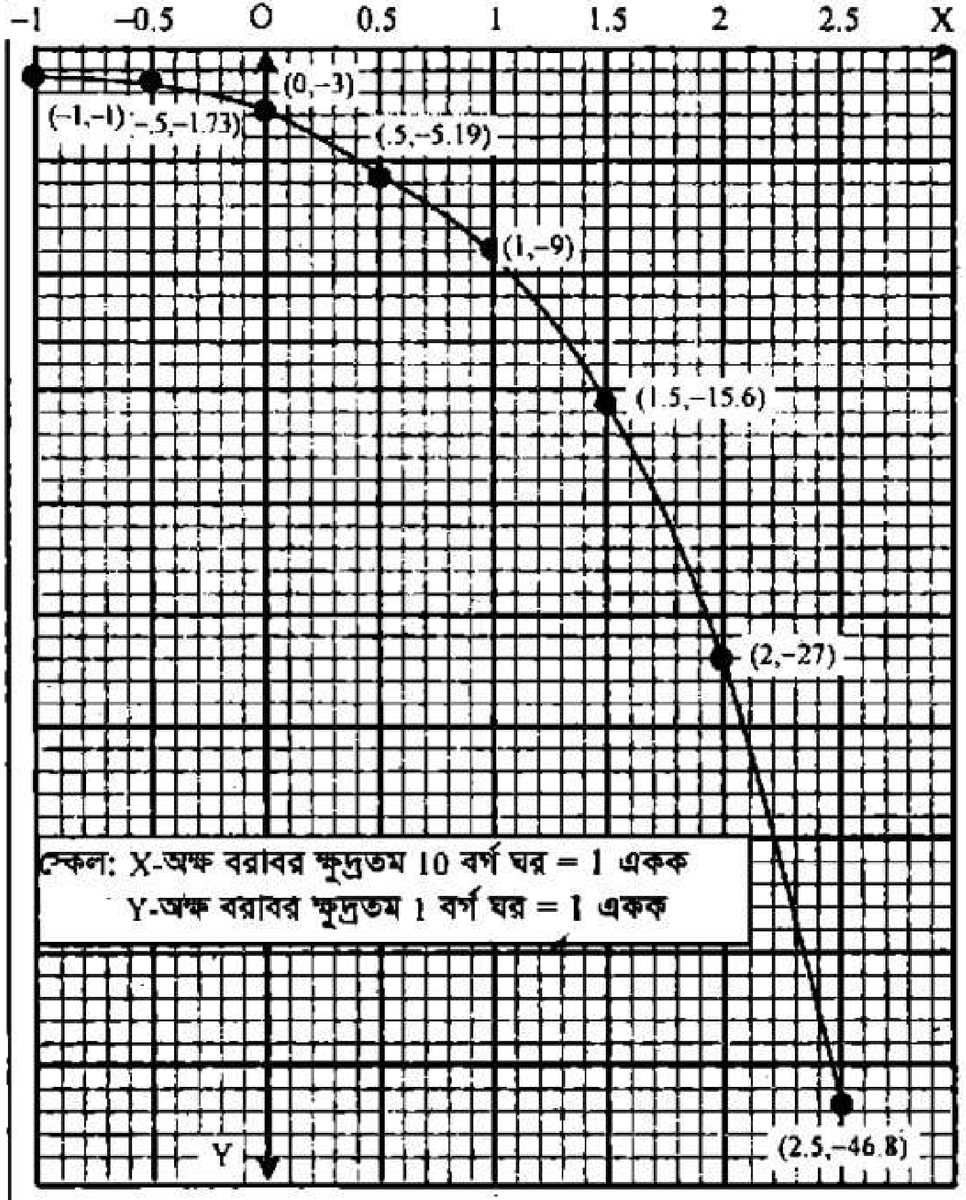
(ঘ) ধরি,

$y = f(x) = -3^{x+1}$

−1 থেকে 2.5 এর মধ্যে x এর কয়েকটি মান নিয়ে সংশ্লিষ্ট y এর মান নিম্নের ছকে দেখানো হলো—

x	−1	−0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5
y	−1	−1.73	−3	−5.19	−9	−15.6	−27	−46.8

এখন, ছক কাগজে সুবিধামত X-অক্ষ XOX′ এবং Y-অক্ষ YOY′ আঁকি। X-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 10 বর্গ ঘর = 1 একক এবং Y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 1 বর্গঘর = 1 এক একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো পাতন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে $y = f(x) = -3^{x+1}$ এর লেখ পাওয়া যায়। যা নিম্নে দেখানো হলো।



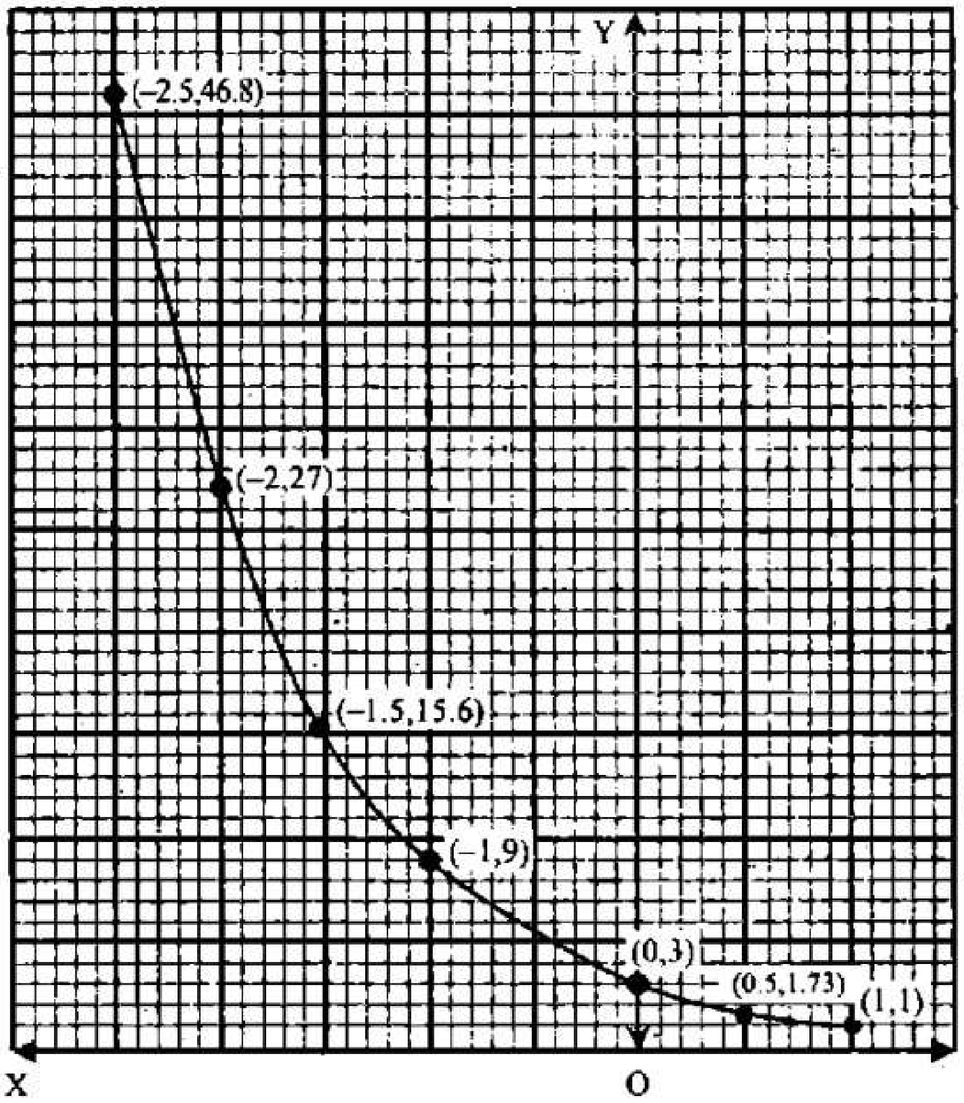
(ঙ) ধরি,

$y = f(x) = 3^{-x+1}$

−2.5 থেকে 1 এর মধ্যে x এর কয়েকটি মান নিয়ে সংশ্লিষ্ট y এর মান নিম্নের ছকে দেখানো হলো—

x	1	0.5	0	−0.5	−1	−1.5	−2	−2.5
y	1	1.73	3	5.19	9	15.6	27	46.8

এখন, ছক কাগজে সুবিধামত X-অক্ষ XOX′ এবং Y-অক্ষ YOY′ আঁকি। X-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 10 বর্গ ঘর = 1 একক এবং Y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 1 বর্গ ঘর = 1 এক একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো পাতন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে $y = f(x) = 3^{-x+1}$ এর লেখ পাওয়া যায়। যা নিম্নে দেখানো হলো।

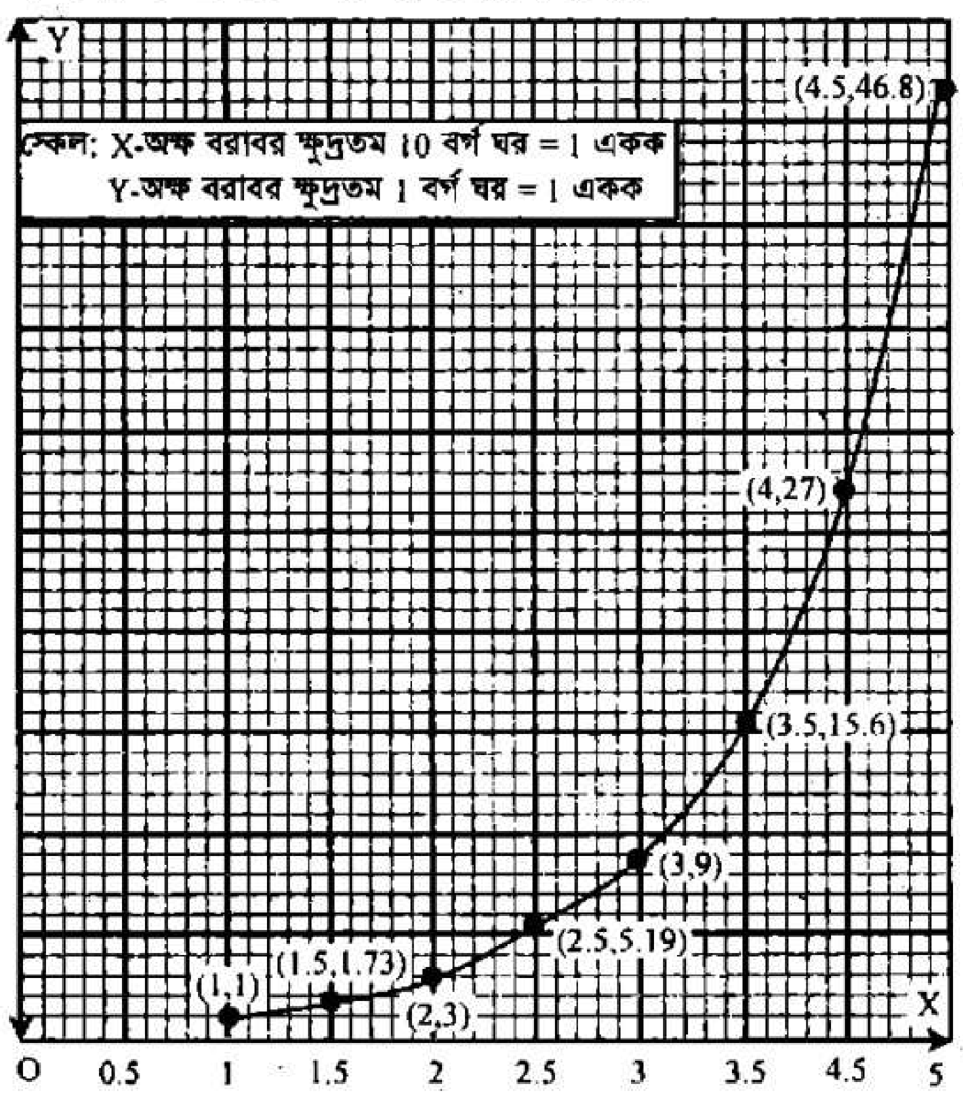


(চ) ধরি, $y = f(x) = 3^{x-1}$

1 থেকে 4.5 এর মধ্যে x এর কয়েকটি মান নিয়ে সংশ্লিষ্ট y এর মান নিম্নের ছকে দেখানো হলো—

x	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5
y	1	1.73	3	5.19	9	15.6	27	46.8

এখন, ছক কাগজে সুবিধামত X-অক্ষ XOX′ এবং Y-অক্ষ YOY′ আঁকি। X-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 10 বর্গ ঘর = 1 একক এবং Y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 1 বর্গঘর = 1 এক একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো পাতন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে $y = f(x) = 3^{x-1}$ এর লেখ পাওয়া যায়। যা নিম্নে দেখানো হলো।



প্রশ্ন-১১. নিচের ফাংশনের বিপরীত ফাংশন লিখ এবং লেখচিত্র অঙ্কন করে ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

(ক) $y = 1 - 2^{-x}$

সমাধান: ধরি, $y = f(x) = 1 - 2^{-x}$

এখন, $y = 1 - 2^{-x}$

বা, $2^{-x} = 1 - y$

বা, $1 - y = 2^{-x}$

বা, $\log_2(1-y) = -x$

বা, $x = -\log_2(1-y)$

$\therefore \quad x = \log_2\left(\frac{1}{1-y}\right)$

বিপরীত ফাংশন $f^{-1} : y \rightarrow x$

যেখানে, $x = \log_2\left(\frac{1}{1-y}\right)$

বা, $f^{-1} : y \rightarrow \log_2\left(\frac{1}{1-y}\right)$

y এর পরিবর্তে x স্থাপন করলে পাই,

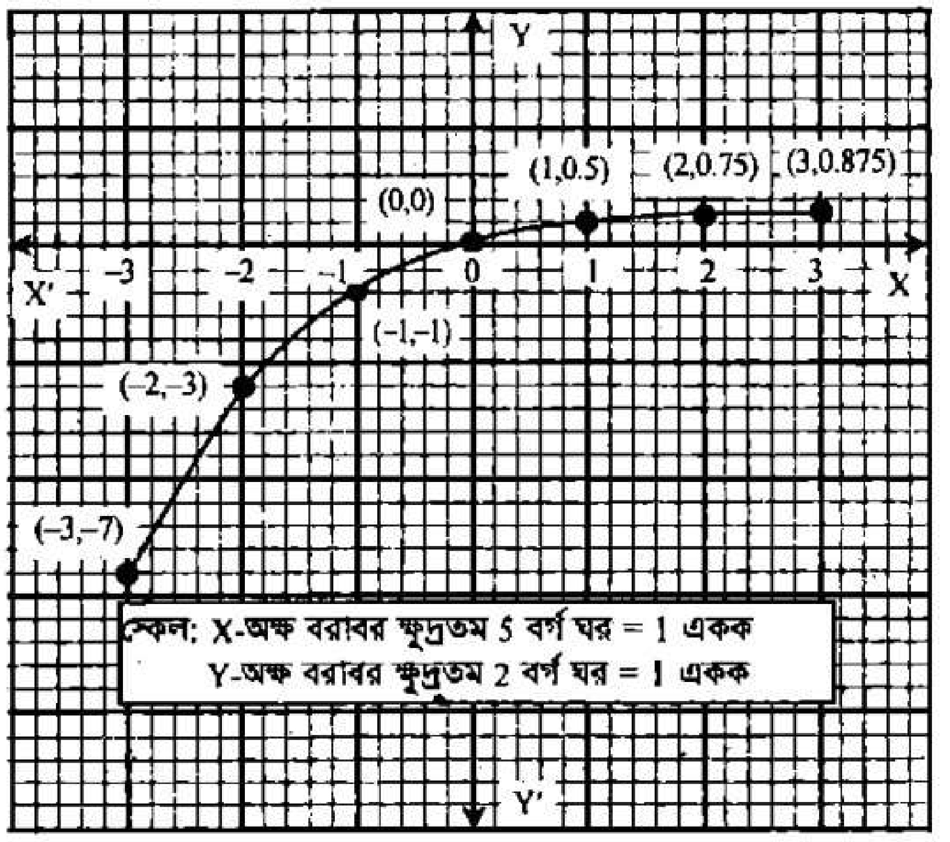
$f^{-1} : x \rightarrow \log_2\left(\frac{1}{1-x}\right)$

$\therefore \quad f^{-1}(x) = \log_2\left(\frac{1}{1-x}\right)$

লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর মান নির্ণয় করি।

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	–7	–3	–1	0	0.5	0.75	0.875

প্রাপ্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে বসিয়ে বিন্দুগুলো সংযোগ করে প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র আঁকি।



চিত্র থেকে লক্ষ করলে দেখা যায়, যখন $x = 0$ তখন, $y = 1 - 2^{\circ} = 1 - 1 = 0$, কাজেই লেখটি (0, 0) বিন্দুগামী।

আবার, x এর মান যত বৃদ্ধি পায় y এর মান তত 1 এর কাছাকাছি পৌছায় কিন্তু 1 হয় না। অর্থাৎ যখন $x \rightarrow \infty$ তখন $y \rightarrow 1$

আবার, x এর মান ঋণাত্মক দিকে যত বৃদ্ধি পায় y এর মান ততই হ্রাস পেতে থাকে এবং ক্রমান্বয়ে $-\infty$ দিকে ধাবিত হয়। অর্থাৎ যখন $x \rightarrow -\infty$ তখন $y \rightarrow -\infty$

$\therefore$ ডোমেন $D_f = (-\infty, \infty)$ ও রেঞ্জ $R_f = (1, -\infty)$

[বি: দ্র: পাঠ্যবইয়ের উত্তর ভুল আছে]

(খ) $y = \log_{10}x$

সমাধান: মনে করি, $y = f(x) = \log_{10}x$

এখন, $y = \log_{10}x$

$\therefore \quad x = 10^y$

বিপরীত ফাংশন $f^{-1} : y \rightarrow x$ যেখানে, $x = 10^y$

বা, $f^{-1} : y \rightarrow 10^y$

y এর স্থলে x স্থাপন করলে

$f^{-1} : x \rightarrow 10^x$

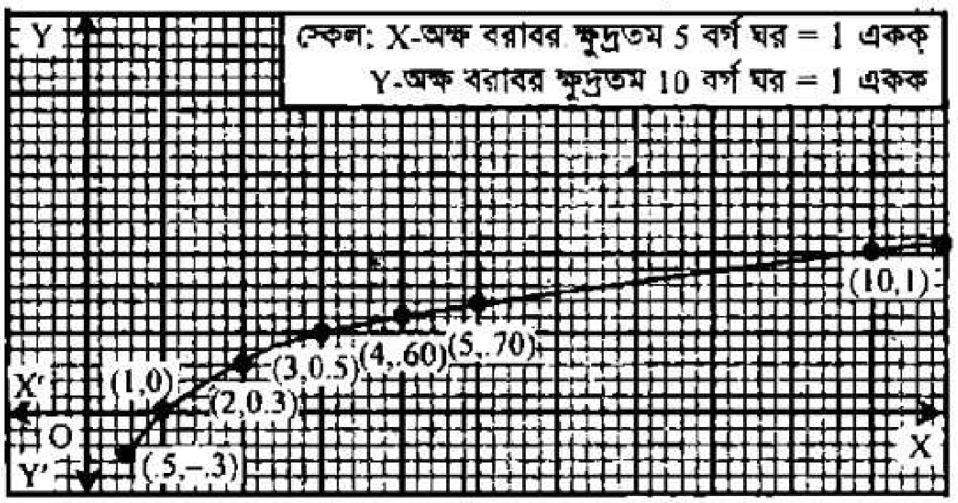
$\therefore \quad f^{-1}(x) = 10^x$

লেখচিত্র অঙ্কন:

লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর মান নির্ণয় করি।

x	0.5	1	2	3	4	5	10
y	–0.3	0	0.3	0.5	0.6	0.7	1

প্রাপ্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে বসিয়ে বিন্দুগুলো সংযোগ করে প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র আঁকি।



যেহেতু লগারিদম শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয় এবং শূন্যতে (০) অসংজ্ঞায়িত।

$\therefore$ ডোমেন $= (0, \infty)$

লেখচিত্র হতে পাই x যতই শূন্যের (০) কাছাকাছি হয় y ততই হ্রাস পায়, অর্থাৎ $x \rightarrow 0,\ y \rightarrow -\infty$, x ধনাত্মক দিকে বৃদ্ধি পেলে y ও অসীমের দিকে ধাবিত হয়। অর্থাৎ

$x \rightarrow +\infty, y \rightarrow +\infty$

$\therefore$ রেঞ্জ $= (-\infty, +\infty)$

অর্থাৎ, ডোমেন $= (0, +\infty)$

রেঞ্জ $= (-\infty, +\infty)$

(গ) $y = x^2, x > 0$

সমাধান: মনে করি, $y = f(x) = x^2, x > 0$

এখন, $y = x^2$

$\therefore \quad x = \pm\sqrt{y}$

কিন্তু $x = \sqrt{y}$ $[\because x > 0]$

বিপরীত ফাংশন, $f^{-1} : y \rightarrow x$ যেখানে $x = \sqrt{y}$

বা, $f^{-1} : y \rightarrow \sqrt{y}$

y এর স্থলে x স্থাপন করে পাই,

$f^{-1} : x \rightarrow \sqrt{x}$

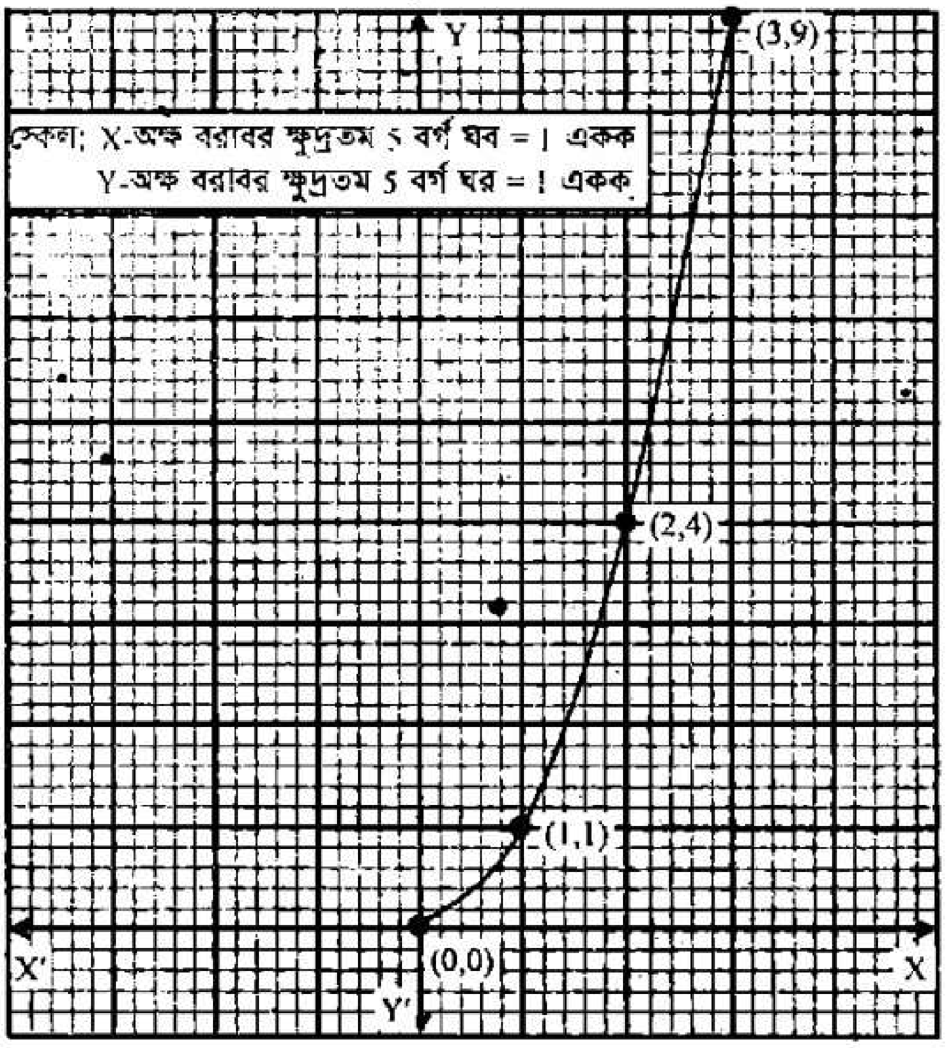
$\therefore \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

লেখচিত্র অঙ্কন:

লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর মান নির্ণয় করি।

x	0	1	2	3
y	0	1	4	9

প্রাপ্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে বসিয়ে বিন্দুগুলো সংযোগ করে প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র আঁকি।



প্রদত্ত তথ্যমতে, $f(x) = x^2, x > 0$, তাহলে শূন্য ব্যতীত সকল বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ সংজ্ঞায়িত

$\therefore$ ডোমেন $= (0, +\infty)$

এবং লেখচিত্র হতে পাই রেঞ্জ $= (0, +\infty)$

প্রশ্ন-১২. $f(x) = ln(x - 2)$ ফাংশনটির D_f ও R_f নির্ণয় কর:

সমাধান : দেওয়া আছে, $f(x) = ln(x - 2)$

যেহেতু লগারিদম শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore \quad x - 2 > 0$

$\therefore \quad x > 2$

$\therefore$ ডোমেন $D_f = \{x : x > 2\} = (2, \infty)$

রেঞ্জ : $y = ln(x - 2)$ $[\because y = f(x)]$

$\Rightarrow \quad e^y = x - 2$

$\therefore \quad x = e^y + 2$

y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ $R_f = \mathbb{R}$

উত্তর : ডোমেন $D_f = (2, \infty)$ ও রেঞ্জ $R_f = \mathbb{R}$.

প্রশ্ন-১৩. $f(x) = ln\dfrac{1 - x}{1 + x}$ ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $f(x) = ln\dfrac{1 - x}{1 + x}$

যেহেতু লগারিদম শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore \quad \dfrac{1 - x}{1 + x} > 0$ যদি (i) $1 - x > 0$ এবং $1 + x > 0$ হয়

অথবা, (ii) $1 - x < 0$ এবং $1 + x < 0$ হয়।

(i) $-x > -1$ এবং $x > -1$

$\Rightarrow x < 1$ এবং $x > -1$

$\therefore$ ডোমেন $D_f = \{x : -1 < x\} \cap \{x : x < 1\}$

$= (-1, \infty) \cap (-\infty, 1)$

$= (-1, 1)$

(ii) $-x < -1$ এবং $x < -1$

$\Rightarrow x > 1$ এবং $x < -1$

ডোমেন $D_f = \{x : x < -1\} \cap \{x : x > 1\} = \phi$

প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন

D_f = (i) ও (ii) এর ক্ষেত্রে প্রাপ্ত ডোমেনের সংযোগ সেট

$= (-1, 1) \cup \varnothing = (-1, 1)$

ধরি, রেঞ্জ : $y = f(x) = ln\frac{1 - x}{1 + x}$

$$\Rightarrow \quad e^y = \frac{1 - x}{1 + x}$$

$$\Rightarrow \quad 1 - x = (1 + x)e^y$$

$$\Rightarrow \quad 1 - x = e^y + xe^y$$

$$\Rightarrow \quad 1 - e^y = x(1 + e^y)$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1 - e^y}{1 + e^y}$$

y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়।

∴ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ $R_f = \mathbb{R}$

উত্তর : প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন $D_f = (-1, 1)$

প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ $R_f = \mathbb{R}$.

প্রশ্ন-১৪. ডোমেন, রেঞ্জ উল্লেখসহ লেখচিত্র অঙ্কন কর।

(ক) $f(x) = |x|$ যখন $-5 \leq x \leq 5$

সমাধান: দেওয়া আছে, $f(x) = |x|$, যখন, $-5 \leq x \leq 5$

x এর প্রদত্ত সীমার মধ্যে $f(x)$ সর্বদা সংজ্ঞায়িত।

∴ $D_f = \{x: -5 \leq x \leq 5\} = [-5, 5]$

আবার যেহেতু $f(x)$ পরমমান ফাংশন তাই $-5 \leq x \leq 5$ ব্যবধিতে $f(x)$ এর মান হবে $0 \leq f(x) \leq 5$.

∴ $R_f = \{f(x): 0 \leq f(x) \leq 5\} = [0, 5]$

∴ ডোমেন $D_f = [-5, 5]$, রেঞ্জ $R_f = [0, 5]$

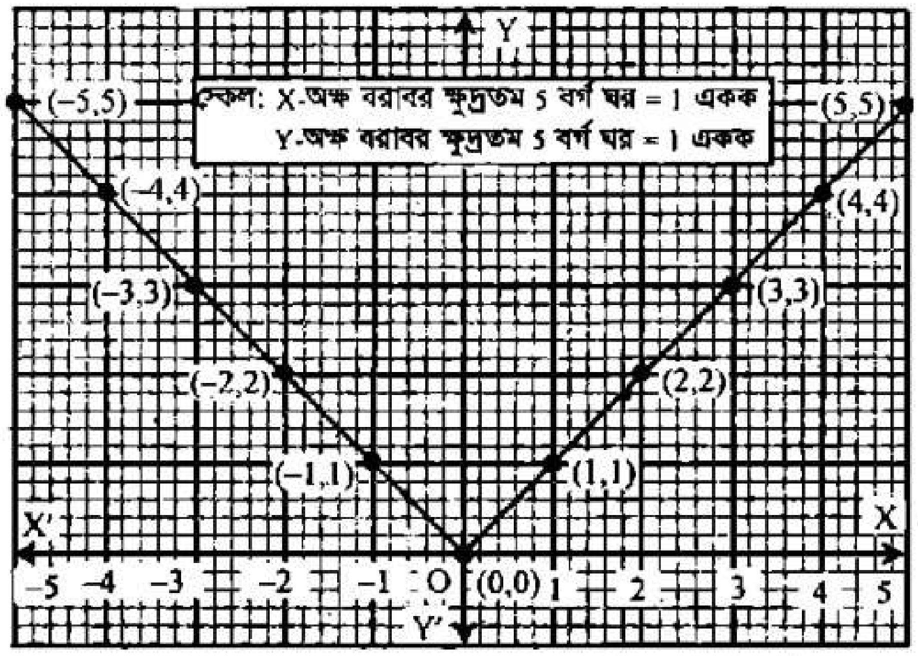
লেখচিত্র অঙ্কন:

ধরি, $y = f(x) = |x|$

-5 থেকে 5 এর মধ্যে x এর কয়েকটি মান নিয়ে সংশ্লিষ্ট y এর মান নিম্নের ছকে দেখানো হলো—

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
y	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5

এখন, ছক কাগজে সুবিধামত X-অক্ষ XOX′ এবং Y-অক্ষ YOY′ আঁকি। X-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গঘর = 1 একক এবং Y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গঘর = 1 এক একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো পাতন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে $y = f(x) = |x|$ এর লেখ পাওয়া যায়। যা নিম্নে দেখানো হলো।



(খ) $f(x) = x + |x|$ যখন $-2 \leq x \leq 2$

সমাধান: দেওয়া আছে, $f(x) = x + |x|$ যখন, $-2 \leq x \leq 2$

x এর প্রদত্ত সীমার মধ্যে $f(x)$ সর্বদা সংজ্ঞায়িত।

∴ ডোমেন $D_f = \{x: -2 \leq x \leq 2\} = [-2, 2]$

আবার x যখন ঋণাত্মক তখন $f(x) = -x + |-x| = -x + x = 0$

এবং যখন ধনাত্মক $f(x) = x + |x| = 2x$

∴ $f(x)$ এর রেঞ্জ $R_f = \{f(x): 0 \leq f(x) \leq 4\} = [0, 4]$

∴ ডোমেন $D_f = [-2, 2]$, রেঞ্জ $R_f = [0, 4]$

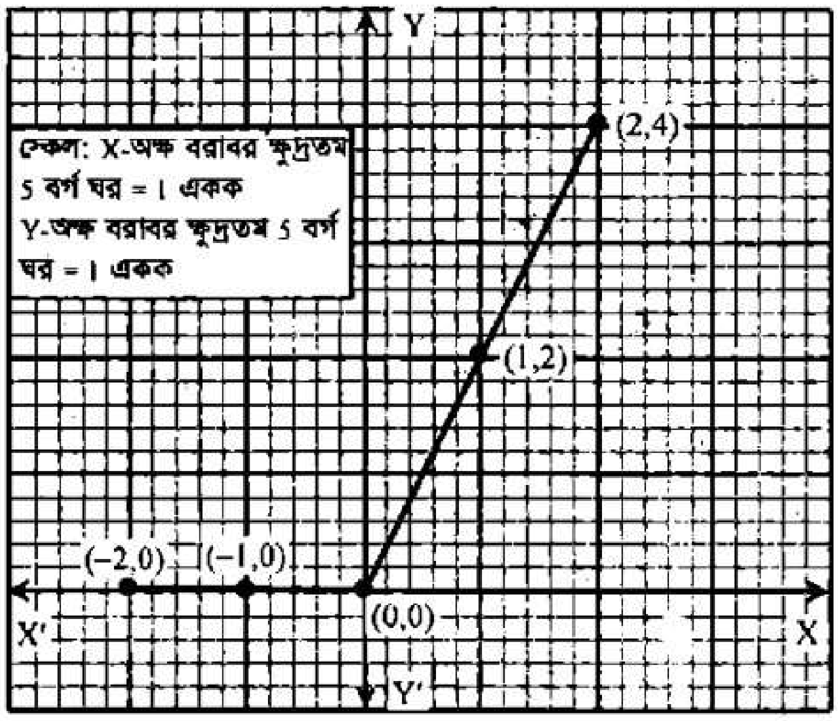
লেখচিত্র অঙ্কন:

ধরি, $y = f(x) = x + |x|$ যখন, $-2 \leq x \leq 2$

x এর −2 থেকে 2 এর মধ্যে কয়েকটি মান নিয়ে সংশ্লিষ্ট y এর মান নিম্নের ছকে দেখানো হলো—

x	−2	−1	0	1	2
y	0	0	0	2	4

এখন, ছক কাগজে সুবিধামত x-অক্ষ XOX′ এবং y-অক্ষ YOY′ আঁকি। x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গঘর = 1 একক এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গঘর = 1 এক একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো পাতন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায়। যা নিম্নে দেখানো হলো।



(গ) $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{যখন } x \neq 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$

সমাধান: দেওয়া আছে,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{যখন } x \neq 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{যখন } x > 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \\ -1 & \text{যখন } x < 0 \end{cases}$$

এখানে, $x < 0$ এর জন্য $f(x) = -1$, $x = 0$ এর জন্য $f(x) = 0$

এবং $x > 0$ এর জন্য $f(x) = 1$ অর্থাৎ x এর সকল বাস্তব মানের জন্য প্রদত্ত ফাংশনটি বিদ্যমান অর্থাৎ সংজ্ঞায়িত।

∴ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন $D_f = \mathbb{R}$

এবং প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ : $R_f = \{-1, 0, 1\}$

লেখচিত্র অঙ্কন :

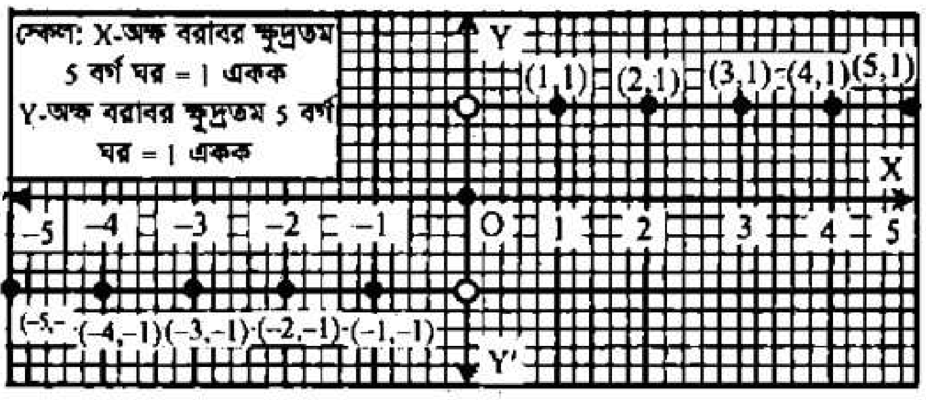
$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{যখন } x \neq 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{যখন } x > 0 \\ 0 & \text{যখন } x = 0 \\ -1 & \text{যখন } x < 0 \end{cases}$$

x এর কয়েকটি মান নিয়ে সংশ্লিষ্ট y এর মান নিম্নের ছকে দেখানো হলো—

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
y	−1	−1	−1	−1	−1	0	1	1	1	1	1

এখন, ছক কাগজে সুবিধামত x-অক্ষ XOX′ এবং y-অক্ষ YOY′ আঁকি। x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম পাঁচ বর্গঘর = 1 একক এবং y-অক্ষ

বরাবর ক্ষুদ্রতম পাঁচ বর্গঘর = 1 এক একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো পাতন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায়। যা নিম্নে দেখানো হলো।



[বি: দ্র: পাঠ্যবইয়ে উত্তর ভুল আছে]

(ঘ) $f(x) = \frac{x}{|x|}$

সমাধান:

দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{x}{|x|}$

এখানে, $f(0) = \frac{0}{|0|} = \frac{0}{0}$, যা অসংজ্ঞায়িত।

∴ x = 0 বিন্দুতে প্রদত্ত ফাংশনটি বিদ্যমান নয়। শূন্য ব্যতীত x এর অন্য বাস্তব মানের জন্য প্রদত্ত ফাংশনটি বিদ্যমান।

∴ ফাংশনের ডোমেন $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

আবার, $f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} \frac{x}{x} \text{ যখন } x > 0 \\ \frac{x}{-x} \text{ যখন } x < 0 \end{cases}$

$= \begin{cases} 1 \text{ যখন } x > 0 \\ -1 \text{ যখন } x < 0 \end{cases}$

∴ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ $R_f = \{-1, 1\}$

লেখচিত্র অঙ্কন :

ধরি, $y = f(x)$

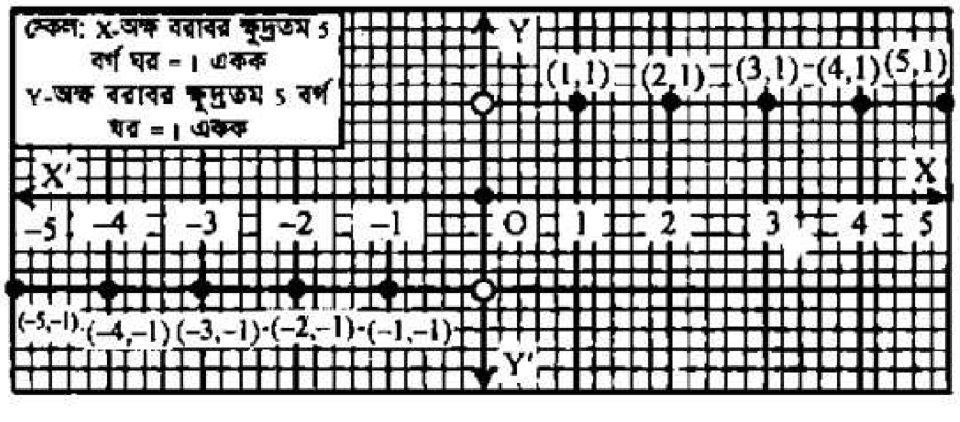
$= \frac{x}{|x|} = \begin{cases} \frac{x}{x} \text{ যখন } x > 0 \\ \frac{x}{-x} \text{ যখন } x < 0 \end{cases}$

$= \begin{cases} 1 \text{ যখন } x > 0 \\ -1 \text{ যখন } x < 0 \end{cases}$

x এর −5 থেকে 5 এর মধ্যে কয়েকটি মান নিয়ে সংশ্লিষ্ট y এর মান নিম্নের ছকে দেখানো হলো—

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
y	−1	−1	−1	−1	−1	0	1	1	1	1	1

এখন, ছক কাগজে সুবিধামত X-অক্ষ XOX' এবং Y অক্ষ YOY' আঁকি। X-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গঘর = 1 একক এবং Y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গঘর = 1 এক একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো পাতন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে y = f(x) এর লেখ পাওয়া যায়। যা নিম্নে দেখানো হলো।



(ঙ) $f(x) = \log\frac{5+x}{5-x}, -5 < x < 5$

সমাধান : ধরি, $y = f(x) = \ln\frac{5+x}{5-x}$

যেহেতু লগারিদম শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়।

∴ $\frac{5+x}{5-x} > 0$ যদি (i) $5 + x > 0$ এবং $5 - x > 0$ হয়

অথবা (ii) $5 + x < 0$ এবং $5 - x < 0$ হয়।

(i) নং হতে পাই, $x > -5$ এবং $-x > -5$

বা, $x > -5$ এবং $x < 5$

∴ ডোমেন $= \{x : -5 < x\} \cap (x : x < 5\}$

$= (-5, \infty) \cap (-\infty, 5)$

$= (-5, 5)$

(ii) নং হতে পাই, $x < -5$ এবং $-x < -5$

বা, $x < -5$ এবং $x > 5$

∴ ডোমেন $= \{x : x < -5\} \cap (x : x > 5\}$

$= \varnothing$

∴ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন

D_f = (i) ও (ii) এ প্রাপ্ত ডোমেনের সংযোগ সেট

$= (-5, 5) \cup \varnothing = (-5, 5)$

রেঞ্জ : $y = f(x)\ \ln\frac{5+x}{5-x}$

বা, $e^y = \frac{5+x}{5-x}$

বা, $5 + x = 5e^y - xe^y$

বা, $x(1 + e^y) = 5(e^y - 1)$

∴ $x = \frac{5(e^y - 1)}{e^y + 1}$

y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়।

∴ প্রদত্ত ফাংশেনের রেঞ্জ $R_f = \mathbb{R}$

উত্তর: প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন $D_f = (-5, 5)$, রেঞ্জ $R_f = \mathbb{R}$

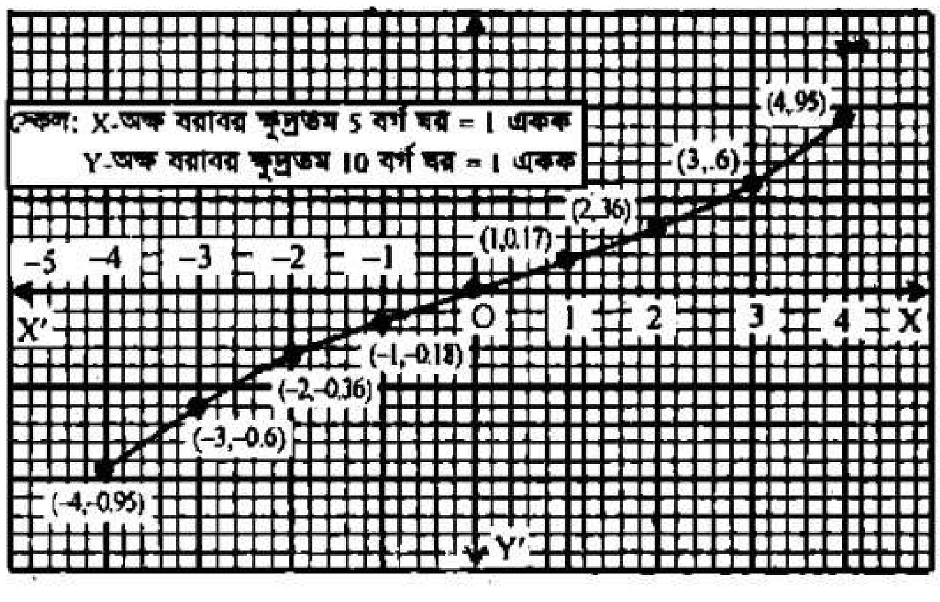
লেখচিত্র অঙ্কন:

$y = f(x) = \log\frac{5+x}{5-x} - 5 < x < 5$

x এর থেকে মধ্যে কয়েকটি মান নিচের সংশ্লিষ্ট y এর মান নিচের ছকে দেখানো হলো−

x	−4.5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	4.5
y	−1.27	−0.95	−0.6	−0.36	−1.8	0	.17	.36	0.6	0.95	1.27

এখন, ছক কাগজে সুবিধামত x-অক্ষ XOX' এবং y অক্ষ YOY' আঁকি। x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গ ঘর = 1 একক এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 10 বর্গ ঘর = 1 এক একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো পাতন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায়। যা নিম্নে দেখানো হলো−



অনুশীলনীর সৃজনশীল রচনামূলক প্রশ্ন

প্রশ্ন ▶ ১৫ দেওয়া আছে, $2^{2x}.2^{y-1} = 64$ ... ... (i)

এবং $6x.\frac{6^{y-2}}{3} = 72$ ... ... (ii)

ক. (i) ও (ii) কে x ও y চলক বিশিষ্ট সরল সমীকরণে পরিণত কর।

খ. সমীকরণদ্বয় সমাধান করে শুদ্ধতা যাচাই কর।

গ. x ও y মান যদি কোনো চতুর্ভুজের সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য হয় যেখানে বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ 90° তবে চতুর্ভুজটি আয়ত না বর্গ উল্লেখ কর এবং এর ক্ষেত্রফল ও কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

১৫নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $2^{2x}.\ 2^{y-1} = 64$ ....(i)

এবং $6^x.\ \frac{6^{y-2}}{3} = 72$ ....(ii)

(i) নং থেকে পাই,

$2^{2x+y-1} = 2^6$

বা, $2x + y - 1 = 6$ [$a^x = a^y$ হলে $x = y$]

∴ $2x + y - 7 = 0$ .... (iii)

(ii) নং থেকে পাই,

$6^x.\ 6^{y-2} = 3 \times 72$

বা, $6^{x+y-2} = 3 \times 2 \times 36$

বা, $6^{x+y-2} = 6 \times 6^2$

বা, $6^{x+y-2} = 6^{1+2}$

বা, $6^{x+y-2} = 6^3$

বা, $x + y - 2 = 3$

বা, $x + y - 2 - 3 = 0$

∴ $x + y - 5 = 0$ ....(iv)

∴ (iii) ও (iv) নং সমীকরণদ্বয় (i) ও (ii) নং সমীকরণের x ও y চলকবিশিষ্ট সরল সমীকরণ।

খ 'ক' থেকে প্রাপ্ত সমীকরণদ্বয়

$2x + y - 7 = 0$ .... (iii)

এবং $x + y - 5 = 0$ .... (iv)

(iii) নং থেকে (iv) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই,

$2x + y - 7 - (x + y - 5) = 0$

বা, $2x + y - 7 - x - y + 5 = 0$

বা, $x - 2 = 0$

∴ $x = 2$

x এর মান (iv) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$2 + y - 5 = 0$

বা, $y - 3 = 0$

∴ $y = 3$

∴ নির্ণেয় সমাধান: $x = 2, y = 3$

(i) নং সমীকরণের বামপক্ষে x ও y এর মান বসিয়ে পাই,

বামপক্ষ = $2^{2.2}.\ 2^{3-1} = 2^4.\ 2^2 = 16.4 = 64$ = ডানপক্ষ

∴ (i) নং সমীকরণের শুদ্ধতা যাচাই করা হলো।

আবার (ii) নং সমীকরণের বামপক্ষে x ও y এর মান বসিয়ে পাই,

বামপক্ষ = $6^2.\frac{6^{3-2}}{3} = 36.\frac{6}{3} = 72$ = ডানপক্ষ

∴ (ii) নং সমীকরণের শুদ্ধতা যাচাই করা হলো।

∴ সমীকরণদ্বয়ের সমাধান $x = 2, y = 3$ শুদ্ধ।

[বি: দ্র: পাঠ্যবইয়ের প্রশ্নে 6x এর পরিবর্তে 6^x হবে।]

গ ABCD চতুর্ভুজের সন্নিহিত বাহুদ্বয় AB ও BC হলে $x = AB = 2$ এবং $y = BC = 3$

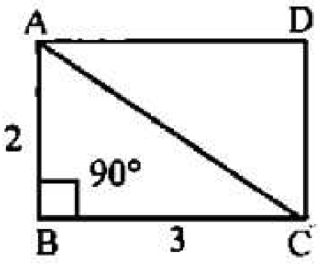
চতুর্ভুজের বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ ∠ABC = 90°

সুতরাং চতুর্ভুজটি একটি আয়তক্ষেত্র।

এখন, আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = AB × BC

= 2 × 3

= 6 বর্গ একক



আবার, ABCD আয়তক্ষেত্রের কর্ণ AC.

পিথাগোরাসের উপপাদ্য থেকে পাই,

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

বা, $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{2^2 + 3^2}$ একক

$= \sqrt{4 + 9}$ একক

∴ $AC = \sqrt{13}$ একক

Ans. 6 বর্গ একক; $\sqrt{13}$ একক।

প্রশ্ন ▶ ১৬ দেওয়া আছে, $\frac{\log(1+x)}{\log x} = 2$

ক. প্রদত্ত সমীকরণটিকে x চলকসংবলিত একটি দ্বিঘাত সমীকরণে পরিণত কর।

খ. প্রাপ্ত সমীকরণটিকে সমাধান কর এবং দেখাও যে, x এর কেবল একটি বীজ সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে।

গ. প্রমাণ কর যে, মূলদ্বয়ের প্রতিটির বর্গ তার স্বীয় মান অপেক্ষা 1(এক) বেশি এবং তাদের লেখচিত্র পরস্পর সমান্তরাল।

১৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\frac{\log(1+x)}{\log x} = 2$

বা, $2\log x = \log(1+x)$

বা, $\log x^2 = \log(1+x)$ [∵ $\log x^n = n\log x$]

বা, $x^2 = 1 + x$ [উভয় পক্ষ থেকে log বাদ দিয়ে]

$x^2 - x - 1 = 0$ এটি x চলক বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ।

খ 'ক' থেকে প্রাপ্ত সমীকরণ,

$x^2 - x - 1 = 0$

বা, $(x)^2 - 2.x.\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = 0$

বা, $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + 1$

বা, $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$

বা, $x - \frac{1}{2} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$ [বর্গমূল করে]

বা, $x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

বা, $x = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$

∴ $x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ এবং $x = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$

∴ নির্ণেয় সমাধান: $x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}), \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$

শুদ্ধি পরীক্ষা:

প্রদত্ত সমীকরণের বামপক্ষে $x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ বসিয়ে পাই,

বামপক্ষ = $\frac{\log\{1 + \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})\}}{\log\{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})\}} = \frac{\log\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)}{\log\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)}$

= 2 (ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে)

= ডানপক্ষ

$\therefore x = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ প্রদত্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

এখন, $x = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$ প্রদত্ত সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$\text{বামপক্ষ} = \frac{\log\{1+\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\}}{\log\{\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\}} = \frac{\log\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)}{\log\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}$$

= অসজ্ঞায়িত কারণ লগারিদম শুধু ধনাত্মক সংখ্যার হয়।

$\therefore x = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$ প্রদত্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করে না।

সুতরাং প্রদত্ত সমীকরণটি কেবল x এর একটি বীজ দ্বারাই সিদ্ধ হয়।

(দেখানো হলো)

গ 'খ' থেকে প্রাপ্ত x এর মান দুইটি হলো,

$\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ .... (i)

এবং $\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$ .... (ii)

এখন, ১ম মূলটিকে বর্গ করে পাই,

$\left\{\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right\}^2$

$= \frac{1}{4}(1+2\sqrt{5}+5)$

$= \frac{6}{4}+\frac{2}{4}\sqrt{5}$

$= \frac{3}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$

$= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}$

$= 1+\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$; যা $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ থেকে 1 বেশি।

আবার, ২য় মূলটিকে বর্গ করে পাই,

$\left\{\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right\}^2$

$= \frac{1}{4}(1-2\sqrt{5}+5)$

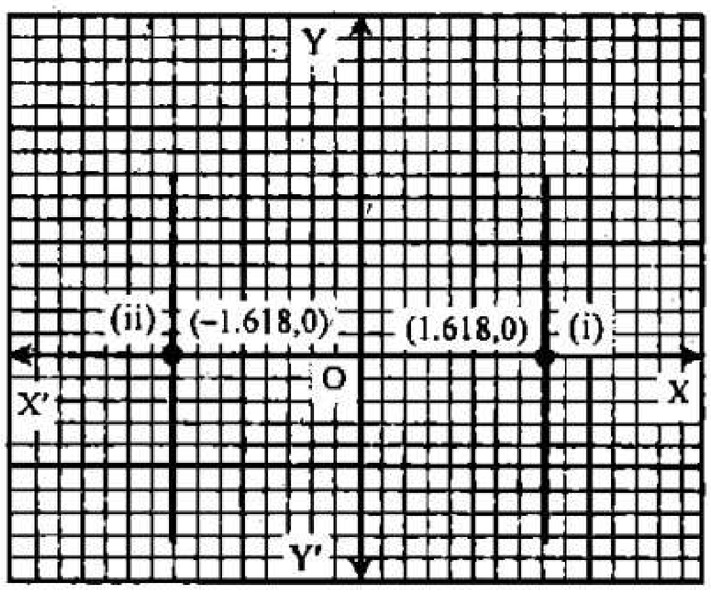
$= \frac{1}{4}(6-2\sqrt{5})$

$= \frac{6}{4}-\frac{2\sqrt{5}}{4}$

$= \frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}$

$= 1+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}$

$= 1+\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$; যা $\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$ থেকে 1 বেশি। **(প্রমাণিত)**



আবার, (i) নং অর্থাৎ x = 1.618 সমীকরণ হবে y-অক্ষের সমান্তরাল সমীকরণ। যা মূল বিন্দুর ডান দিকে অবস্থিত হবে এবং (ii) নং সমীকরণ x = −1.618 হবে y-অক্ষের সমান্তরাল সমীকরণ যা মূল বিন্দুর বাম দিকে অবস্থিত হবে।

অর্থাৎ (i) ও (ii) নং সমীকরণ পরস্পর সমান্তরাল। **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ১৭ দেওয়া আছে, $y = 2^x$

ক. প্রদত্ত ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।

খ. ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং এর বৈশিষ্ট্যগুলি লিখ।

গ. ফাংশনটির বিপরীত ফাংশন নির্ণয় করে এটি এক-এক কিনা তা নির্ধারণ কর এবং বিপরীত ফাংশনটির লেখচিত্র আঁক।

১৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে $y = 2^x$

ধরি, $y = f(x) = 2^x$

x এর ঋণাত্মক যেকোনো মানের জন্য $f(x)$ এর মান কোনো সময় 0 (শূন্যের) খুবই কাছাকাছি পৌছায়। কিন্তু শূন্য (0) হয় না অর্থাৎ,

$x \to -\infty, y \to 0^+$

একইভাবে, x এর যেকোনো ধনাত্মক মানের জন্য y এর মান ক্রমান্বয়ে ডানদিকে (উপরের) বৃদ্ধি পেতে থাকবে। অর্থাৎ

$-\infty$ দিকে ধাবিত হয়। অর্থাৎ $x \to -\infty, y \to \infty$

সুতরাং ডোমেন $(D) = (-\infty, \infty)$

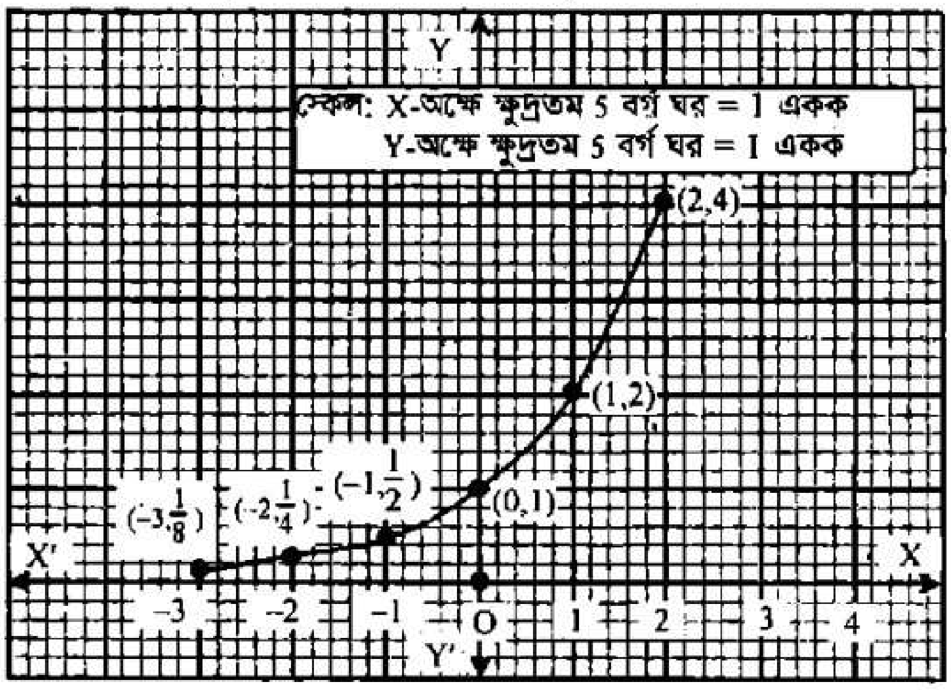
এবং রেঞ্জ $(R) = (0, \infty)$

খ ধরি $f(x) = 2^x$

প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এর কয়েকটি মানের জন্য y এর মান নিম্নের ছকে দেখানো হলো।

x	−3	−2	−1	0	1	2
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

ছক কাগজে মানগুলো স্থাপন করলে নিম্নরূপ লেখচিত্র পাওয়া যায়−



লেখচিত্রটির বৈশিষ্ট্য:

(i) লেখচিত্রটি (0, 1) বিন্দুগামী।

(ii) x এর যেকোনো মানের জন্য y ধনাত্মক।

(iii) লেখচিত্রটি ক্রমবর্ধমান।

(iv) x এর মান হ্রাস পাওয়ার সাথে সাথে লেখটি x-অক্ষের নিকবর্তী হয়।

(v) লেখচিত্রটি অবিচ্ছিন্ন।

গ দেওয়া আছে,

$y = 2^x$

বা, $x = \log_2 y$

আবার, $y = f(x)$ হলে $f^{-1}(y) = x$

$\therefore f^{-1}(y) = \log_2 y$

$\therefore f^{-1}(x) = \log_2 x$

$\therefore y = 2^x$ এর বিপরীত ফাংশন, $f^{-1}(x) = \log_2 x$

মনে করি, $x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}$

$f^{-1}(x_1) = f^{-1}(x_2)$

বা, $\log_2 x_1 = \log_2 x_2$

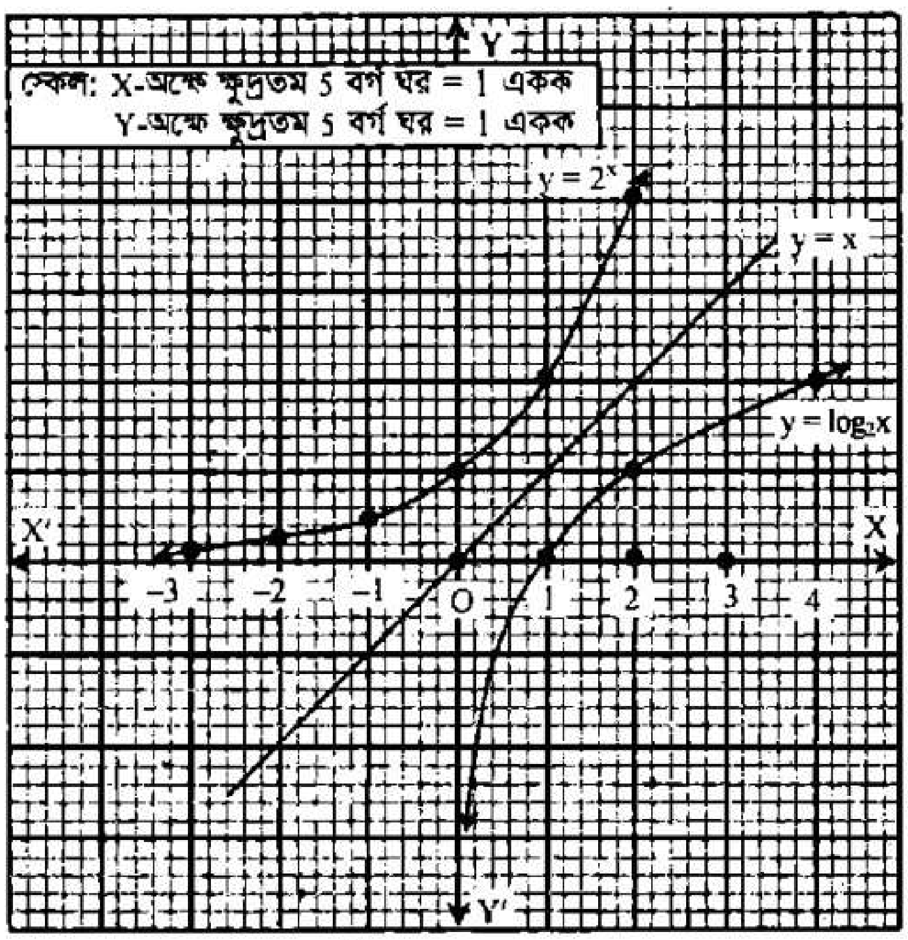
$\therefore x_1 = x_2$

সুতরাং বিপরীত ফাংশনটি এক-এক।

$y = \log_2 x$ লেখচিত্র অঙ্কন:

যেহেতু $\log_2 x$ হলো $y = 2^x$ এর বিপরীত। $y = x$ রেখা সাপেক্ষ সূচক ফাংশনের প্রতিফলন লগারিদমিক ফাংশন নির্ণয় করা হয়েছে যা $y = x$ রেখার সাপেক্ষে সদৃশ।

যখন $x \rightarrow -\infty$ তখন $y \rightarrow 0$



মাস্টার ট্রেইনার প্রণীত সৃজনশীল বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

★★★ ৯.৬ লগারিদম | Text পৃষ্ঠা-১৯৪

- যদি $a^x = b$ হয়, যেখানে $a > 0, a \neq 1$, তবে x কে বলা হয় b এর a ভিত্তিক লগারিদম অর্থাৎ $x = \log_a b$
- $x = \log_a b$ হয় তবে $a^x = b$; b কে ভিত্তি a এর প্রতিলগ বলে।
- কোনো ঋণাত্মক সংখ্যার লগারিদম নির্ণয় করা যায় না।
- $a > 0, b > 0$ এবং $a \neq 1$ হলে b এর অন্যন্য a ভিত্তিক লগারিদমকে $\log_a b$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

১. $a > 0, a \neq 1$ হলে $a^x = y$ এর ক্ষেত্রে x কে কী বলা হয়? (সহজ)

ক y এর a ভিত্তিক লগারিদম খ a এর y ভিত্তিক লগারিদম

গ a এর 10 ভিত্তিক লগারিদম ঘ y এর e ভিত্তিক লগারিদম ●ক

২. $a^x = y$ হলে নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক $a = \log_x y$ খ $y = \log_a x$ গ $x = \log_a y$ ঘ $x = \log_y a$ ●গ

৩. $\log a = n$ হলে কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক $a^n = 1$ খ $a = \text{anti} \log n$

গ $a = \text{anti} \log_x n$ ঘ $n = \text{anti} \log a$ ●খ

৪. কোন সংখ্যাকে লগারিদমের ভিত্তি হিসেবে গণ্য করা হয়?(সহজ)

ক যে কোন মূলদ সংখ্যাকে খ সকল ঋণাত্মক সংখ্যাকে

গ যে কোন ধনাত্মক সংখ্যাকে ঘ শুধুমাত্র পূর্ণ সংখ্যাকে ●গ

৫. $\log_{64} 256$ এর মান নিচের কোনটি? (কঠিন)

[আই.ই.টি. সরকারি উচ্চ বিদ্যালয়, নারায়ণগঞ্জ]

ক $\frac{3}{2}$ খ $\frac{4}{3}$ গ $\frac{3}{4}$ ঘ $\frac{2}{3}$ ●খ

ব্যাখ্যা: $\log_{64} 256 = \log_{64}(2)^8 = \log_{64}(2^6)^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3} \log_{64}(64) = \frac{4}{3}$

৬. $\log_2 \frac{1}{\sqrt{2}}$ = কত? (মধ্যম)

ক -1 খ $-\frac{1}{2}$ গ $\frac{1}{2}$ ঘ 1 ●খ

৭. $\log_{2\sqrt{5}} 400 = x$ হলে x এর মান কত? (মধ্যম)

ক $\frac{1}{4}$ খ 2 গ 3 ঘ 4 ●ঘ

ব্যাখ্যা: $\log_{2\sqrt{5}} 400 = \log_{2\sqrt{5}}(2\sqrt{5})^4 = 4 \log_{2\sqrt{5}} 2\sqrt{5} = 4$

৮. x কে b এর a ভিত্তিক লগারিদম বলা হবে যদি—

i. $a > 0$ হয়।

ii. $a \neq 1$ হয়।

iii. $a^x = b$ হয়।

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii ●ঘ

৯. $a^x = b$ হলে —

i. $x = \log_a b$

ii. $a = \log_b x$

iii. $b = \text{anti} \log_a x$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii ●খ

১০. $a \neq 1$ এবং $b \neq 0$ হলে—

i. $\log_a b = x$ হলে, $a^x = b$

ii. $a^{\log_a b} = b$

iii. $7^{\log_7 9} = 7$

নিচের কোনটি সঠিক? (মধ্যম)

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii ●ক

নিচের তথ্যের আলোকে (১১-১৩) নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

$a^x = 16, a > 0$ এবং $a \neq 1$

১১. a = 2 হলে x এর মান কত?(সহজ)

ক $\frac{1}{2}$ খ 2 গ 4 ঘ 6 ●গ

ব্যাখ্যা: $2^x = 16$ বা, $2^x = 2^4 \therefore x = 4$

১২. x এর লগারিদমিক ফাংশন কোনটি?(মধ্যম)

ক $x = \log_2 16$ খ $x = \log_{16} 2$

গ $_x\log = \log_{-2} 16$ ঘ $16x = \log 2$ ●ক

১৩. 16 = কোনটি?(মধ্যম)

ক $\text{anti} \log_2 4$ খ $\text{anti} \log_4 2$

গ $\log_4 2$ ঘ $\log_2 4$ ●ক

★★★ ৯.৭ লগারিদমের সূত্রাবলী | Text পৃষ্ঠা-১৯৫

- যদি $x > 0, y > 0$ এবং $a \neq 1$ তখন $x = y$; যদি এবং কেবল যদি $\log_a x = \log_a y$
- যদি $a > 1, x > 1$ হয় তবে $\log_a x > 0$
- যদি $0 < a < 1$ এবং $0 < x < 1$ হয়, তবে $\log_a x < 0$
- $f(x) = a^x$; x এর সকল মানের জন্য সংজ্ঞায়িত যেখানে $a > 0$ এবং $a \neq 1$.
- $f(x) = e^x$; x এর সকল মানের জন্য সংজ্ঞায়িত।
- $f(x) = \ln x$; শুধু $x > 0$ এর জন্য সংজ্ঞায়িত।

১৪. $x = 2\sqrt{5}$ হলে নিম্নের কোনটি সঠিক?(কঠিন)

(ক) $\log_x 400 = \frac{1}{4}$ (খ) $\log_{400} x = 4$

(গ) $\log_{400} x = \frac{1}{4}$ (ঘ) $\log_x 400 = x$ **গ**

ব্যাখ্যা: $\log_{400} 2\sqrt{5} = \log_{400}(400)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\log_{400}400$

$= \frac{1}{4} \times 1 = \frac{1}{4}$

১৫. log 3.2 এর মান নিচের কোনটি? (মধ্যম)

(ক) $\log 2 - \log 3 + \log 5$ (খ) $2\log 5 - \log 2$

(গ) $4\log 2 - \log 5$ (ঘ) $\log 32 - \log 5$ **গ**

ব্যাখ্যা: $\log\frac{32}{10} = \log\frac{16}{5} = \log 16 - \log 5 = \log 2^4 - \log 5$

$= 4\log 2 - \log 5$

১৬. $\log_p \log_p \log_p(p^{p^q}) =$ কত? (মধ্যম)

(ক) q (খ) p^q (গ) $q\log_p$ (ঘ) 1 **ক**

ব্যাখ্যা: $\log_p \log_p(p^{p^q})\ \log_p{}^p = \log_p{}^{p^q} .\log_p{}^p.1$

$= q \log_p{}^p.1.1 = q.1.1.1 = q$

১৭. $\log_2 5 + \log_2 7 + \log_2 3 =$ কত? (সহজ)

(ক) $\log_2 105$ (খ) $\log_2 150$

(গ) $\log_{105} 2$ (ঘ) 0 **ক**

ব্যাখ্যা: $\log_2(5 \times 7 \times 3) = \log_2 105$

১৮. $\log_x x\sqrt{x}\ \sqrt[3]{x} =$ কত? (মধ্যম)

(ক) $\frac{4}{6}$ (খ) $\frac{5}{6}$ (গ) $\frac{3}{2}$ (ঘ) $\frac{11}{6}$ **ঘ**

ব্যাখ্যা: $\log_x x.\ x^{\frac{1}{2}}.\ x^{\frac{1}{3}} = \log_x x^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} = \frac{11}{6}\log_x x = \frac{11}{6}$

১৯. $\log_a p \times \log_p q \times \log_q r \times \log_r b =$ কত? (মধ্যম,)

(ক) $\log_a r$ (খ) $\log_p b$ (গ) $\log_a b$ (ঘ) $\log_r b$ **গ**

ব্যাখ্যা: $(\log_p q \times \log_a p) \times (\log_r b \times \log_q r)$

$= \log_a q \times \log_q b = \log_a b$

২০. $\log_{\sqrt{a}} b \times \log_{\sqrt{b}} c \times \log_{\sqrt{c}} a =$ কত? (কঠিন)

(ক) 4 (খ) $\log_{\sqrt{a}}{}^{\sqrt{c}}$

(গ) $\log_{\sqrt{a}}{}^{\sqrt{b}}$ (ঘ) 8 **ঘ**

ব্যাখ্যা: $\log_{\sqrt{a}}\sqrt{(b)}^2 \times \log_{\sqrt{b}}\sqrt{(c)}^2 \times \log_{\sqrt{c}}\sqrt{(a)}^2$

$= 2\log_{\sqrt{a}}\sqrt{b} \times 2\log_{\sqrt{b}}\sqrt{c} \times 2\log_{\sqrt{c}}\sqrt{a}$

$= 8(\log_{\sqrt{a}}\sqrt{b} \times \log_{\sqrt{b}}\sqrt{c} \times \log_{\sqrt{c}}\sqrt{a})$

$= 8 \times \log_{\sqrt{a}}\sqrt{a} = 8 \times 1 = 8$

২১. লগারিদমে —

i. $\log_2 5 + \log_2 7 + \log_2 3 = \log_2 35$

ii. $\log_5 64 = 6 \log_5 2$

iii. $\frac{1}{3}\log_7 64 = \log_7 4$

নিচের কোনটি সঠিক ? (মধ্যম)

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii **গ**

২২. $a > 0, a \neq 1$ হলে—

i. $\log_a a = 1$ ।

ii. $\left(\frac{a^m}{a^n}\right)^l = \left(\frac{a^n}{a^m}\right)^l$ ।

iii. $\log_a 1 = 0$ ।

নিচের কোনটি সঠিক ? (সহজ)

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii **খ**

২৩. $a, b > 0$ এবং $a \neq b$ হলে—

i. $(a^p)^{qr} = a$ হলে, $pqr = 1$

ii. $(a^{xy})(a^{xy})^{z^2} = a^2$ হলে $xyz = 1$

iii. $\log_k\left(\frac{a^n}{b^n}\right) + \log_k\left(\frac{b^n}{c^n}\right) + \log_k\left(\frac{c^n}{a^n}\right) = 0$

নিচের কোনটি সঠিক ? (কঠিন)

(ক) i ও ii (খ) i ও iii

(গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii **খ**

ব্যাখ্যা: (i) $a^{pqr} = a^1$ বা, $pqr = 1$

(ii) $a^{xy}.a^{xyz^2} = a^2$

বা, $a^{xy+xyz^2} = a^2$

বা, $xy + xyz^2 = 2$

(iii) $\log_k\left(\frac{a^n}{b^n} \times \frac{b^n}{c^n} \times \frac{c^n}{a^n}\right) = \log_k 1 = 0$

২৪. $y = \log_{10} x$ —

i. $x \to \infty$ হলে $y \to \infty$ ।

ii. এটি (1, 0) বিন্দুগামী সরলরেখা।

iii. $10^y = x$ এর বিপরীত ফাংশন।

নিচের কোনটি সঠিক ? (কঠিন)

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii **ঘ**

নিচের তথ্যের আলোকে (২৫-২৭) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$P = \log_a(bc)$, $q = \log_b(ca)$, $r = \log_c(ab)$

২৫. $1 + q =$ কত? (মধ্যম)

(ক) $\log_a(abc)$ (খ) $\log_b(abc)$ (গ) $\log_a bc$ (ঘ) $\log_a \frac{a}{bc}$ **খ**

ব্যাখ্যা: $1 + q = 1 + \log_b(ca) = \log_b b + \log_b(ca) = \log_b abc$

২৬. $\frac{1}{1+p} + \frac{1}{1+r} =$ কোনটি? (কঠিন)

(ক) $\frac{1}{1+q}$ (খ) $1+q$ (গ) $\frac{q}{1+q}$ (ঘ) $\frac{(1+q)}{q}$ **গ**

ব্যাখ্যা: $1 + p = \log_a(abc)$, $1 + r = \log_c abc$

$\therefore \frac{1}{\log_a(abc)} + \frac{1}{\log_c(abc)} = \log_{abc} a + \log_{abc} c$

$\frac{1}{1+p} + \frac{1}{1+r} = \frac{1}{\log_a abc} + \frac{1}{\log_c abc} = \log_{abc} a + \log_{abc} c$

$= \log_{abc} ac + \log_{abc} b - \log_{abc} b = \log_{abc} abc - \log_{abc} b$

$= 1 - \frac{1}{\log_b abc} = 1 - \frac{1}{1+q} = \frac{1+q-1}{1+q} = \frac{q}{1+q}$

২৭. $r = 0$ হলে $ab =$ কত? (সহজ)

(ক) 0 (খ) 1

(গ) $\log_a abc$ (ঘ) $\log_a bc$ **খ**

★★★ ৯.৭ সূচকীয়, লগারিদমীয় ও পরমমান ফাংশন | Text পৃষ্ঠা-১৯৯

- $y = f(x) = a^x (a > 1)$ লেখচিত্রে x এর ঋণাত্মক মান ক্রমাগত বাড়ার সাথে সাথে $f(x)$ এর মান ক্রমাগত হ্রাস পায়। অর্থাৎ $x \to -\infty$ হলে $y \to 0$
- $y = f(x) = \mathrm{Log}_a x\ (a > 1)$, y এর সকল মানের জন্য x এর মান ধনাত্মক এবং y এর মানের ক্রমাগত বৃদ্ধির সাথে সাথে x এর মান বৃদ্ধি প্রাপ্ত হয়। অর্থাৎ $x \to \infty$ হলে $y \to \infty$.

২৮. সূচক ফাংশন $f(x) = a^x$ সকল বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত, নিচের কোন শর্তে? (মধ্যম)

(ক) $a > 0$ এবং $a \neq 1$ (খ) $a < 0$ এবং $a \neq 1$

(গ) $a < 0$ এবং $a = 1$ (ঘ) $a > 0$ এবং $a = 1$ **ক**

২৯. $y = 3x^2$ কী ধরনের ফাংশন?(সহজ)

(ক) লগারিদমিক ফাংশন (খ) সূচকীয় ফাংশন

(গ) পরম মান ফাংশন (ঘ) বিপরীত ফাংশন **খ**

৩০. নিচের কোনটি সূচক ফাংশন নির্দেশ করে? (সহজ)

(ক) e^x (খ) $\log_x 4$

(গ) $(1 + x^3)^{\frac{1}{3}}$ (ঘ) x^{10} **ক**

৩১. নিচের কোনটি লগারিদমিক ফাংশন? (সহজ)

(ক) 3^x (খ) e^x (গ) $\log_3 x$ (ঘ) 10^x **গ**

৩২. $y = \ell n\frac{5+x}{5-x}$ ফাংশনটিতে $x \to 5$ হলে, y এর মান কত? (সহজ)

(ক) 0 (খ) ∞ (গ) 1 (ঘ) 10 **খ**

ব্যাখ্যা: $\ell n = \frac{5+5}{5-5} = \ell n\frac{10}{0} = \ell n\ \infty = \infty$

৩৩. $f(x) = x^2 + 1$ ফাংশনটি R_f = কত? (মধ্যম)

(ক) $(-2, \infty)$ (খ) $[-1, 1]$ (গ) $(1, \infty)$ (ঘ) $[1, \infty)$ **ঘ**

৩৪. $f(x) = x^3$ ফাংশনের ডোমেন $\{0, 2\}$ হলে রেঞ্জ কত? (মধ্যম)

(ক) 0 (খ) 8 (গ) $\{2, 8\}$ (ঘ) $\{0, 8\}$ **ঘ**

ব্যাখ্যা: $f(0) = 0, f(2) = 8$

$\therefore$ ফাংশনটির রেঞ্জ = $\{0, 8\}$

৩৫. $f(x) = \log x$ ফাংশনের ডোমেন কত?(সহজ)

(ক) $(0\ \infty)$ (খ) $[0, \infty]$ (গ) $(-\infty, \infty)$ (ঘ) R **ক**

৩৬. নিচের কোনটি 10 ভিত্তিক log? (সহজ)

(ক) ln k (খ) log k (গ) $\log_a k$ (ঘ) $\ln_a k$ **খ**

৩৭. $P = 10^{100} \times \sqrt{e}$ হলে lnP = কত? (মধ্যম)

(ক) 115.38 (খ) 210.54 (গ) 230.76 (ঘ) 312.05 **গ**

৩৮. $x = 5^y$ এর বিপরীত ফাংশন কোনটি?(মধ্যম)

(ক) $x = y \log 5$ (খ) $y = \log_5 x$

(গ) $\sqrt[y]{x} = 5$ (ঘ) $\sqrt[y]{x} = \frac{1}{5}$ **খ**

৩৯. $y = 1 - 3^{-x}$ এর বিপরীত ফাংশন কোনটি?,(মধ্যম)

(ক) $\log_2(1-y)$ (খ) $\log_3 \frac{1}{1-x}$

(গ) $1 - 3^x$ (ঘ) $3^x - 1$ **খ**

ব্যাখ্যা: $y = \log_2 1-3-x$ বা, $3^{-x} = (1-y)$

বা, $-x = \log_3(1-y)$

বা, $x = -\log_3(1-y)$ বা, $x = \log_3\left(\frac{1}{1-y}\right)$

$\therefore f^{-1} : y \to \log_3\left(\frac{1}{1-y}\right)$ বা, $f^{-1} : x \to \log_3\left(\frac{1}{1-y}\right)$

৪০. পরমমান ফাংশন $f(x) = |x|$ এর ডোমেন কত? (মধ্যম)

(ক) $\mathbb{R}$ (খ) ϕ (গ) $\{0\}$ (ঘ) $(0, \infty)$ **ক**

ব্যাখ্যা: x এর সকল বাস্তব মানের জন্য | x | সংজ্ঞায়িত। সুতরাং ডোমেন বাস্তব সংখ্যার সেট $\mathbb{R}$

৪১. পরমমান ফাংশন $f(x) = |x|$ এর রেঞ্জ কত? (মধ্যম)

(ক) $(-\infty, \infty)$ (খ) $(0, \infty)$ (গ) $(-\infty, 0)$ (ঘ) $[0, \infty)$ **ঘ**

৪২. $f(x) = e^{-\frac{|x|}{3}}$; ফাংশনটির ডোমেন কত? (সহজ)

(ক) $\mathbb{R}$ (খ) $\{0\}$ (গ) $[0, \infty)$ (ঘ) $\mathbb{R} - \{3\}$ **ক**

৪৩. $f(x) = |x| + x$ যখন $-3 \le x \le 3$ পরম মান ফাংশনটির ডোমেন কত? (মধ্যম)

(ক) $(0, \infty)$ (খ) $[-3, 3]$ (গ) $(-3, 3)$ (ঘ) $[0, 6]$ **খ**

৪৪. সূচক ফাংশনের ক্ষেত্রে—

i. সূচক ফাংশন একটি এক-এক ফাংশন।

ii. সূচক ফাংশনের বিপরীত ফাংশন আছে।

iii. $f(x) = a^x$ হলে $f^{-1}(x) = \log_a x$ ।

নিচের কোনটি সঠিক ? (কঠিন)

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii **ঘ**

ব্যাখ্যা: (iii) $f(x) = a^x = y$ ধরে, $x = f^{-1}(y)$ এবং

$x = \log_a y \therefore f^{-1}(y) = \log_a y$

বা, $f^{-1}(x) = \log_a x$

৪৫. $f(x) = \ln(x-5)$ ফাংশনটি—

i. সূচকীয় ফাংশন।

ii. $x > 5$ জন্য সংজ্ঞায়িত।

iii. রেঞ্জ $R_f = (0, \infty)$

নিচের কোনটি সঠিক ? (কঠিন)

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii **গ**

৪৬. লগারিদমে—

i. x এর e ভিত্তিক লগ হচ্ছে ln x

ii. e ভিত্তিক লগ 10 ভিত্তিক লগের 2.303 গুণ সমান

iii. $\sqrt{27}$ এর 10 ভিত্তিক লগ $\log_{10}\sqrt{27}$

নিচের কোনটি সঠিক ? (কঠিন)

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii **ঘ**

৪৭. $y = \log_a x, a > 1$ হলে—

i. $D_f = (-\infty, \infty)$ ।

ii. $y = a^x$ ফাংশনটির বিপরীত ফাংশন।

iii. ফাংশনটি একটি লগারিদমিক ফাংশন

নিচের কোনটি সঠিক ? (কঠিন)

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii **গ**

৪৮. $f(x) = 2^x$ হলে—

i. $f(x)$ এর ডোমেন = $(-\infty, \infty)$ ।

ii. $f(x)$ এর রেঞ্জ = $(0, \infty)$ ।

iii. $f^{-1}(x) = \log_2 x$ ।

নিচের কোনটি সঠিক ? (সহজ)

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii **ঘ**

৪৯. $f(x) = x + |x|$ হলে —

i. $f(-100) = 0$ ।

ii. $f(x)$ এর ডোমেন $(-\infty, \infty)$ ।

iii. $f(x)$ এর রেঞ্জ $(0, \infty)$ ।

নিচের কোনটি সঠিক ? (কঠিন)

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii **ক**

ব্যাখ্যা: (iii) যেহেতু $|x| = \begin{cases} x ; x > 0 \\ -x; x < 0 \end{cases}$

$\therefore f(x) = \begin{cases} 2x ; x > 0 \\ 0; x < 0 \end{cases}$

সুতরাং $f(x)$ এর রেঞ্জ $[0, \infty)$

নিচের তথ্যের আলোকে (৫০–৫৩) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$f(x) = 3x^2$ একটি সূচকীয় ফাংশন যেখানে $x \in \mathbb{R}$.

৫০. $f^{-1}(3)$ = কত? (মধ্যম)

(ক) 0 (খ) 1 (গ) 3 (ঘ) 9 **খ**

ব্যাখ্যা: $y = 3x^2$ বা, $x^2 = \frac{y}{3}$ বা, $x = \sqrt{\frac{y}{3}}$

$\therefore f^{-1}(y) = \sqrt{\frac{y}{3}}$ বা, $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x}{3}}$

$\therefore f^{-1}(3) = 1$

৫১. উপরোক্ত ফাংশনটির ডোমেন কত?(সহজ)

(ক) $[0, \infty]$ (খ) $[-\infty, 0]$ (গ) $\mathbb{N}$ (ঘ) $\mathbb{R}$ **ঘ**

৫২. ফাংশনটির বিপরীত ফাংশনের ডোমেন কত? (মধ্যম)

(ক) $[0, \infty)$ (খ) $(0, \infty]$ (গ) $[-\infty, \infty]$ (ঘ) $\mathbb{R}$ **ক**

ব্যাখ্যা: $f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x}{3}}, \therefore \frac{x}{3} \ge 0$ বা $x \ge 0$

$\therefore D_{f^{-1}} = (0, \infty)$

৫৩. ফাংশনটির রেঞ্জ কত? (মধ্যম)

(ক) $(-\infty, 0]$ (খ) $[-\infty, \infty)$ (গ) $\mathbb{R}$ (ঘ) $\mathbb{R}_+$ **ঘ**

নিচের তথ্যের আলোকে (৫৪–৫৭) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$f(x) = |x| + x$ যখন $-5 \le x \le 5$

৫৪. $f(5)$ = কত?(সহজ)

(ক) -5 (খ) 0 (গ) 5 (ঘ) 10 **ঘ**

৫৫. ফাংশনটি কিরূপ?(সহজ)

(ক) সূচকীয় ফাংশন (খ) পরমমান ফাংশন
(গ) লগারিদমীয় ফাংশন (ঘ) বিপরীত ফাংশন **খ**

৫৬. ফাংশনটির ডোমেন কত? (মধ্যম)

(ক) $(-5, 0]$ (খ) $[-5, 5]$ (গ) $[5, 0]$ (ঘ) $\mathbb{R}$ **খ**

৫৭. $f(x)$ এর রেঞ্জ কত?(মধ্যম)

(ক) $(0, 10)$ (খ) $(0, 10]$ (গ) $[0, 10]$ (ঘ) $\mathbb{N}$ **গ**

নিচের তথ্যের আলোকে (৫৮-৬০) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

একটি ফাংশন $f(x) = \frac{x}{|x|}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত এবং $x \in \mathbb{R}$ ।

৫৮. $f(0) =$ কত? (কঠিন)

(ক) 0 (খ) 1 (গ) অনির্ণেয় (ঘ) ∞ **গ**

ব্যাখ্যা: $f(0) = \frac{0}{|0|} = \frac{0}{0}$ যা অনির্ণেয় ।

৫৯. $f(x)$ এর ডোমেন কত? (মধ্যম)

(ক) R (খ) $\varnothing$ (গ) $\mathbb{R} - \{1\}$ (ঘ) $\mathbb{R} - \{0\}$ **ঘ**

ব্যাখ্যা: যেহেতু $f(0) = \frac{0}{0}$ অনির্ণেয় সুতরাং ডোমেন $= \mathbb{R} - \{0\}$

৬০. $f(x)$ এর রেঞ্জ কত? (কঠিন)

(ক) $\{1\}$ (খ) $\{-1\}$ (গ) $\{-1, 1\}$ (ঘ) $\varnothing$ **গ**

ব্যাখ্যা: $f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} \frac{x}{x} \text{ যখন } x > 0 \\ \frac{x}{-x} \text{ যখন } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 \text{ যখন } x > 0 \\ -1 \text{ যখন } x < 0 \end{cases}$

★★★ ৯.৮ ফাংশনের লেখচিত্র | Text পৃষ্ঠা-২০৩

- $y = f(x) = a^x (a > 1)$ লেখচিত্রে x এর ঋণাত্মক মানের জন্য x এর মান ক্রমাগত বাড়ার সাথে সাথে $f(x)$ এর মান ক্রমাগত হ্রাস পাবে। অর্থাৎ $x \to \infty$ হলে $y \to 0$
- $y = f(x) = \log_a x$ $(a > 1)$, y এর সকল মানের জন্য x এর মান ধনাত্মক এবং y এর মানের ক্রমাগত বৃদ্ধির সাথে সাথে x এর মান বৃদ্ধি প্রাপ্ত হয়। অর্থাৎ $y \to \infty$.

৬১. $f(x) = \log_e x$ হলে, $f(-0.3) =$ কত? (মধ্যম)

(ক) অসংজ্ঞায়িত (খ) $-\infty$ (গ) 0 (ঘ) ∞ **ক**

ব্যাখ্যা: ঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যার লগারিদম নেই।

৬২. $f(x) = 2^x$ এর লেখচিত্র $x \to -\infty$ হলে $f(x) \to$ কত? (কঠিন)

(ক) ∞ (খ) -1 (গ) 0 (ঘ) $-\infty$ **গ**

ব্যাখ্যা: $f(-\infty) = 2^{-\infty} = \frac{1}{2^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$

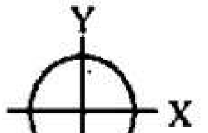
৬৩. $y = \log_a x$, $a > 1$ ফাংশনটির লেখচিত্র x অক্ষকে কোন বিন্দুতে ছেদ করে? (মধ্যম)

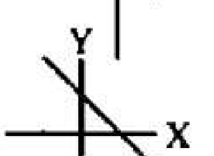
(ক) $(0, 1)$ (খ) $(2, 1)$ (গ) $(1, 0)$ (ঘ) $(-1, 0)$ **গ**

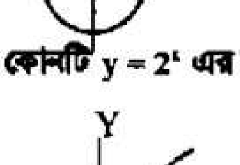
৬৪. $f(x) = \frac{|x|}{x}$; ফাংশনের রেঞ্জ কত?(সহজ)

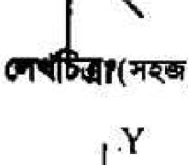
(ক) $(-1, 0)$ (খ) $\{-1, 1\}$ (গ) $\{0, 1\}$ (ঘ) $(0, 1)$ **খ**

৬৫. নিচের কোনটি $y = 2^x$ এর লেখচিত্র?(সহজ)

(ক)


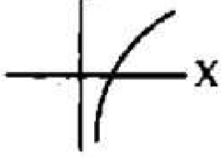
(খ)


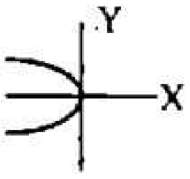
(গ)


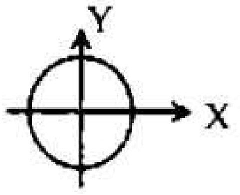
(ঘ)


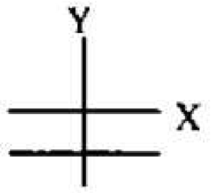
ক

৬৬. নিচের কোনটি $y = 2^x$ এর বিপরীত ফাংশনের লেখচিত্র?(সহজ)

(ক)


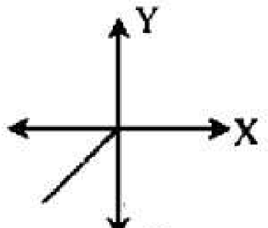
(খ)


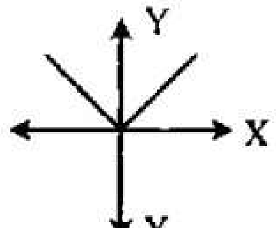
(গ)


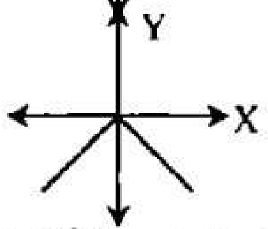
(ঘ)


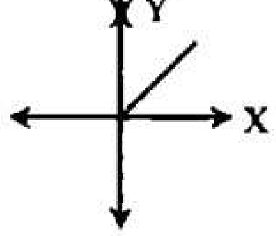
ক

৬৭. $f(x) = |x|$ এর লেখচিত্র কোনটি? (সহজ)

(ক)


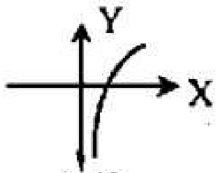
(খ)


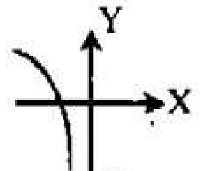
(গ)


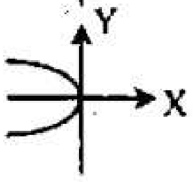
(ঘ)


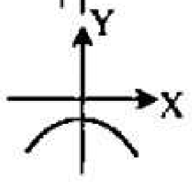
খ

৬৮. নিচের কোনটি ln x এর লেখচিত্র?(সহজ)

(ক)


(খ)


(গ)


(ঘ)


ক

৬৯. $y = 4^x$ —

i. একটি সূচকীয় ফাংশন।
ii. এর বিপরীত ফাংশন $\log_4{}^x$।
iii. ফাংশনটির লেখচিত্র $(0, 1)$ বিন্দুগামী।

নিচের কোনটি সঠিক ? (কঠিন)

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii **ঘ**

৭০. $y = e^{-x}$ ফাংশনের —

i. x এর ঋণাত্মক মানের জন্যে y এর মান ক্রমাগত বৃদ্ধি পায়।
ii. লেখচিত্রটি y অক্ষকে $(0, 1)$ বিন্দুতে ছেদ করে।
iii. ফাংশনটির রেঞ্জ $(0, \infty)$

নিচের কোনটি সঠিক ? (কঠিন)

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii **ঘ**

৭১. $y = \ln x$ ফাংশনটি —

i. একটি লগারিদমিক ফাংশন।
ii. এর লেখচিত্র $(1, 0)$ বিন্দুগামী।
iii. $x \to \infty$ হলে $y \to 0$ হবে।

নিচের কোনটি সঠিক ? (কঠিন)

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii **ক**

নিচের তথ্যের আলোকে (৭২-৭৪) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

$y = 1 - 2^{-x}$ যেখানে $x \in \mathbb{R}$

৭২. $f^{-1}(y) =$ কত?(কঠিন)

(ক) $1 + 2^{-x}$ (খ) $\log_2 \frac{1}{1 - y}$
(গ) $\log_{\frac{1}{2}} y$ (ঘ) $\log_2 1 - y$ **খ**

ব্যাখ্যা: $y = 1 - 2^{-x}$ বা, $2^{-x} = 1 - y$ বা, $-x = \log_2{}^{1-y}$
বা, $x = -\log_2{}^{(1-y)}$
$\therefore x = \log_2 \frac{1}{1 - y}$ $\therefore f^{-1}(y) = \log_2 \frac{1}{1 - y}$

৭৩. ফাংশনটির লেখচিত্র y অক্ষকে কোন বিন্দুতে ছেদ করে?(মধ্যম)

(ক) $(0, 0)$ (খ) $(0, -1)$ (গ) $(1, 0)$ (ঘ) $(0, 1)$ **ক**

৭৪. ফাংশনটিতে $x \to \infty$ হলে $y \to$ কত?(মধ্যম)

(ক) $-\infty$ (খ) 0 (গ) 1 (ঘ) ∞ **গ**

শ্রেণির কাজের ওপর সৃজনশীল রচনামূলক প্রশ্ন

প্রশ্ন ▶ ১ যদি $\frac{\log a}{b-c} = \frac{\log b}{c-a} = \frac{\log c}{a-b}$ হয়, তবে— ◀ কাজ; পৃষ্ঠা-১৯৮

ক. অনুপাতগুলোর মান m ধরে, $\log a^a$ এর মান নির্ণয় কর। ২

খ. $a^a.b^b.c^c$ এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. দেখাও যে, $a^{b^2+bc+c^2}.b^{c^2+ca+a^2}.c^{a^2+ab+b^2} = a^a.b^b.c^c$ ৪

১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ধরি, $\frac{\log a}{b-c} = \frac{\log b}{c-a} = \frac{\log c}{a-b} = m$

$\therefore \log a = m(b-c)$

বা, $a \log a = ma(b-c)$; [উভয় পক্ষকে a দ্বারা গুণ করে]

$\therefore \log a^a = ma(b-c)$ .... (i)

খ এখন, $\log b = m(c-a)$

বা, $b \log b = mb(c-a)$; [উভয় পক্ষকে b দ্বারা গুণ করে]

$\therefore \log b^b = mb(c-a)$ .... (ii)

এবং $\log c = m(a-b)$

বা, $c \log c = mc(a-b)$; [উভয় পক্ষকে c দ্বারা গুণ করে]

$\therefore \log c^c = mc(a-b)$ .... (iii)

এখন, (i) + (ii) + (iii) থেকে পাই

$\log a^a + \log b^b + \mathrm{loc}^c = m(ab - ac + bc - ab + ac - bc)$

বা, $\log(a^a b^b c^c) = 0$

$\therefore a^a b^b c^c = 1.$

Ans. 1

গ 'ক' থেকে পাই $\log a = m(b-c)$

বা, $(b^2 + bc + c^2)\log a = m(b-c)(b^2 + bc + ca)$

বা, $\log a^{b^2+bc+c^2} = m(b^3 - c^3)$ .... (i)

'খ' থেকে পাই, $\log b = m(c-a)$

বা, $(c^2 + ca + a^2)\log b = m(c-a)(c^2 + ca + a^2)$

বা, $\log b^{c^2+ca+a^2} = m(c^3 - a^3)$ .... (ii)

এবং $\log c = m(a-b)$

বা, $(a^2 + ab + b^2)\log c = m(a-b)(a^2 + ab + b^2)$

বা, $\log c^{a^2+ab+b^2} = m(a^3 - b^3)$ .... (iii)

(i) + (ii) + (iii) হতে পাই,

$\log a^{b^2+bc+c^2} + \log b^{c^2+ca+a^2} + \log c^{a^2+ab+b^2} = m(b^3 - c^3) + m(c^3 - a^3) + m(a^3 - b^3)$

বা, $\log\left(a^{b^2+bc+c^2}.b^{c^2+ca+a^2}.c^{a^2+ab+b^2}\right)$

$= m(b^3 - c^3 + c^3 - a^3 + a^3 - b^3)$

বা, $\log\left(a^{b^2+bc+c^2}.b^{c^2+ca+a^2}.c^{a^2+ab+b^2}\right) = 0$

বা, $\log\left(a^{b^2+bc+c^2}.b^{c^2+ca+a^2}.c^{a^2+ab+b^2}\right) = \log 1$

বা, $a^{b^2+bc+c^2}.b^{c^2+ca+a^2}.c^{a^2+ab+b^2} = 1$

বা, $a^{b^2+bc+c^2}.b^{c^2+ca+a^2}.c^{a^2+ab+b^2} = a^a.b^b.c^c$ ['খ' হতে]

(দেখানো হলো)

প্রশ্ন ▶ ১ যদি $a^2 - 7ab + b^2 = 0$ হয়, তবে— ◀ কাজ; পৃষ্ঠা-১৯৮

ক. $(a+b)^2$ কত? ২

খ. দেখাও যে, $\log\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{1}{2}\log(ab) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$ ৪

গ. $a = x$ ও $b = y$ হলে দেখাও যে, $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 7.$ ৪

২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $a^2 - 7ab + b^2 = 0$

বা, $a^2 + b^2 = 7ab$

বা, $a^2 + 2ab + b^2 = 7ab + 2ab$

বা, $(a+b)^2 = 9ab$

Ans. 9ab

খ 'ক; থেকে পাই, $(a+b)^2 = 9ab$

বা, $\frac{(a+b)^2}{9} = ab$

বা, $\left(\frac{a+b}{3}\right)^2 = ab$

বা, $\log\left(\frac{a+b}{3}\right)^2 = \log(ab)$

বা, $2\log\left(\frac{a+b}{3}\right) = \log(ab)$

$\log\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{1}{2}\log(ab) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$

$[\because \log(M \times N) = \log M + \log N]$

$\therefore \log\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{1}{2}\log(ab) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে,

$a^2 - 7ab + b^2 = 0$

বা, $a^2 + b^2 = 7ab$

বা, $x^2 + y^2 = 7xy$ [$a = x$ ও $b = y$ বসিয়ে]

বা, $\frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy} = \frac{7xy}{xy}$

বা, $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 7$

$\therefore \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 7$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ৩ যদি $x = 1 + \log_a bc$, $y = 1 + \log_b ca$ এবং $z = 1 + \log_c ab$ হয়, তবে— ◀ কাজ; পৃষ্ঠা-১৯৮

ক. দেখাও যে, $a = (abc)^{\frac{1}{x}}$ ২

খ. প্রমাণ কর যে, $xyz = xy + yz + zx$ ৪

গ. দেখাও যে, $a^{x-3}.b^{y-3}.c^{z-3} = 1$ ৪

৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$x = 1 + \log_a bc$

বা, $x = \log_a a + \log_a bc$

বা, $x = \log_a abc$

বা, $a^x = abc$

বা, $a = (abc)^{\frac{1}{x}}$ .... (i)

খ 'ক' হতে পাই, $a = (abc)^{\frac{1}{x}}$ .... (i)

অনুরূপভাবে, $b = (abc)^{\frac{1}{y}}$ .... (ii)

এবং $c = (abc)^{\frac{1}{z}}$ .... (iii)

(i) × (ii) × (iii) থেকে পাই,

$abc = (abc)^{\frac{1}{x}}.(abc)^{\frac{1}{y}}.(abc)^{\frac{1}{z}}$

বা, $(abc)^1 = (abc)^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{x}}$

বা, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$

বা, $\frac{yz + zx + xy}{xyz} = 1$

$xyz = zy + yz + zx$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $x = 1 + \log_a bc$

বা $x - 1 = \log_a bc$

বা, $a^{x-1} = bc$ .... (i)

আবার, $y = 1 + \log_b ca$

বা, $y - 1 = \log_b ca$

বা, $b^{y-1} = ca$ .... (ii)

অনুরূপভাবে, $c^{z-1} = ab$ .... (iii)

(i) × (ii) × (iii) হতে পাই,

$a^{x-1}.\ b^{y-1}.\ c^{z-1} = bc.\ ca.\ ab$

বা, $a^{x-1}.\ b^{y-1}.\ c^{z-1} = a^2.b^2.c^2$

বা, $\frac{a^{x-1}}{a^2}.\frac{b^{y-1}}{b^2}.\frac{c^{z-1}}{c^2} = 1$

বা, $a^{x-1-2}.\ b^{y-1-2}.\ c^{z-1-2} = 1$

বা, $a^{x-3}.\ b^{y-3}.\ c^{z-3} = 1$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ৪ **যদি $2\log_8 A = p$ ও $2\log_2 2A = q$ হয়, তবে–**

◀ কাজ; পৃষ্ঠা-১৯৯

ক. দেখাও যে, $A^2 = 2^{3p}$ ও $A^2 = 2^{q-2}$ ২

খ. $q - p = 4$ হলে, A এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. দেখাও যে, $(Ax)^2 + qx - 3p = 0$ সমীকরণটির বীজ -1 অথবা $\frac{3}{8}$ ৪

৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$2\log_8 A = p$

বা, $\log_8 A^2 = p$

বা, $A^2 = 8^p$

$\therefore$ $A^2 = 2^{3p}$ .... (i)

আবার, $2\log_2 2A = q$

বা, $\log_2 (2A)^2 = q$

$(2A)^2 = 2^q$

বা, $A^2 = \frac{2^q}{2^2}$

$A^2 = 2^{q-2}$

$A^2 = 2^{3p}$ ও $A^2 = 2^{q-2}$ **(দেখানো হলো)**

খ 'ক' হতে পাই, $A^2 = 2^{q-2}$................. (ii)

এবং $q - p = 4$

$\therefore$ $q = 4 + p$ .... (iii)

(i) ও (ii) নং হতে পাই,

$2^{3p} = 2^{q-2}$

বা, $3p = q - 2$

বা, $3p = 4 + p - 2$ [(iii) নং হতে পাই]

বা, $2p = 2$

$\therefore$ $p = 1$

$\therefore$ $q = 4 + 1 = 5$ [(iii) নং হতে]

(i) নং এ p এর মান বসাই

$A^2 = 2^{3.1}$

বা, $A^2 = 2^3$

$A = 2^{\frac{3}{2}}$

উত্তর : $A = 2^{\frac{3}{2}}$

গ 'খ' হতে পাই, $A = 2^{\frac{3}{2}}$, $p = 1$ ও $q = 5$.

তাহলে, $(Ax)^2 + qx - 3p = 0$

বা, $\left(2^{\frac{3}{2}}x\right)^2 + 5.x - 3.1 = 0$

বা, $\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^2 x^2 + 5x - 3 = 0$

বা, $2^3.\ x^2 + 5x - 3 = 0$

বা, $8x^2 + 5x - 3 = 0$

বা, $8x^2 + 8x - 3x - 3 = 0$

বা, $8x(x + 1) - 3(x + 1) = 0$

বা, $(x + 1)(8x - 3) = 0$

হয়, $x + 1 = 0$ অথবা, $8x - 3 = 0$

$\therefore x = -1$ বা, $8x = 3$

বা, $x = \frac{3}{8}$

$\therefore$ সমীকরণটির বীজ -1 অথবা $\frac{3}{8}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ৫ নিচের ছকটি লক্ষ কর:

x	−2	−1	0	1	2
y	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{5}$	1	5	25

◀ কাজ; পৃষ্ঠা-২০০

ক. ছকটির কোন ফাংশন দ্বারা বর্ণনা করা যায়। ২

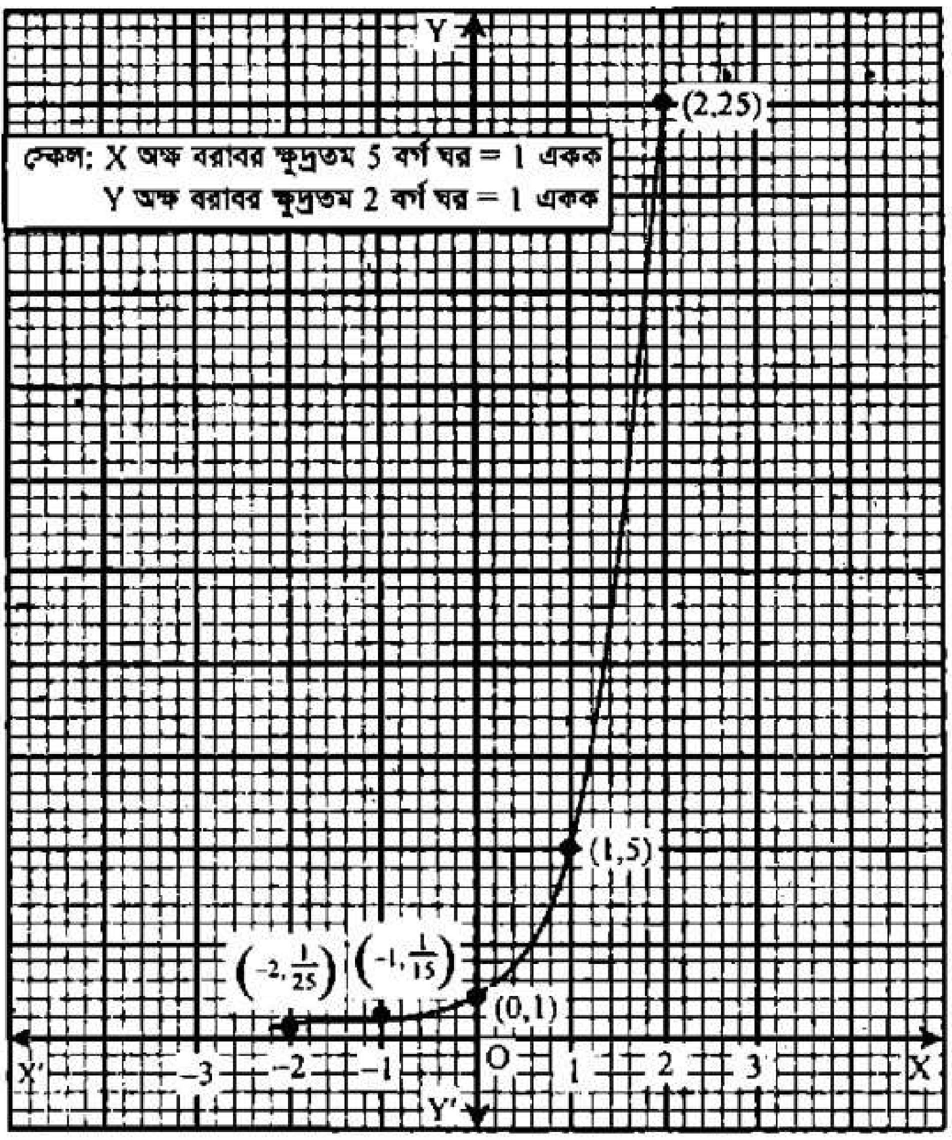
খ. ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন কর। ৪

গ. ফাংশনটির প্রকৃতি বর্ণনা কর এবং ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ছকটিতে বর্ণিত (x, y) ক্রমজোড়ের মানগুলো $y = 5^x$ ফাংশন দ্বারা বর্ণনা করা যায়, যেখানে x-বাস্তব সংখ্যা।

খ ছক কাগজে সুবিধামত x-অক্ষ বরাবর XOX′ এবং y-অক্ষ বরাবর YOY′ আঁকি। x-অক্ষ বরাবর 5 বর্গ ঘর = 1 একক এবং y-অক্ষ বরাবর 2 বর্গঘর = 1 একক বিবেচনা করে (x, y) বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি। বিন্দুগুলো সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে ফাংশনটি লেখ পাওয়া যায়। যা নিম্নে দেখানো হলো।



গ লেখচিত্র থেকে দেখা যায় যে, যখন $x = 0$

তখন $y = 5^0 = 1$ কাজেই লেখটি (0,1) বিন্দুগামী।

আবার x এর ঋণাত্মক মানের জন্য y এর মান ক্রমান্বয়ে শূন্যের খুবই কাছাকাছি পৌছায় কিন্তু 0 হয় না অর্থাৎ $x \to -\infty, y \to 0^+$।

x এর যে কোনো ধনাত্মক মানের জন্য ফাংশনটির মান অসীমের কাছাকাছি অর্থাৎ $x \to \infty, y \to \infty$. আবার, ফাংশনটি $f(x) = a^x$ আকারের যেখানে $a > 0$ এবং $a \neq 0$। সুতরাং $y = 5^x$ একটি সূচকীয় ফাংশন।

সুতরাং ফাংশনটির ডোমেন সকল বাস্তব সংখ্যার সেট অর্থাৎ $(-\infty,\infty)$ এবং ফাংশনটির রেঞ্জ সকল ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার সেট অর্থাৎ $(0, \infty)$।

প্রশ্ন ▶ ৬ $y = 2^{\frac{x}{2}}$ **একটি সূচক ফাংশন এবং** $-3 \leq x \leq 3$।

◀ *কাজ; পৃষ্ঠা-২০০*

ক. প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x ও y-এর মানের তালিকা প্রস্তুত কর। ২

খ. ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন কর। ৪

গ. $x \in R$ এর জন্য ফাংশনটির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

৬ নং প্রশ্নের সমাধান

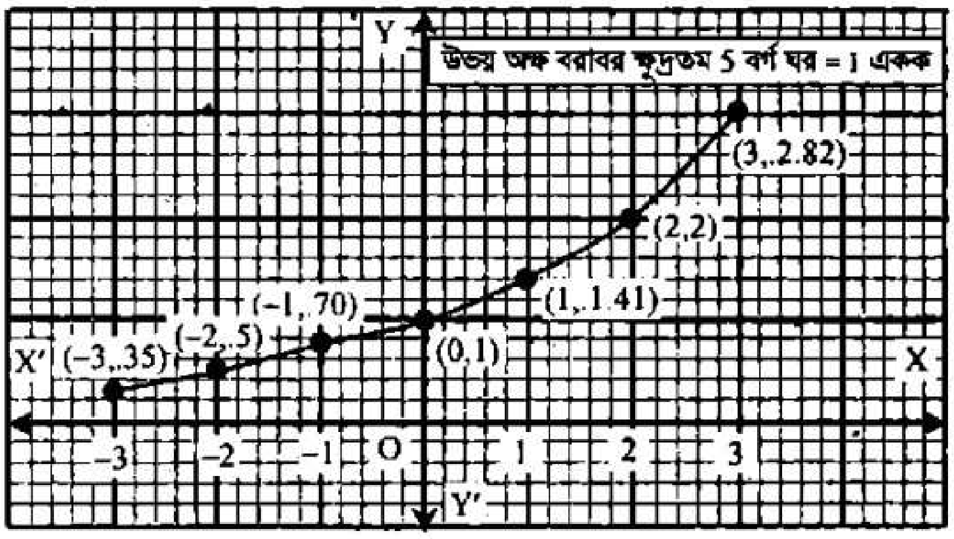
ক ধরি, $y = f(x) = 2^{\frac{x}{2}}$

x এর –3 থেকে 3 এর মধ্যে কয়েকটি মান নিয়ে সংশ্লিষ্ট y এর নিম্নের ছকে দেখানো হলো–

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	0.35	0.5	0.70	1	1.41	2	2.82

খ ক এর প্রাপ্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে সুবিধামত x-অক্ষ XOX′ এবং Y-অক্ষ YOY′ আঁকি। X-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গ ঘর = 1 একক এবং Y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গঘর = 1 একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো পাতন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায়।

যা নিম্নে দেখানো হলো–



গ দেওয়া আছে $y = 2^{\frac{x}{2}}$

ধরি, $y = f(x) = 2^{\frac{x}{2}}$

x এর উচ্চতর ঋণাত্মক মানের জন্য $f(x)$ এর মান ক্রমান্বয়ে 0 (শূন্যের) খুবই কাছাকাছি পৌছায়। কিন্তু শূন্য (0) হয় না অর্থাৎ,

$x \to -\infty, y \to 0^+$

একইভাবে, x এর ধনাত্মক মানের জন্য y এর মান ক্রমান্বয়ে ডানদিকে (উপরের) বৃদ্ধি পেতে থাকে। অর্থাৎ

∞ দিকে ধাবিত হয়। অর্থাৎ $x \to \infty, y \to \infty$

সুতরাং ডোমেন, $f = (-\infty, \infty)$

এবং রেঞ্জ $f = (0, \infty)$

প্রশ্ন ▶ ৭ $y = 2^{-x}$ **একটি ফাংশন যেখানে** $-3 \leq x \leq 3$

◀ *কাজ; পৃষ্ঠা-২০০*

ক. প্রদত্ত সীমার মধ্যে ফাংশনটির কয়েকটি মানের তালিকা প্রস্তুত কর। ২

খ. ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন কর। ৪

গ. ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর এবং বিপরীত ফাংশনটিও নির্ণয় কর। ৪

৭ নং প্রশ্নের সমাধান

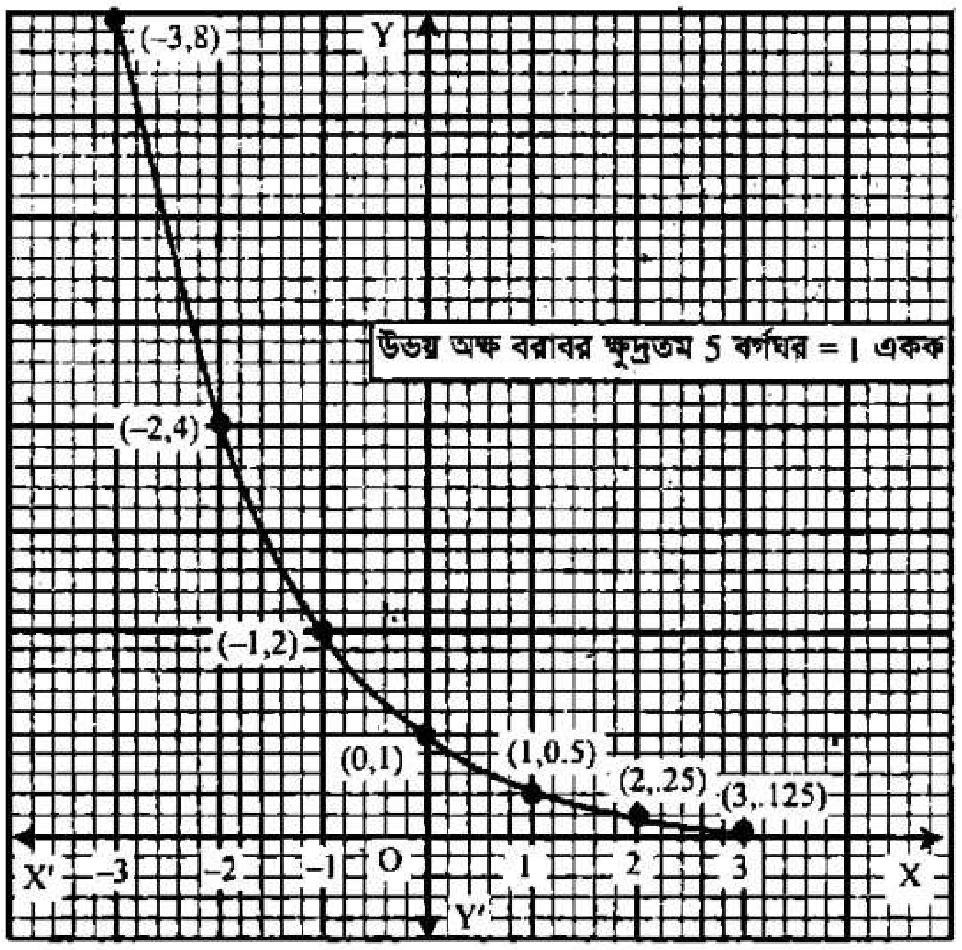
ক ধরি, $y = f(x) = 2^{-x}$

x এর –3 থেকে 3 এর মধ্যে কয়েকটি মান নিয়ে সংশ্লিষ্ট y এর মান নিচের ছকে দেখানো হলো–

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	8	4	2	1	0.5	0.25	0.125

খ A কাগজে সুবিধামত x-অক্ষ XOX′ এবং y-অক্ষ YOY′ আঁকি। x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গ ঘর = 1 একক এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গঘর = 1 একক ধরে A(x, y) বিন্দুগুলো পাতন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায়।

যা নিম্নে দেখানো হলো–



গ লেখচিত্র থেকে দেখা যায় যে, x এর ধনাত্মক মান বৃদ্ধির জন্য ফাংশনটির মান ক্রমশ: শূন্যের কাছাকাছি পৌছায় কিন্তু শূন্য হয় না। $x = 0$ হলে ফাংশনটির মান, $y = 2^{-0} = \frac{1}{2^0} = \frac{1}{1} = 1$ কাজেই ফাংশনটি (0, 1) বিন্দুগামী। আবার, x এর উচ্চতর ঋণাত্মক মানের জন্য ফাংশনটির মান বৃদ্ধি পায়। সুতরাং প্রদত্ত সীমার মধ্যে ফাংশনটির ডোমেন = [– 3, 3] এবং ফাংশনটির রেঞ্জ = $[\frac{1}{8}, 8]$

বিপরীত ফাংশন নির্ণয়:

$y = f(x) = 2^{-x}$

এখন, $y = 2^{-x}$

বা, $\log_2 y = -x$

বা, $x = -\log_2 y$

বা, $x = \log_2 y^{-1}$

$\therefore x = \log_2 \frac{1}{y}$

বিপরীত ফাংশন $f^{-1} : y \to x$ যেখানে $x = \log_2 \frac{1}{y}$

বা $f^{-1} : y \to \log_2 \frac{1}{y}$

y এর স্থলে x স্থাপন করে পাই

$f^{-1} : x \to \log_2 \frac{1}{x}$

$\therefore f^{-1}(x) = \log_2 \frac{1}{x}$

প্রশ্ন ▶ ৮ $y = \frac{4}{x}$ একটি ফাংশন। *◀ কাজ; পৃষ্ঠা-২০০*

ক. লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x ও y এর মানের ছক তৈরি কর। ২

খ. লেখচিত্রটি অঙ্কন কর। ৪

গ. বিপরীত ফাংশনটি নির্ণয় কর এবং তার ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

৮ নং প্রশ্নের উত্তর

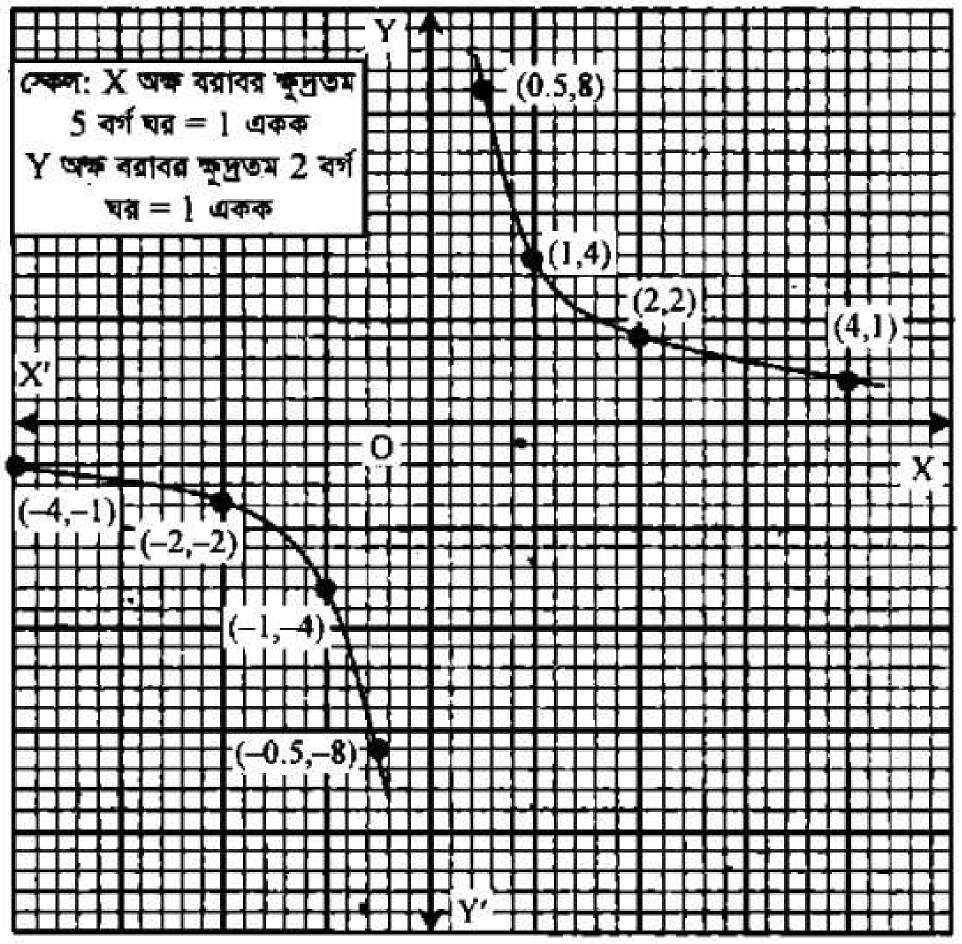
ক ধরি, $y = f(x) = \frac{4}{x}$

প্রদত্ত ফাংশন f(x) এর লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এবং y এর মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করি।

x	−4	−2	−1	−0.5	0	0.5	1	2	4
y	−1	−2	−4	−8	অসংজ্ঞায়িত	8	4	2	1

খ ক এর প্রাপ্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে সুবিধামত x-অক্ষ XOX' এবং y-অক্ষ YOY' আঁকি। x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গ ঘর = 1 একক এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 2 বর্গঘর = 1 একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো পাতন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায়।

যা নিম্নে দেখানো হলো−



গ ধরি, $y = f(x) = \frac{4}{x}$

এখন, $y = \frac{4}{x}$

$\therefore x = \frac{4}{y}$

বিপরীত ফাংশন $f^{-1} ঃ y \to x$ যেখানে, $x = \frac{4}{y}$

বা, $f^{-1} ঃ y \to \frac{4}{y}$

y এর স্থলে x স্থাপন করে পাই,

$f^{-1} ঃ x \to \frac{4}{x}$

$\therefore \quad f^{-1}(x) = \frac{4}{x}$

ফাংশনটি থেকে দেখা যায় যে, x এর মান শূন্য হলে বিপরীত ফাংশনটি অসজ্ঞায়িত হয়। সুতরাং $x \neq 0$, অর্থাৎ বিপরীত ফাংশনটির মান কখনও শূন্য হবে না। x এর ঋণাত্মক মান শূন্যের কাছাকাছি হলে বিপরীত ফাংশনটির মান বৃদ্ধি পায়। আবার x এর ঋণাত্মক মান শূন্যের কাছাকাছি হলে ফাংশনটির সর্বনিম্ন মান হ্রাস পায়।

সুতরাং, বিপরীত ফাংশনটির ডোমেন = $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ এবং ফাংশনটি রেঞ্জ = $(-\infty, 0) \cup (0. \infty)$

প্রশ্ন ▶ ৯ $y = \frac{2x + 1}{x - 1}$ একটি ফাংশন। *◀ কাজ; পৃষ্ঠা-২০১*

ক. প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্যে x ও y এর মানের তালিকা প্রস্তুত কর। ২

খ. ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং ডোমেন নির্ণয় কর। ৪

গ. ফাংশনটির বিপরীত ফাংশন নির্ণয় কর। ৪

৯ নং প্রশ্নের উত্তর

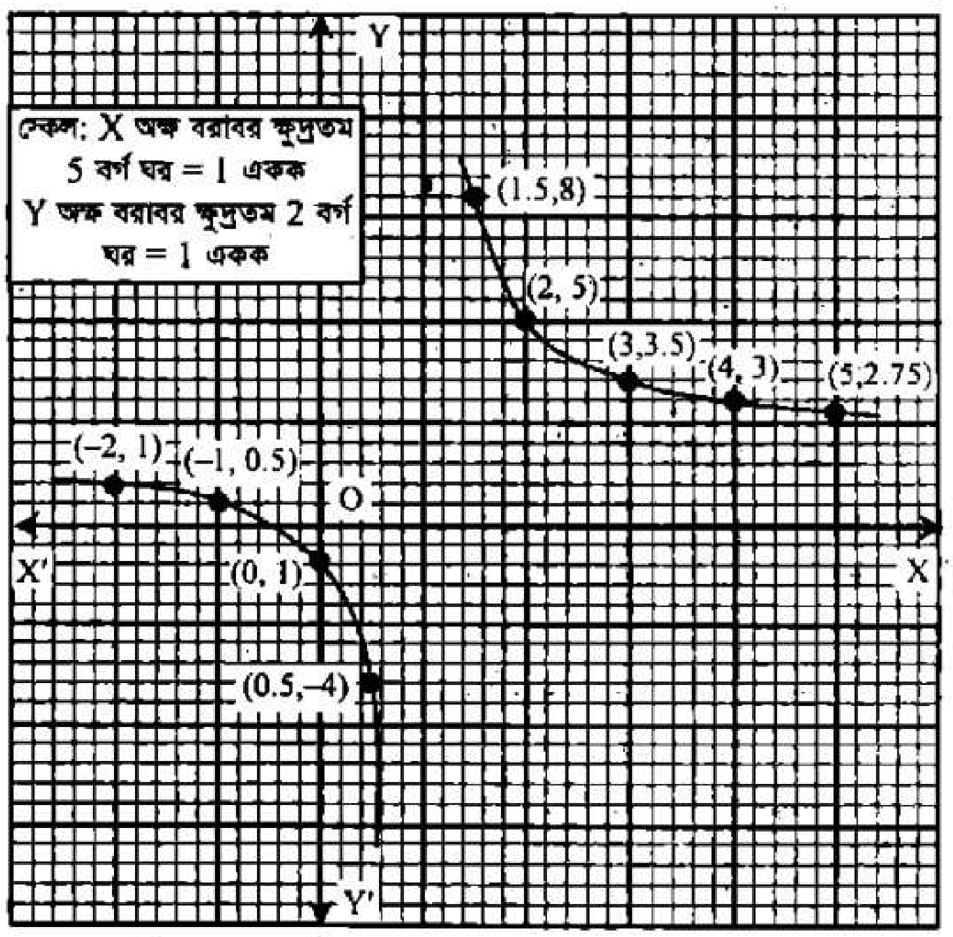
ক ধরি, $y = f(x) = \frac{2x + 1}{x - 1}$

প্রদত্ত ফাংশন $f(x)$ এর লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এবং y এর মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করি।

x	−2	−1	0	0.5	1	1.5	2	3	4	5
y	1	0.5	−1	−4	অসংজ্ঞায়িত	8	5	3.5	3	2.75

খ ক এর প্রাপ্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে সুবিধামত x-অক্ষ XOX' এবং y-অক্ষ YOY' আঁকি। x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গ ঘর = 1 একক এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 2 বর্গ ঘর = 1 একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো পাতন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায়।

যা নিম্নে দেখানো হলো−



$\because$ ফাংশনটি x = 1 এর জন্য অসংজ্ঞায়িত

$\because$ ডোমেন $D = \mathbb{R} - \{1\}$

গ ধরি, $y = f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$

এখন, $y = \frac{2x+1}{x-1}$

বা, $y(x-1) = 2x+1$

বা, $yx - 2x = y + 1$

বা, $x(y-2) = y+1$

$x = \frac{y+1}{y-2}$

বিপরীত ফাংশন $f^{-1} ፡ y \to x$ যেখানে $x = \frac{y+1}{y-2}$

বা, $f^{-1} ፡ y \to \frac{y+1}{y-2}$

y এর স্থলে x স্থাপন করে পাই,

$f^{-1} ፡ x \to \frac{x+1}{x-2}$

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-2}; x \neq 2$

প্রশ্ন ▶ ১০ $y = 4^x$ একটি সূচকীয় ফাংশন। *◀ কাজ; পৃষ্ঠা-২০১*

ক. সূচকীয় ফাংশনটির কয়েকটি মান ছক আকারে নির্ণয় কর। ২

খ. ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন কর। ৪

গ. বিপরীত ফাংশন নির্ণয় করে ডোমেন রেঞ্জ লিখ। বিপরীত ফাংশন থেকে $f^{-1}(16), f^{-1}(32), f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right), f^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$ নির্ণয় কর। ৪

১০ নং প্রশ্নের সমাধান

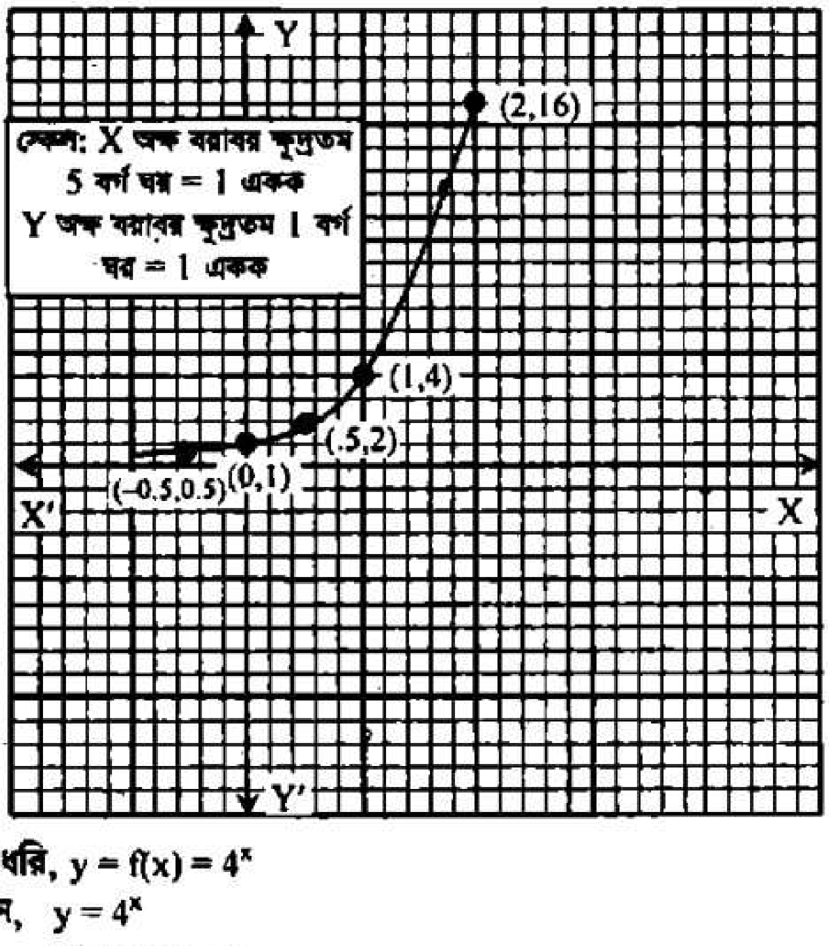
ক ধরি, $y = f(x) = 4^x$

প্রদত্ত ফাংশন f(x) এর লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এবং y এর মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করি।

x	–0.5	0	0.5	1	2
y	0.5	1	2	4	16

খ ক এর প্রাপ্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে সুবিধামত x-অক্ষ XOX′ এবং y-অক্ষ YOY′ আঁকি। x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গ ঘর = 1 একক এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 1 বর্গ ঘর = 1 একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো পাতন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায়।

যা নিম্নে দেখানো হলো–



গ ধরি, $y = f(x) = 4^x$

এখন, $y = 4^x$

বা, $\log_4 y = x$

$\therefore x = \log_4 y$

বিপরীত ফাংশন $f^{-1} ፡ y \to x$ যেখানে, $x = \log_4 y$

বা, $f^{-1} ፡ y \to \log_4 y$

y এর স্থলে x স্থাপন করে পাই, $f^{-1} ፡ x \to \log_4 x$

$\therefore f^{-1}(x) = \log_4 x$

এখন, বিপরীত ফাংশন একটি লগারিদমিক ফাংশন। সুতরাং বিপরীত ফাংশনটিতে x এর মান কখনও শূন্য বা তার চেয়ে ছোট হতে পারবে না, কিন্তু $0 < x \leq 1$ এর জন্য বিপরীত ফাংশনটির মান 0 এবং ঋনাত্মক হবে। অর্থাৎ x এর মান যতই শূন্যের কাছাকাছি যাবে বিপরীত ফাংশনটির মান ততই ছোট হবে।

$\therefore$ বিপরীত ফাংশনটির ডোমেন $= (0, \infty)$

এবং রেঞ্জ $= (-\infty, \infty)$

আবার, $f^{-1}(16) = \log_4 16 = \log_4 4^2 = 2\log_4 4 = 2$

$$f^{-1}(32) = \log_4 32 = \log_4 16.2 = \log_4 4^2.\sqrt{4} = \log_4 4^2.4^{\frac{1}{2}}$$

$$= \log_4 4^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2}\log_4 4 = \frac{5}{2}$$

$$f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \log_4\left(\frac{1}{2}\right) = \log_4(2^{-1}) = \log_4\{(4)^{\frac{1}{2}}\}^{-1}$$

$$= \log_4 4^{-\frac{1}{2}} = \left(-\frac{1}{2}\right)\log_4 4 = -\frac{1}{2}$$

এবং $f^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = \log_4\left(\frac{1}{4}\right) = \log_4 4^{-1} = (-1)\log_4 4 = -1$

প্রশ্ন ▶ ১১ $y = ln\frac{5+x}{5-x}$ একটি লগারিদম ফাংশন। *◀ কাজ; পৃষ্ঠা-২০২*

ক. ফাংশনটি যে শর্তের জন্য অসংজ্ঞায়িত সে সব শর্ত নির্ণয় কর। ২

খ. ফাংশনটির ডোমেন নির্ণয় কর। ৪

গ. ফাংশনটির রেঞ্জ নির্ণয় এবং বিপরীত ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ বের কর। ৪

১১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $x = 5$ এর জন্য ফাংশনটি অসংজ্ঞায়িত। আবার, লগারিদম ফাংশন ঋণাত্মক মানের জন্যও অসংজ্ঞায়িত। তাই $\frac{5+x}{5-x} < 0$ হলে ফাংশনটি অসংজ্ঞায়িত।

খ ধরি, $y = f(x) = \ell n\frac{5+x}{5-x}$

যেহেতু লগারিদম ফাংশন শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore \frac{5+x}{5-x} > 0$ যদি (i) $5 + x > 0$ এবং $5 - x > 0$ হয়

অথবা (ii) $5 + x < 0$ এবং $5 - x < 0$ হয়।

(i) নং হতে পাই, $x > -5$ এবং $-x > -5$

বা, $x > -5$ এবং $x < 5$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : -5 < x\}$ এবং $(x : x < 5\}$

$= (-5, \infty) \cap (-\infty, 5) = (-5, 5)$

(ii) নং হতে পাই, $x < -5$ এবং $-x < -5$

বা, $x < -5$ এবং $x > 5$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : x < -5\} \cap (x : x > 5\} = \varnothing$

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন

$D_f =$ (i) ও (ii) এ প্রাপ্ত ডোমেনের সংযোগ $= (-5, 5) \cup \varnothing = (-5, 5)$

গ ধরি, $y = f(x) = \ell n\frac{5+x}{5-x}$

বা, $e^y = \frac{5+x}{5-x}$

বা, $5 + x = 5e^y - xe^y$

বা, $x(1 + e^y) = 5(e^y - 1)$

বা, $x = \frac{5(e^y - 1)}{e^y + 1}$

y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশেনের রেঞ্জ $R_f = \mathbb{R}$

বিপরীত ফাংশন $f^{-1} : y \rightarrow x$ যেখানে, $x = \frac{5(e^y - 1)}{e^y + 1}$

বা, $f^{-1} : y \rightarrow \frac{5(e^y - 1)}{e^y + 1}$

y এর পরিবর্তে x বসিয়ে পাই,

$f^{-1} : x \rightarrow \frac{5(e^x - 1)}{e^x + 1}$

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{5(e^x - 1)}{e^x + 1}$

সুতরাং, বিপরীত ফাংশনের ডোমেন হবে ফাংশনটির রেঞ্জ এবং রেঞ্জ হবে ফাংশনটির ডোমেন।

$\therefore D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ এবং $R_{f^{-1}} = (-5, 5)$ **(উত্তর)**

প্রশ্ন ▶ ১২ একটি ফাংশন $f(x) = e^x$; ◀ কাজ; পৃষ্ঠা-২০৪

ক. স্বাধীন চলকের কয়েকটি মানের জন্য ফাংশনটির মান নির্ণয় কর। ২

খ. প্রদত্ত সীমা অনুসারে ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

গ. ফাংশনটির বিপরীত ফাংশন নির্ণয় কর ও লেখচিত্র অঙ্কন কর। ৪

১২ নং প্রশ্নের সমাধান

ক এখানে, x হচ্ছে স্বাধীন চলক।

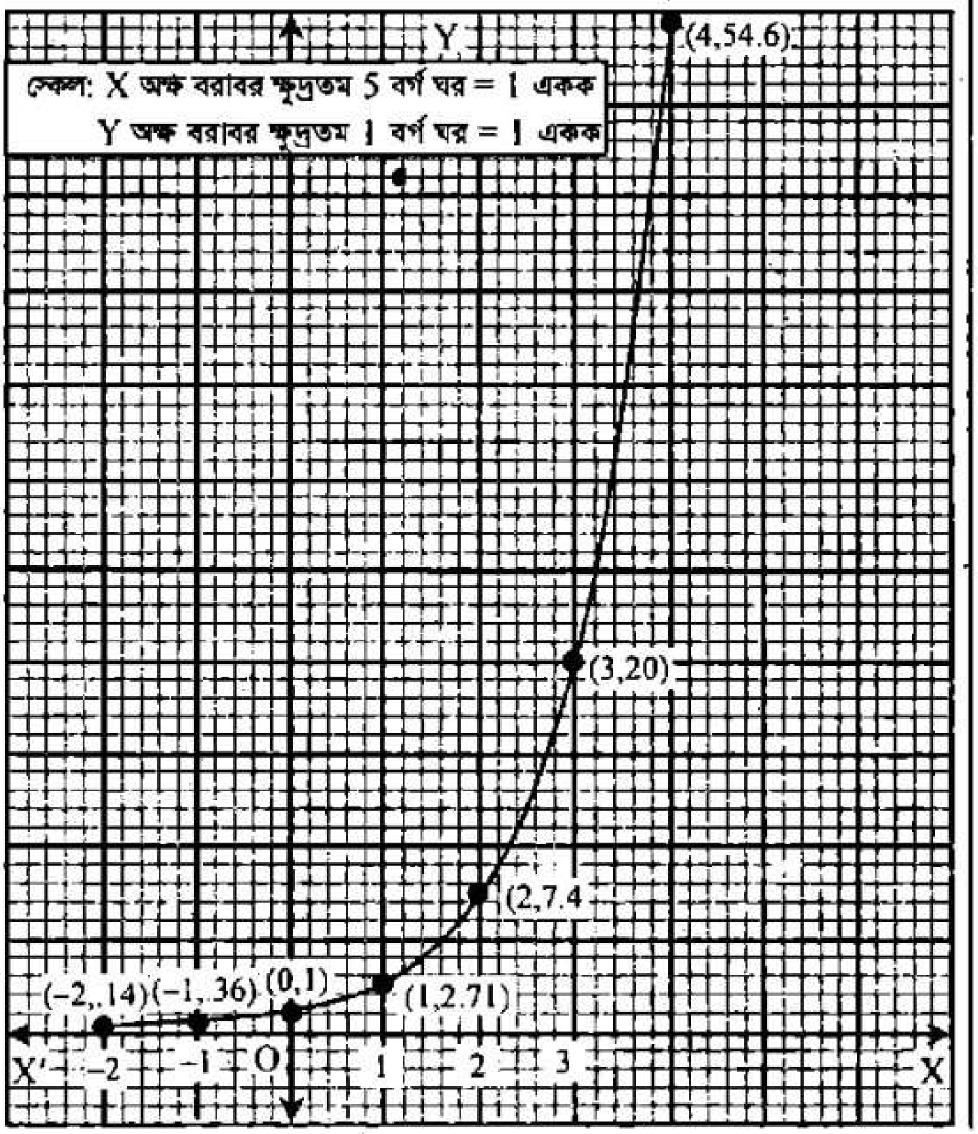
ধরি, $y = f(x) = e^x$,

x এর কয়েকটি মান নিয়ে সংশ্লিষ্ট y এর মান নিচের ছকে দেখানো হলো–

x	– 2	– 1	0	1	2	3	4
y	0.14	0.36	1	2.71	7.4	20.08	54.6

গ এখন, ক এ প্রাপ্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে সুবিধামত x-অক্ষ XOX' এবং Y-অক্ষ YOY' আঁকি। x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গ ঘর = 1 একক এবং y-অক্ষ বরবর ক্ষুদ্রতম 1 বর্গঘর = 1 একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো পাতন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায়।

যা নিম্নে দেখানো হলো–



এখন, x এর সকল বাস্তব মানের জন্য প্রদত্ত ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত।

$\therefore$ ফাংশনের ডোমেন $D_f = \mathbb{R}$

এবং x যখন $-\infty$ এর কাছাকাছি হয় তখন $f(x)$ এর মান শূন্যের কাছাকাছি হয় কিন্তু $f(x)$ এর মান কখনই শূন্য হবে না এবং x এর মান বৃদ্ধির সাথে সাথে $f(x)$ মান বৃদ্ধি পায়।

$\therefore$ ফাংশনের রেঞ্জ $R_f = (0, \infty)$

গ 'ক' থেকে পাই,

$y = e^x$

বা, $ln y = x$

$\therefore x = \ln y$

বিপরীত ফাংশন $f^{-1} : y \rightarrow x$ যেখানে, $x = ln y$

বা, $f^{-1} : y \rightarrow ln y$

y এর পরিবর্তে x বসিয়ে পাই,

$f^{-1} : x \rightarrow ln x$

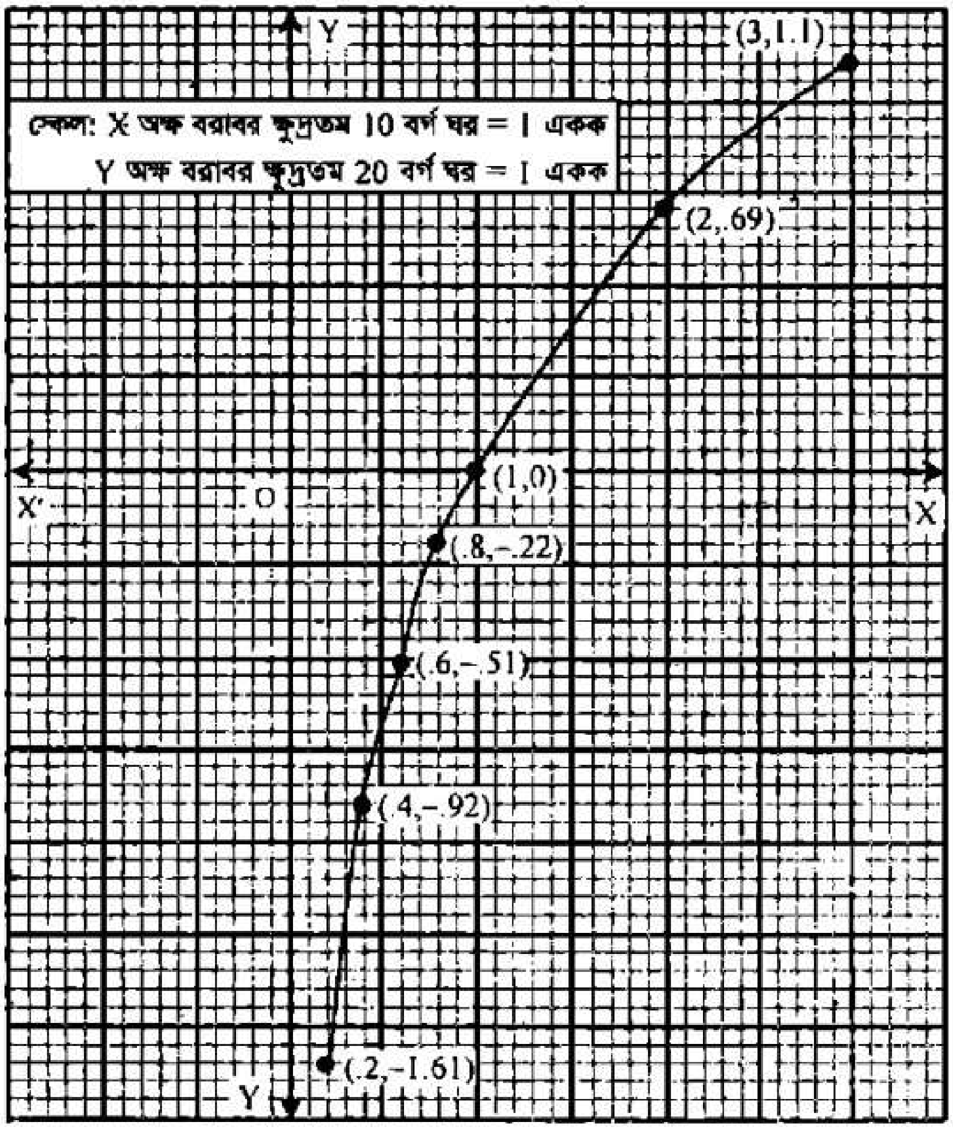
$\therefore f^{-1}(x) = ln x$

ধরি, $Z = f^{-1}(x) = ln x$

$f^{-1}(x)$ এর লেখচিত্রের জন্য x এবং y এর মানগুলোর তালিকা তৈরি করি।

x	–1	0	.2	.4	.6	.8	1	2	3
y	অসংজ্ঞায়িত	অসংজ্ঞায়িত	–1.61	–0.92	–.51	–.22	0	.69	1.1

ছক কাগজে মানগুলো স্থাপন করলে নিম্নরূপ লেখচিত্র পাওয়া যায়–



প্রশ্ন ▶ ১৩ $f(x) = e^{-x}$ একটি ফাংশন ◀ কাজ; পৃষ্ঠা-২০৪

ক. প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য একটি সারণী তৈরি কর। ২

খ. ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন কর। ৪

গ. ফাংশনটির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর এবং বিপরীত ফাংশন নির্ণয় কর। ৪

১৩ নং প্রশ্নের সমাধান

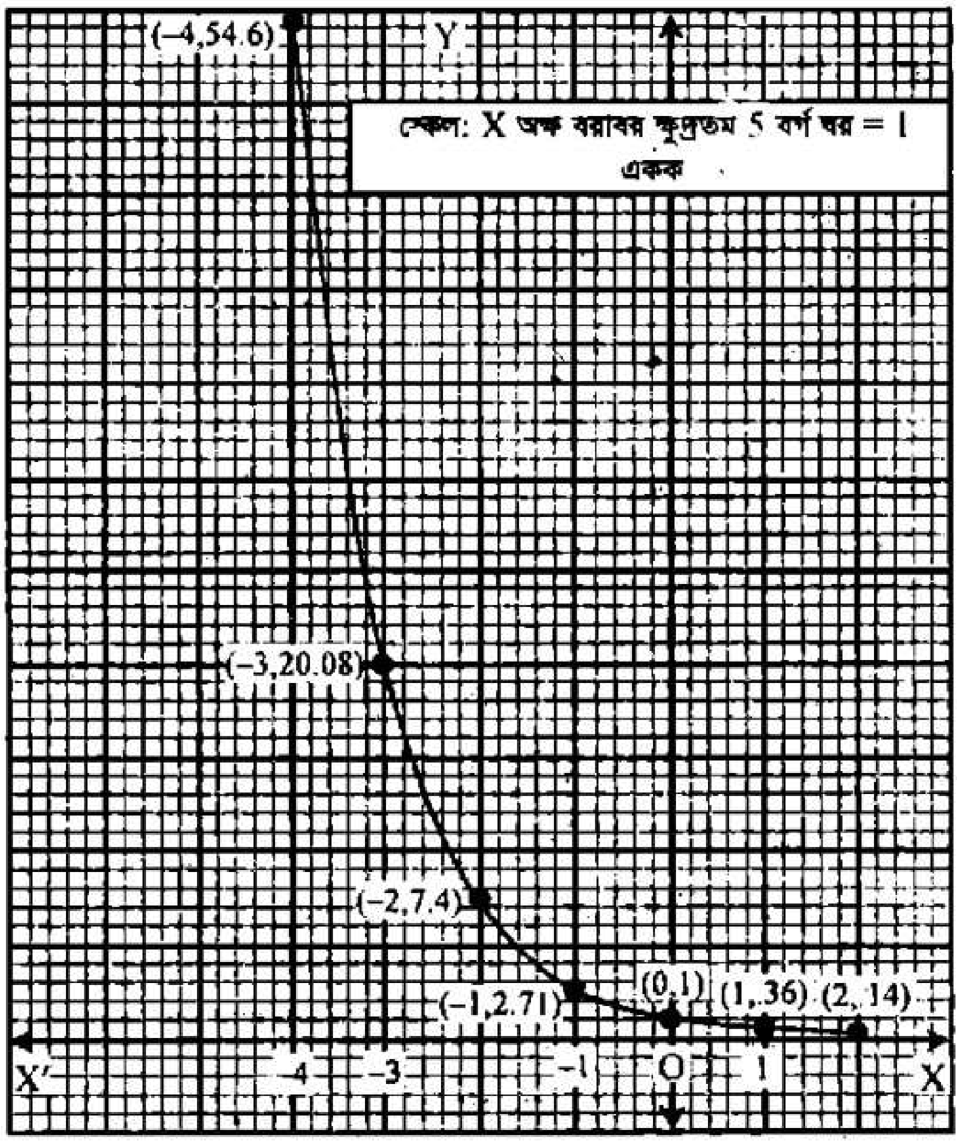
ক ধরি, $y = f(x) = e^{-x}$

x এর কয়েকটি মান নিয়ে সংশ্লিষ্ট y এর মান নিম্নের ছকে দেখানো হলো–

x	2	1	0	–1	–2	–3	–4
y	0.14	0.36	1	2.71	7.4	20.08	54.6

খ এখন, ক এ প্রাপ্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে সুবিধামত X-অক্ষ XOX' এবং Y-অক্ষ YOY' আঁকি। X-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গঘর = 1 একক এবং Y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 1 বর্গঘর = 1 একক ধারে (x, y) বিন্দগুলো পাতন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখার যুক্ত করে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায়।

যা নিম্নে দেখানো হলো–



গ এখন, x এর সকল বাস্তব মানের জন্য প্রদত্ত ফাংশন $f(x)$ সংজ্ঞায়িত।

$\therefore$ ফাংশনটির ডোমেন $D_f = \mathbb{R}$

এবং x যখন + ∞ এর কাছাকাছি হয় তখন $f(x)$ এর মান শূন্যের কাছাকাছি হয় এবং x এর মান হ্রাসের সাথে সাথে $f(x)$ এর মান অসীমের দিকে বৃদ্ধি পায়।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ $R_f = (0, \infty)$

'ক' হতে পাই, $y = e^{-x}$

বা, $\log_e y = -x$

বা, $x = -\log_e^{y}$

বা, $x = \log_e^{y^{-1}}$

$\therefore x = \log_e^{\frac{1}{y}}$

বিপরীত ফাংশন $f^{-1} : y \rightarrow x$ যেখানে $x = \log_e^{\frac{1}{y}}$

বা, $f^{-1} : y \rightarrow \log_e^{\frac{1}{y}}$

y এর পরিবর্তে x বসিয়ে পাই,

$f^{-1} : x \rightarrow \log_e \frac{1}{x}$

$\therefore f^{-1}(x) = \log_e \frac{1}{x}$

প্রশ্ন ▶ ১৪ **$y = \log_{10}x$ একটি লগারিদম ফাংশন।** *◀ কাজ; পৃষ্ঠা-২০৫*

ক. লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য ফাংশনটির কয়েকটি মান নির্ণয় কর। ২
খ. ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন কর। ৪
গ. বিপরীত ফাংশন নির্ণয় করে ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

১৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $y = \log_{10}x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন :

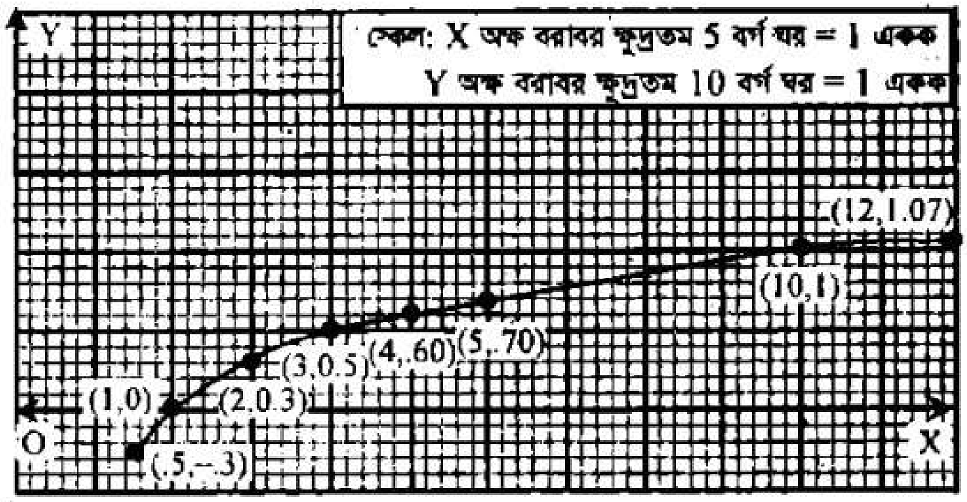
ধরি, $y = f(x) = \log_{10}x$

x এর 0.5 থেকে 12 এর মধ্যে কয়েকটি মান নিয়ে সংশ্লিষ্ট y এর মান নিম্নের ছকে দেখানো হলো–

x	0.5	1	2	3	4	5	10	12
y	–0.3	0	0.3	0.5	0.60	0.70	1	1.07

খ এখন, ক এ প্রাপ্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে সুবিধামত X-অক্ষ XOX' এবং y-অক্ষ YOY' আঁকি। x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গঘর = 1 একক এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 10 বর্গঘর = 1 একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো পাতন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখার যুক্ত করে $y = f(x)$ এর লেখা পাওয়া যায়।

যা নিম্নে দেখানো হলো–



খ দেওয়া আছে, $y = \log_{10}x$

বা, $10^y = x$

$\therefore x = 10^y$ বিপরীত ফাংশন $f^{-1} : y \rightarrow x$ যেখানে $x = 10^y$

বা, $f^{-1} : y \rightarrow 10^y$

y এর পরিবর্তে x বসিয়ে পাই,

$f^{-1} : x \rightarrow 10^x$

$\therefore f^{-1}(x) = 10^x$

বিপরীত ফাংশনটি x এর সকল বাস্তব মানের জন্য সংজ্ঞায়িত অর্থাৎ x যে কোনো বাস্তব মানের জন্য $f^{-1}(x)$ এর ধনাত্মক মান পাওয়া যাবে। সুতরাং ফাংশনটির ডোমেন, $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ এবং রেঞ্জ, $R_{f^{-1}} = R_+$

প্রশ্ন ▶ ১৫ **$y = \log_e x$ একটি লগারিদমিক ফাংশন।** *◀ কাজ; পৃষ্ঠা-২০৫*

ক. x ও y এর মানের একটি টেবিল তৈরি কর। ২
খ. ফাংশনটির লেখচিত্র আঁক। ৪
গ. দেখাও যে, ফাংশনটির বিপরীত ফাংশন = e^x। এই ফাংশনটির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

১৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $y = \log_e x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন :

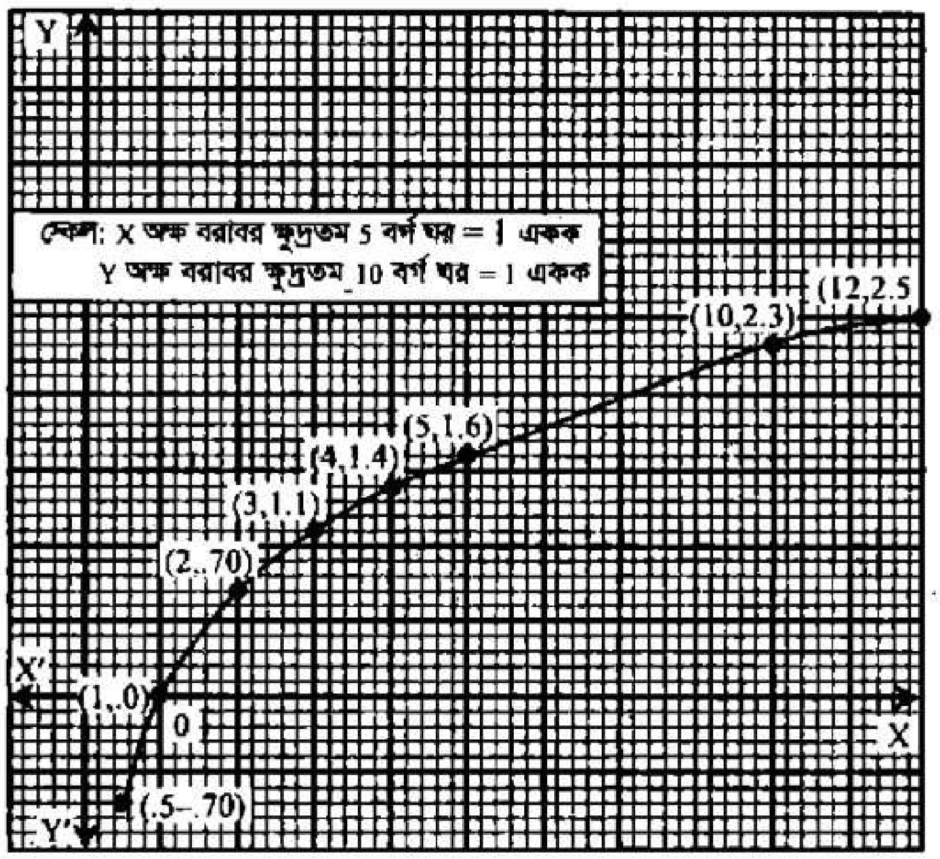
ধরি, $y = f(x) = \log_e x$

x এর 0.5 থেকে 12 এর মধ্যে কয়েকটি মান নিয়ে সংশ্লিষ্ট y এর মান নিম্নের ছকে দেখানো হলো–

x	0.5	1	2	3	4	5	10	12
y	–0.70	0	0.70	1.1	1.4	1.6	2.3	2.50

খ ক এ প্রাপ্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে সুবিধামত x-অক্ষ XOX' এবং y-অক্ষ YOY' আঁকি। x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গঘর = 1 একক এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 10 বর্গঘর = 1 একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো পাতন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায়।

যা নিম্নে দেখানো হলো–



গ দেওয়া আছে,

$y = \log_e x$

বা, $e^y = x$

বা, $e^y = x$

$\therefore x = e^y$

বিপরীত ফাংশন $f^{-1} : y \to x$ যেখানে, $x = e^y$

বা, $f^{-1} : y \to e^y$

y এর পরিবর্তে x বসিয়ে পাই,

$f^{-1} : x \to e^x$

$\therefore f^{-1}(x) = e^x$

$\therefore$ ফাংশনটির বিপরীত ফাংশন $= e^x$ **(দেখানো হলো)**

বিপরীত ফাংশনটিতে x এর সকল বাস্তব মানের জন্য ফাংশনটির ধনাত্মক মান পাওয়া যাবে।

$\therefore$ বিপরীত ফাংশনটির ডোমেন $D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ এবং রেঞ্জ,

$R_{f^{-1}} = \mathbb{R}_+$

মাস্টার ট্রেইনার প্রণীত আরও সৃজনশীল রচনামূলক প্রশ্ন

প্রশ্ন ▶ ১৬ **নিম্নের একটি লগারিদমিক সম্পর্ক দেখানো হলো:**

$$\frac{\log(x^2+y)}{\log(x+1)} = \log_x y = 2$$

ক. x ও y চলক বিশিষ্ট একটি একঘাত সমীকরণ নির্ণয় কর। ২

খ. একটি লেখচিত্রে $\log_x y = 2$ সমীকরণটি এঁকে দেখাও। ৪

গ. সমাধান করে (x, y) নির্ণয় কর। ৪

১৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক উদ্দীপক থেকে পাই,

$\frac{\log(x^2+y)}{\log(x+1)} = 2$ বা, $\log(x^2+y) = 2\log(x+1)$

বা, $\log(x^2+y) = \log(x+1)^2$ বা, $(x^2+y) = (x+1)^2$

বা, $x^2 + y = x^2 + 2x + 1$ বা, $2x - y + 1 = 0$

অতএব, নির্ণেয় x ও y চলক বিশিষ্ট একটি একঘাত সমীকরণটি হলো, $2x - y + 1 = 0$

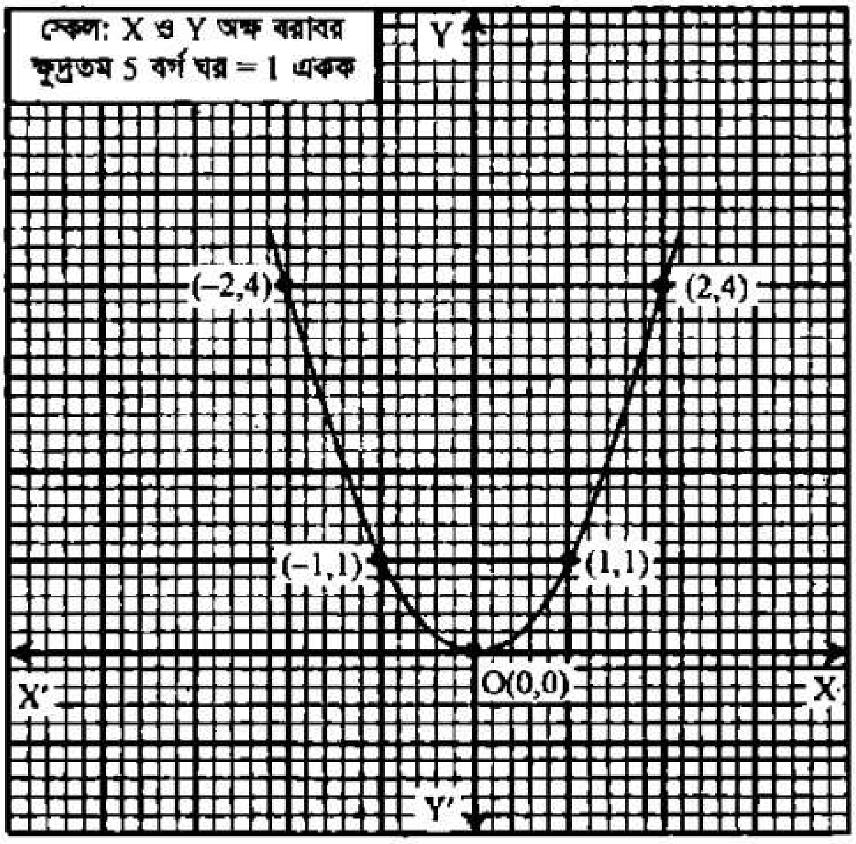
খ $\log_x y = 2$ থেকে আমরা পাই,

$y = x^2$

লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x ও y এর মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করি,

x	–2	–1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

ছক কাগজে মানগুলো স্থাপন করলে নিম্নরূপ লেখচিত্র পাওয়া যায়—



গ 'ক' ও 'খ' হতে আমরা পাই,

$2x - y + 1 = 0$ .... (1)

$y = x^2$ .... (2)

y-এর মান (1)নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$2x - x^2 + 1 = 0$

$x^2 - 2x - 1 = 0$

আমরা জানি, $ax^2 + bx + c = 0$ হলে,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

অতএব, $x = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2}$

$x = 1 \pm \sqrt{2}$

x- এর মান (2)নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$y = (1+\sqrt{2})^2$

$y = 3 + 2\sqrt{2}$

অথবা, $y = (1-\sqrt{2})^2$

$y = 3 - 2\sqrt{2}$

$\therefore (x, y) = (1+\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}), (1-\sqrt{2}, 3-2\sqrt{2})$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১৭ $f(x) = \ln\frac{a+x}{a-x}; a > 0$

ক. lnx এর বেইজ কত? lnx = 1 হলে, x-এর মান কত হবে? ২

খ. $f(x)$ ফাংশনটির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

গ. $\log_{10}\left[98 + \sqrt{a^2 - 12a + 36}\right] = 2$ হলে $f(x) = 1$ এর জন্য সমাধান কর। ৪

১৭নং প্রশ্নের সমাধান

ক ln x এর বেইজ e

আমরা জানি, $\ell ne = 1$

$\therefore \ln x = 1$ হলে $x = e$

খ যেহেতু লগারিদম শুধু মাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত,

$\therefore \frac{a+x}{a-x} > 0$ হবে

যদি (i) $a + x > 0$ এবং $a - x > 0$

অথবা, (ii) $a + x < 0$ এবং $a - x < 0$

(i) $a + x > 0$ এবং $a - x > 0$

$x > -a$ এবং $x < a$

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : x > -a\} \cap \{x : x < a\}$

$= (-a, \infty) \cap (-\infty, a)$

$= (-a, a)$

আবার, (ii) $a + x < 0$ এবং $a - x < 0$

$x < -a$ এবং $x > a$

$\therefore$ ডোমেন $= \{ x : x < -a\} \cap \{x : x > a\}$

$= \varnothing$

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন $= (-a, a) \cup \varnothing$

$= (-a, a)$

গ দেওয়া আছে,

$\therefore \log_{10}\left[98 + \sqrt{a^2 - 12a + 36}\right] = 2$

বা, $98 + \sqrt{a^2 - 12a + 36} = 10^2$

বা, $98 + \sqrt{a^2 - 12a + 36} = 100$

বা, $\sqrt{a^2 - 12a + 36} = 2$

বা, $a^2 - 12a + 36 = 4$

বা, $a^2 - 12a + 32 = 0$

বা, $a^2 - 8a - 4a + 32 = 0$

বা, $a(a - 8) - 4(a - 8) = 0$

বা, $(a - 8)(a - 4) = 0$

$\therefore$ $a = 8$ অথবা, $a = 4$

আবার, $f(x) = 1$

$\ln\frac{a + x}{a - x} = 1$

বা, $\frac{a + x}{a - x} = e$

বা, $a + x = ea - ex$

বা; $ex + x = ea - a$

বা, $x(e + 1) = a(e-1)$

বা, $x = \frac{a(e - 1)}{e + 1}$

এখন, $a = 8$ হলে,

$x = \frac{8(e - 1)}{e + 1} = 3.7 \quad [\because e = 2.718]$

এবং $a = 4$ হলে,

$x = \frac{4(e - 1)}{e + 1} = 1.8$ **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ১৮ **তিনটি লগারিদমিক রাশি বিবেচনা কর,**

$$\frac{\log_k a^{ab} + \log_k b^{ab}}{a + b}, \frac{\log_k b^{bc} + \log_k c^{bc}}{b + c}, \frac{\log_k c^{ca} + \log_k a^{ca}}{c + a}$$

ক. রাশি তিনটি পরস্পর সমান হলে দেখাও যে,
$\frac{ab \log_k ab}{a + b} = \frac{bc \log_k bc}{b + c} = \frac{ca \log_k ca}{c + a}$ ২

খ. প্রমাণ কর : $\log_k a + \log_k b + \log_k c = p\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$ যেখানে প্রতিটি রাশির মান p । ৪

গ. দেখাও যে, $a^a = b^b = c^c$ ৪

১৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক প্রথম রাশি, $\frac{\log_k a^{ab} + \log_k b^{ab}}{a + b}$

$= \frac{ab \log_k a + ab \log_k b}{a + b}$

$= \frac{ab (\log_k a + \log_k b)}{a + b}$

$= \frac{ab \log_k ab}{a + b}$

একইভাবে, $\frac{\log_k b^{bc} + \log_k c^{bc}}{b + c} = \frac{bc \log_k bc}{b + c}$

এবং $\frac{\log_k c^{ca} + \log_k a^{ca}}{c + a} = \frac{ca \log_k ca}{c + a}$

যেহেতু প্রতিটির মান সমান, সুতরাং

$\frac{ab \log_k ab}{a + b} = \frac{bc \log_k bc}{b + c} = \frac{ca \log_k ca}{c + a}$ **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে, প্রতিটি রাশির মান $= p$

$\therefore \frac{ab \log_k{}^{ab}}{a + b} = \frac{bc \log_k{}^{bc}}{b + c} = \frac{ca \log_k{}^{ca}}{c + a} = p$

সুতরাং $\frac{ab \log_k ab}{a + b} = p$

বা, $ab \log_k ab = p(a + b)$

বা, $\log_k ab = \frac{p(a + b)}{ab}$

বা, $\log_k a + \log_k b = \frac{p(a + b)}{ab}$

$= p\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$ ....(i)

একই ভাবে, $\frac{bc \log_k bc}{b + c} = p$ হতে $\log_k b + \log_k c$

$= \frac{p(b + c)}{bc}$

$= p\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$ ....(ii)

এবং $\frac{ca\log_k ca}{c + a} = p$ হতে $\log_k c + \log_k a = \frac{p(c + a)}{ca}$

$= p\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right)$ ....(iii)

(i), (ii) ও (iii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$2(\log_k a + \log_k b + \log_k c) = p\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right)$

বা, $\log_k a + \log_k b + \log_k c = \frac{p}{2} \times 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$

$= p\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$ **(প্রমাণিত)**

গ 'খ' হতে পাই, $\log_k a + \log_k b + \log_k c$

$= p\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$ ......(iv)

এখন (iv) – (i) থেকে পাই

$\log_k c = p\left(\frac{1}{c}\right)$

বা, $c \log_k c = p$

বা, $\log_k c^c = p$ ....(v)

(iv) – (ii) থেকে পাই,

$\log_k a = p\left(\frac{1}{a}\right)$

বা, $a \log_k a = p$

বা, $\log_k a^a = p$ ....(vi)

একই ভাবে (iv) – (iii) হতে পাই,

$\log_k b^b = p$ .... (vii)

(v), (vi) ও (vii) হতে পাই,

$\log_k a^a = \log_k b^b = \log_k c^c$

$\therefore a^a = b^b = c^c$ [সূত্র : $\log_k x = \log_k y$ হলে $x = y$] **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ১৯ **একটি লগারিদমিক ফাংশন**

$$f(x) = ln\ \frac{2+x}{2-x}$$

ক. কোন কোন শর্তের জন্য $\frac{2+x}{2-x}$ ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক হবে? ২

খ. $f(x)$ -এর ডোমেন ও রেঞ্জ বের কর। ৪

গ. $f^{-1}(x)$ নির্ণয় কর এবং ফাংশনটি এক এক কিনা নির্ধারণ কর। ৪

১৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক $\frac{2+x}{2-x}$ ধনাত্মক হবে অর্থাৎ $\frac{2+x}{2-x} > 0$ হবে

যদি, (i) $2 + x > 0$ এবং $2 - x > 0$ হয়

অথবা, (ii) $2 + x < 0$ এবং $2 - x < 0$ হয়

$\frac{2+x}{2-x}$ ঋণাত্মক হবে অর্থাৎ $\frac{2+x}{2-x} < 0$ হবে

যদি, (iii) $2 + x > 0$ এবং $2 - x < 0$ হয়

অথবা, (iv) $2 + x < 0$ এবং $2 - x > 0$ হয়

খ প্রদত্ত ফাংশন, $f(x) = ln\ \frac{2+x}{2-x}$

যেহেতু লগারিদম শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore \frac{2+x}{2-x} > 0$ হবে।

'ক' থেকে $\frac{2+x}{2-x} > 0$ হবে

যদি (i) $2 + x > 0$ এবং $2 - x > 0$ হয়

বা, $2 > -x$ এবং $2 > x$

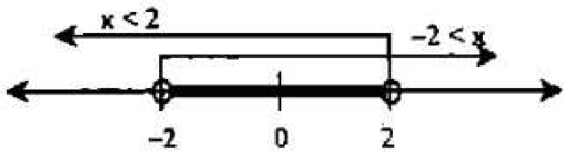
বা, $-2 < x$ এবং $x < 2$

বা, $\{x : -2 < x\} \cap \{x : x < 2\}$

$= (-2, \infty) \cap (-\infty, 2)$

$= (-2, 2)$

সংখ্যারেখা:



অথবা, (ii) $2 + x < 0$ এবং $2 - x < 0$

বা, $2 < -x$ এবং $2 < x$

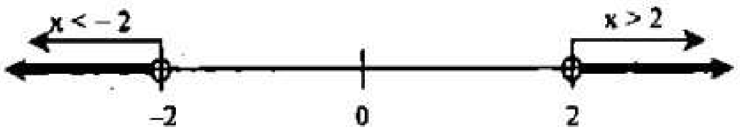
বা, $x < -2$ এবং $x > 2$

বা, $\{x : x < -2\} \cap \{x : x > 2\}$

$= (-\infty, -2) \cap (2, \infty)$

$= \varnothing$

সংখ্যারেখা:



$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন $= (-2, 2)$ অথবা $\varnothing$

$= (-2, 2) \cup \varnothing$

$= (-2, 2)$

ধরি $y = f(x) = ln\ \frac{2+x}{2-x}$

বা, $e^y = \frac{2+x}{2-x}$

বা, $2 + x = 2e^y - xe^y$

বা, $x + xe^y = 2e^y - 2$

বা, $x(1 + e^y) = 2e^y - 2$

বা, $x = \frac{2e^y - 2}{1 + e^y}$

y- এর সকল মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ = **R**

গ 'খ' থেকে পাই $y = f(x) = ln\ \frac{2+x}{2-x}$

$\therefore y = f(x)$ এবং $y = ln\ \frac{2+x}{2-x}$

বা, $x = f^{-1}(y)$ এবং $x = \frac{2e^y - 2}{1 + e^y}$ ['খ' থেকে]

$\therefore f^{-1}(y) = \frac{2e^y - 2}{1 + e^y}$

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{2e^x - 2}{1 + e^x}$

এখন, ধরি, $x_1, x_2 \in f(x)$; ডোমেন $(-2, 2)$ এর জন্য $f(x_1) = f(x_2)$

বা, $ln\ \frac{2+x_1}{2-x_1} = ln\ \frac{2+x_2}{2-x_2}$

বা, $\frac{2+x_1}{2-x_1} = \frac{2+x_2}{2-x_2}$

বা, $\frac{2+x_1+2-x_1}{2+x_1-2+x_1} = \frac{2+x_2+2-x_2}{2+x_2-2+x_2}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{4}{2x_1} = \frac{4}{2x_2}$

বা, $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2}$

$\therefore x_1 = x_2$

অর্থাৎ যেকোন দুইটি একই ডোমেনের জন্য $f(x)$-এর দুইটি একই প্রতিচ্ছবি পাওয়া যায়। সুতরাং ফাংশনটি এক-এক।

প্রশ্ন ▶ ২০ **যদি $\frac{\log_k a}{y-z} = \frac{\log_k b}{z-x} = \frac{\log_k c}{x-y} = m$ হয় তাহলে,**

ক. দেখাও, $\log_k a^{y+z} = m(y^2 - z^2)$ এবং $\log_k a^{y^2+yz+z^2} = m(y^3 - z^3)$ ২

খ. দেখাও যে, $a^{y+z}.b^{z+x}.c^{x+y} = 1$ ৪

গ. দেখাও যে,
$a^{y^2+yz+z^2}.b^{z^2+zx+x^2}.c^{x^2+xy+y^2} = a^{y+z}.b^{z+x}.c^{x+y}$ ৪

২০ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $\frac{\log_k a}{y-z} = \frac{\log_k b}{z-x} = \frac{\log_k c}{x-y} = m$

$\therefore \frac{\log_k a}{y-z} = m$

বা, $\log_k a = m(y - z)$

বা, $(y + z) \log_k a = m(y + z)(y - z)$ [উভয় পক্ষে $(y + z)$ গুণ করে]

$\therefore \log_k a^{y+z} = m(y^2 - z^2)$

আবার, $\log_k a = m(y - z)$

বা, $(y^2 + yz + z^2) \log_k a = m(y - z)(y^2 + yz + z^2)$

[উভয় পক্ষে $y^2 + yz + z^2$ গুণ করে]

বা, $\log_k a^{y^2+yz+z^2} = m(y^3 - z^3)$

খ দেওয়া আছে, $\frac{\log_k b}{z-x} = m$

বা, $\log_k b = m(z - x)$

বা, $(z + x) \log_k c = m(z - x)(z + x)$

বা, $\log_k b^{z+x} = m(z^2 - x^2)$ ....(i)

এবং $\frac{\log_k c}{x-y} = m$

বা, $\log_k c = m(x - y)$

বা, $(x + y)\log_k c = m(x - y)(x + y)$

$\therefore \log_k c^{x+y} = m(x^2 - y^2)$ ....(ii)

'ক' থেকে পাই $\log_k a^{y+z} = m(y^2 - z^2)$ ....(iii)

(i), (ii) ও (iii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$\log_k a^{y+z} + \log_k b^{z+x} + \log_k c^{x+y} = m(y^2 - z^2 + z^2 - x^2 + x^2 - y^2)$

বা, $\log_k a^{y+z}.b^{z+x}.c^{x+y} = m. 0 = 0$

বা, $\log_k a^{y+z}.b^{z+x} c^{x+y} = \log_k{}^1$

$\therefore a^{y+z}.b^{z+x} c^{x+y} = 1$

গ দেওয়া আছে, $\frac{\log_k b}{z-x} = m$

বা, $\log_k b = m(z-x)$

বা, $(z^2 + zx + x^2) \log_k b = m(z-x)(z^2 + zx + x^2)$

[উভয় পক্ষে $z^2 + zx + x^2$ গুণ করে]

বা, $\log_k b^{z^2+zx+x^2} = m(z^3 - x^3)$ ....(iv)

এবং $\frac{\log_k c}{x-y} = m$

বা, $\log_k c = m(x-y)$

বা, $(x^2 + xy + y^2) \log_k c = m(x-y)(x^2 + xy + y^2)$

[উভয় পক্ষে $x^2 + xy + y^2$ গুণ করে]

বা, $\log_k c^{x^2+xy+y^2} = m(x^3 - y^3)$ ....(v)

'ক' হতে পাই, $\log_k a^{y^2+yz+z^2} = m(y^3 - z^3)$ ....(vi)

(iv), (v) ও (vi) সমীকরণ যোগ করে পাই,

$\log_k a^{y^2+yz+z^2} + \log_k b^{z^2+zx+x^2} + \log_k c^{x^2+xy+y^2}$

$= m(y^3 - z^3 + z^3 - x^3 + x^3 - y^3) = 0$

বা, $\log_k a^{y^2+yz+z^2} b^{z^2+zx+x^2} c^{x^2+xy+y^2} = \log_k{}^1$

$\therefore a^{y^2+yz+z^2} b^{z^2+zx+x^2} c^{x^2+xy+y^2} = 1$

'খ' হতে পাই,

$a^{y+z} b^{z+x} c^{x+y} = 1$

$\therefore a^{y^2+yz+z^2} b^{z^2+zx+x^2} c^{x^2+xy+y^2} = a^{y+z}.\, b^{z+x}.\, c^{x+y}$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ২১ **যদি $xy^{a-1} = p,\ xy^{b-1} = q,\ xy^{c-1} = r$ হয়, তাহলে,**

ক. $(b-c)\log_k p = \log_k x^{b-c} + \log_k y^{ab-ac-b+c}$ দেখাও। ২

খ. $(b-c)\log_k p + (c-a)\log_k q + (a-b)\log_k r$ এর মান বের কর। ৪

গ. যদি $\log_k \frac{p-\sqrt{p^2-1}}{p+\sqrt{p^2-1}}$ = 'খ' এর রাশিটির মানের সমান হয় তাহলে p = কত? ৪

২১ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে,

$xy^{a-1} = p$

বা, $\log_k xy^{a-1} = \log_k p$ [উভয় পক্ষে $\log_k$ নিয়ে]

$\therefore (b-c)\log_k p = (b-c)\log_k xy^{a-1}$

[উভয় পক্ষে (b – c) দ্বারা গুণ করে]

$= \log_k (xy^{a-1})^{b-c}$

$= \log_k \{x^{b-c}.\, y^{(a-1)(b-c)}\}$

$= \log_k x^{b-c} + \log_k y^{ab-ac-b+c}$ **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে, $xy^{b-1} = q,\ xy^{c-1} = r$

'ক' থেকে $(b-c)\log_k p = \log_k x^{b-c} + \log_k y^{ab-ac-b+c}$..........(i)

একইভাবে $(c-a)\log_k q = \log_k x^{c-a} + \log_k y^{(b-1)(c-a)}$

$= \log_k x^{c-a} + \log_k y^{bc-ab-c+a}$ ....(ii)

$(a-b)\log_k r = \log_k x^{(a-b)} + \log_k y^{(c-1)(a-b)}$

$= \log_k x^{a-b} + \log_k y^{ca-bc-a+b}$ ....(iii)

(i), (ii) ও (iii) নং যোগ করে পাই

$(b-c)\log_k p + (c-a)\log_k q + (a-b)\log_k r$

$= (\log_k x^{b-c} + \log_k x^{c-a} + \log_k x^{a-b}) +$

$(\log_k y^{ab-ac-b+c} + \log_k y^{bc-ab-c+a} + \log_k y^{ca-bc-a+b})$

$= \log_k x^{b-c+c-a+a-b} + \log_k y^{ab-ac-b+c+bc-ab-c+a+ca-bc-a+b}$

$= \log_k x^0 + \log_k y^0$

$= \log_k 1 + \log_k 1$

$= 0 + 0$

$= 0$ **(Ans.)**

গ $\log_k \frac{p-\sqrt{p^2-1}}{p+\sqrt{p^2-1}}$ = 'খ' এর রাশিটির মান = 0

বা, $\log_k \frac{(p-\sqrt{p^2-1})(p-\sqrt{p^2-1})}{(p+\sqrt{p^2-1})(p-\sqrt{p^2-1})} = \log_k{}^1$

বা, $\frac{(p-\sqrt{p^2-1})^2}{p^2-(\sqrt{p^2-1})^2} = 1$

বা, $\frac{(p-\sqrt{p^2-1})^2}{p^2-p^2+1} = 1$

বা, $(p-\sqrt{p^2-1})^2 = 1$

বা, $p - \sqrt{p^2-1} = 1$ [বর্গমূল করে এবং ঋণাত্মক মান বর্জন করে কারণ লগারিদমে ঋণাত্মক মান অসাংজ্ঞায়িত]

বা, $p - 1 = \sqrt{p^2-1}$

বা, $p^2 - 2p + 1 = p^2 - 1$ [বর্গ করে]

বা, $-2p + 1 = -1$

বা, $-2p = -1 - 1 = -2$

বা, p = 1 **(Ans.)**

প্রশ্ন ▶ ২২ $f(x) = 2^{3x+1} - 3.2^{x+1} - 5$; একটি সূচকীয় ফাংশন।

ক. $x = \log_2 y$ হলে $f(x)$ কে y চলক বিশিষ্ট একটি ত্রিঘাত রাশি আকারে প্রকাশ কর এবং $f(y)$ দ্বারা সূচিত কর। ২

খ. দেখাও যে, $y = 2^{\frac{1}{2}} + 2^{-\frac{1}{3}}$ হলে $f(y) = 0$। ৪

গ. $z = y + 1$ হলে z চলক বিশিষ্ট একটি ত্রিঘাত সমীকরণ নির্ণয় কর। ৪

২২নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $f(x) = 2^{3x+1} - 3.2^{x+1} - 5$

$= 2.2^{3x} - 3.2.2^{x} - 5$

$= 2.2^{3x} - 6.2^{x} - 5$

$= 2.2^{3\log_2 y - 6.2^{\log_2 y}} - 5$ [$x = \log_2 y$]

$= 2.2^{\log_2 y^3} - 6.2\log_2 y - 5$

$= 2y^3 - 6y - 5$

প্রাপ্ত রাশিটিকে $f(y)$ দ্বারা প্রকাশ করে পাই,

$f(y) = 2y^3 - 6y - 5$

খ দেওয়া আছে, $y = 2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}$

বা, $y^3 = \left(2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}\right)^3$ [ঘন করে]

বা, $y^3 = 2 + 2^{-1} + 3.2.2^{-1}\left(2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}\right)$

বা, $y^3 = 2 + \frac{1}{2} + 3y$

$\therefore$ আমরা পাই, $f(y) = 2\left(2 + \frac{1}{2} + 3y\right) - 6y - 5$

$f(y) = 4 + 1 + 6y - 6y - 5$

$f(y) = 0$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $z = y + 1$

বা, $z = 2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}} + 1$

বা, $z - 1 = 2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}$

উভয় পক্ষকে ঘন করে পাই,

$(z-1)^3 = \left(2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}\right)^3$

বা, $z^3 - 3z^2 + 3z - 1 = 2 + \frac{1}{2} + 3^{\frac{1}{3}}.2^{\frac{1}{3}}.2^{-\frac{1}{3}}\left(2^{\frac{1}{3}} + 2^{-\frac{1}{3}}\right)$

বা, $z^3 - 3z^2 + 3z - 1 = 2 + \frac{1}{2} + 3(z-1)$

বা, $2z^3 - 6z^2 + 6z - 2 = 4 + 1 + 6z - 6$

$\therefore 2z^3 - 6z^2 - 1 = 0$

$\therefore$ z চলক বিশিষ্ট ত্রিঘাত সমীকরণটি হল, $2z^3 - 6z^2 - 1 = 0$ **(Ans.)**

মাস্টার ট্রেইনার প্রণীত আরও সৃজনশীল রচনামূলক প্রশ্ন : সব অনুশীলনীর সমন্বয়ে

প্রশ্ন ▶ ২৩ দেওয়া আছে, $y = f(x)$, যেখানে $f(x)$, x এর 10 ভিত্তিক লগারিদম।

ক. $f(x)$ = কত এবং এর বিপরীত ফাংশন নির্ণয় কর। ২

খ. $f(x)$ এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

গ. $f(x)$ এর লেখচিত্র আঁক এবং লেখচিত্রের বৈশিষ্ট্য লেখ। ৪

২৩ নং প্রশ্নের সমাধান

ক x এর 10 ভিত্তিক লগারিদম = $\log_{10}x$

$\therefore f(x) = \log_{10}x$

এখন $y = f(x) = \log_{10}x$ হতে

$y = f(x)$

বা, $x = f^{-1}(y)$ ....(i)

এবং $y = \log_{10}x$

বা, $10^y = x$ ....(ii)

(i) ও (ii) নং সমীকরণ হতে পাই $f^{-1}(y) = 10^y$

$\therefore f^{-1}(x) = 10^x$

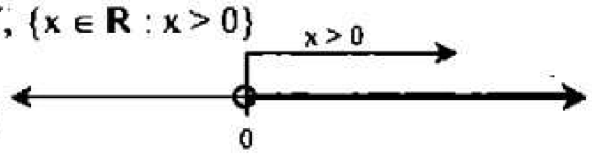
খ 'ক' হতে পাই, $f(x) = \log_{10}x$

যেহেতু, লগারিদম শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়।

$\therefore x > 0$ বা, $\{x \in \mathbf{R} : x > 0\}$

$= (0, \infty)$

সংখ্যারেখা :



$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনটির ডোমেন = $(0, \infty)$

'ক' থেকে পাই $x = 10^y$

এখানে, y-এর সকল বাস্তব মানের জন্য x-এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore f(x)$ এর রেঞ্জ = $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

গ লেখচিত্র: $y = f(x) = \log_{10}x$

যেহেতু ফাংশনটির ডোমেন $(0, \infty)$, সুতরাং এই ডোমেনের মধ্যে x এর কয়েকটি মানের জন্য y-এর মান নির্ণয় করি।

$x = 0$ হলে $y = \log_{10}0 = -\infty$

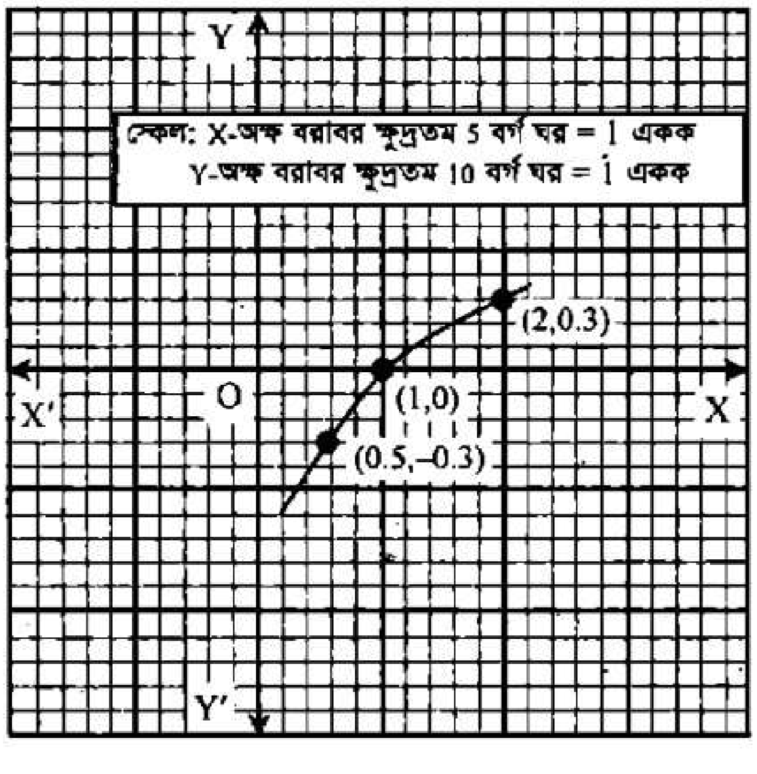
$x = 1$ হলে, $y = \log_{10}1 = 0$

$x = 2$ হলে, $y = \log_{10}2 = 0.30$

$x = 0.5$ হলে $y = \log_{10}0.5 = -0.30$

বিন্দুগুলো হলো (1, 0), (2, 0.30), (0.5, – 0.30).

বিন্দুগুলোকে ছক কাগজে স্থাপন করে লেখচিত্র আঁকি।



লেখচিত্রের বৈশিষ্ট্য:

১. $x \to 0$ হলে y ঋণাত্মক অসীমের দিকে অগ্রসর হয়।

২. $0 < x < 1$ হলে, y-এর মান ঋণাত্মক হয়।

৩. $x = 1$ এর জন্য $y = 0$ অর্থাৎ রেখাটি (1, 0) বিন্দুগামী।

৪. $x > 1$ হলে y এর মান ধনাত্মক অসীমের দিকে অগ্রসর হয়।

প্রশ্ন ▶ ২৪ $\frac{\log_k a}{4} = \frac{\log_k b}{6} = \frac{\log_k c}{3p}$ এবং $a^3b^2c = 1$ হলে,

ক. ১ম শর্ত হতে দেখাও যে, $b^2 = a^3$ ২

খ. ১ম ও ২য় শর্ত হতে p-এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $\log_k ab + \log_k bc + \log_k ca - \log_k ab^{-2}c = \log_k a$ ৪

২৪ নং প্রশ্নের সমাধান

ক ১ম শর্ত হতে

$\frac{\log_k a}{4} = \frac{\log_k b}{6}$

বা, $6 \log_k a = 4 \log_k b$

বা, $\log_k a^6 = \log_k b^4$

বা, $a^6 = b^4$

বা, $(a^6)^{\frac{1}{2}} = (b^4)^{\frac{1}{2}}$

বা, $a^3 = b^2$ **(দেখানো হলো)**

খ 'ক' হতে পাই $a^3 = b^2$

২য় শর্ত হতে পাই, $a^3 b^2 c = 1$

বা, $b^2 . b^2 \ c = 1$

বা, $b^4 c = 1$

বা, $c = \frac{1}{b^4}$

$\therefore c = b^{-4}$

আবার ১ম শর্ত হতে,

$\frac{\log_k b}{6} = \frac{\log_k c}{3p}$

বা, $3p \log_k b = 6 \log_k c$

বা, $\log_k b^{3p} = \log_k c^6$

বা, $b^{3p} = c^6$

বা, $b^{3p} = (b^{-4})^6$

বা, $b^{3p} = b^{-24}$

বা, $3p = -24$

বা, $p = \frac{-24}{3}$

$\therefore p = -8$ **(Ans.)**

গ ধরি, $\frac{\log_k a}{4} = \frac{\log_k b}{6} = \frac{\log_k c}{3p} = m$

$\therefore \log_k a = 4m$

$\log_k{}^b = 6m$

এবং $\log_k c = 3pm = -24m$. ['খ' থেকে $3p = -24$ বসিয়ে]

এখন $\log_k ab + \log_k bc + \log_k ca - \log_k ab^{-2}c$

$= \log_k a + \log_k b + \log_k b + \log_k c + \log_k c + \log_k a - \log_k a - \log_k b^{-2} - \log_k c$

$= 2\log_k b + \log_k a + \log_k c - (-2) \log_k b$

$= 2\log_k b + \log_k a + \log_k c + 2\log_k b$

$= 4\log_k b + \log_k a + \log_k c$

$= 4\log_k b + \log_k a + \log_k b^{-4}$ ['খ' হতে $c = b^{-4}$]

$= 4 \log_k b + \log_k a - 4\log_k b$

$= \log_k a$ **(প্রমাণিত)**

প্রশ্ন ▶ ২৫ দুইটি লগারিদমিক সমীকরণ

$(3y - 2) \log 4 = (x + y) \log 16$ .... (i)

এবং $(x + 2y) \log 3 = (2x + 1) \log 9$ .... (ii)

ক. (i) কে x ও y চলক বিশিষ্ট সরল সমীকরণে প্রকাশ কর। ২

খ. সমীকরণদ্বয় সমাধান কর। ৪

গ. x ও y এর পরমমান যদি যথাক্রমে একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ ও একটি বর্গের এক বাহু হয় তাহলে দেখাও তাদের ক্ষেত্রফলদ্বয়ের অনুপাত π ঃ 1। ৪

২৫ নং প্রশ্নের সমাধান

ক (i) হতে $(3y - 2) \log 4 = (x + y) \log 16$

বা, $\log 4^{3y-2} = \log (4^2)^{x+y}$

বা, $\log 4^{3y-2} = \log 4^{2x+2y}$

বা, $3y - 2 = 2x + 2y$

বা, $3y - 2y - 2 = 2x$

বা, $2x - y = -2$ .... (iii)

খ (ii) হতে $(x + 2y) \log 3 = (2x + 1) \log 9$

বা, $\log 3^{x+2y} = \log (3^2)^{2x+1}$

বা, $\log 3^{x+2y} = \log 3^{4x+2}$

বা, $x + 2y = 4x + 2$

বা, $3x - 2y = -2$ .... (iv)

(iii) × 2 − (iv) হতে

$4x - 2y - (3x - 2y) = -4 - (-2)$

বা, $4x - 2y - 3x + 2y = -4 + 2$

বা, $x = -2$

আবার, (iii) × 3 − (iv) × 2 হতে

$6x - 3y - (6x - 4y) = -6 - (-4)$

বা, $6x - 3y - 6x + 4y = -6 + 4$

বা, $y = -2$

∴ $x = -2, y, = -2$ **(Ans.)**

গ 'খ' থেকে $x = -2, y = -2$

ধরি, বৃত্তের ব্যাসার্ধ r

ও বর্গের প্রতিবাহু a

সুতরাং $r = |x|$ এবং $a = |y|$

বা, $r = |-2|$ এবং $a = |-2|$

$= 2$ $\quad\quad = 2$

তাহলে বৃত্তটির ক্ষেত্রফল $= \pi r^2 = \pi \times 2^2 = 4\pi$ বর্গ একক

ও বর্গটির ক্ষেত্রফল $= a^2 = 2^2 = 4$ বর্গ একক

∴ বৃত্তের ক্ষেত্রফল : বর্গের ক্ষেত্রফল $= 4\pi : 4$

$= \pi : 1$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ২৬ দুটি তথ্য বিবেচনা কর, (i) $b^{5x} = a^{5+x}$ এবং $b^{3x} = a^{3-x}$

(ii) $a = p$ এবং $b = p(1 + p)^{\frac{1}{2x}}$

ক. (i) নং তথ্য থেকে প্রমাণ কর, $\frac{b^{2x}}{a^{2x}} = a^2$ ২

খ. 'ক' থেকে প্রমাণ কর $x \log_k \left(\frac{b}{a}\right) = \log_k a$ এবং ৪

(ii) ব্যবহার করে দেখাও, $\frac{\log_k(1 + p)}{\log_k{}^p} = 2$

গ. প্রাপ্ত $\frac{\log_k(1 + p)}{\log_k p} = 2$ সমীকরণটির সমাধান কর। ৪

২৬ নং প্রশ্নের সমাধান

ক (i) থেকে $b^{5x} = a^{5+x}$ এবং $b^{3x} = a^{3-x}$

∴ $\frac{b^{5x}}{b^{3x}} = \frac{a^{5+x}}{a^{3-x}}$

বা, $b^{5x-3x} = a^{5+x-3+x}$

বা, $b^{2x} = a^{2+2x}$

বা, $b^{2x} = a^2. a^{2x}$

বা, $\frac{b^{2x}}{a^{2x}} = a^2$ **(প্রমাণিত)**

খ 'ক' থেকে $\frac{b^{2x}}{a^{2x}} = a^2$

বা, $\left(\frac{b}{a}\right)^{2x} = a^2$

বা, $\log_k \left(\frac{b}{a}\right)^{2x} = \log_k a^2$ [উভয় পক্ষে $\log_k$ নিয়ে]

বা, $2x \log_k \left(\frac{b}{a}\right) = 2 \log_k a$

∴ $x \log_k \left(\frac{b}{a}\right) = \log_k a$ **(প্রমাণিত)**

(ii) থেকে $a = p$ এবং $b = p(1 + p)^{\frac{1}{2x}}$ বসিয়ে পাই,

$x \log_k \left\{\frac{p(1 + p)^{\frac{1}{2x}}}{p}\right\} = \log_k p$

বা, $x \log_k (1 + p)^{\frac{1}{2x}} = \log_k p$

বা, $x \times \frac{1}{2x} \log_k(1 + p) = \log_k p$

বা, $\frac{1}{2} \log_k(1 + p) = \log_k{}^p$

∴ $\frac{\log_k(1 + p)}{\log_k p} = 2$ **(দেখানো হলো)**

গ 'খ' থেকে $\frac{\log_k(1 + p)}{\log_k p} = 2$

বা, $\log_k(1 + p) = 2 \log_k p$

বা, $\log_k(1 + p) = \log_k p^2$

বা, $1 + p = p^2$ [∵ $\log_k M = \log_k N$ হলে $M = N$]

বা, $p^2 - p - 1 = 0$

বা, $p = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.1.(-1)}}{2.1}$

[$ax^2 + bx + c = 0$ হলে $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$]

বা, $p = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4}}{2}$

∴ $p = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

প্রশ্ন ▶ ২৭ যদি $a = (bc)^{\frac{1}{p}}$, $b = (ca)^{\frac{1}{q}}$ ও $c = (ab)^{\frac{1}{r}}$ হয় তাহলে,

ক. p, q ও r কে a, b ও c এর ফাংশন হিসেবে প্রকাশ কর। ২

খ. প্রমাণ কর, $\frac{1}{p + 1} + \frac{1}{q + 1} + \frac{1}{r + 1} = 1$ ৪

গ. $x = p + 1, y = q + 1, z = r + 1$ এবং $b = c$ হলে দেখাও যে, $\frac{2xy + 3yz + 4zx}{xyz} = 3$ ৪

২৭ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $a = (bc)^{\frac{1}{p}}$

বা, $a^p = \left\{(bc)^{\frac{1}{p}}\right\}^p$ [উভয় পাশে p-তম ঘাত নিয়ে]

বা, $a^p = bc$

বা, $p = \log_a bc$ [সূত্র : $\log_a b = x$ হলে $a^x = b$]

একইভাবে $b = (ca)^{\frac{1}{q}}$ হতে $q = \log_b ca$

$c = (ab)^{\frac{1}{r}}$ হতে $r = \log_c ab$

খ 'ক' হতে, $p = \log_a bc$

বা, $1 + p = 1 + \log_a bc$ [উভয় পক্ষে 1 যোগ করে]

বা, $1 + p = \log_a a + \log_a bc$

$= \log_a abc$ [$\because \log_a M + \log_a N = \log_a MN$]

একইভাবে $1 + q = 1 + \log_b ca = \log_b b + \log_b ca = \log_b abc$

এবং $1 + r = \log_c abc$

এখন, $\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{r+1}$

$= \frac{1}{1+p} + \frac{1}{1+q} + \frac{1}{1+r}$

$= \frac{1}{\log_a abc} + \frac{1}{\log_b abc} + \frac{1}{\log_c abc}$

$= \log_{abc} a + \log_{abc} b + \log_{abc} c$ $\left\{\text{সূত্র: } \log_a b = \frac{1}{\log_b a}\right\}$

$= \log_{abc} a \times b \times c$

$= \log_{abc} abc$

$= 1$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, $x = p + 1$

বা, $x = 1 + p = \log_a abc$ ['খ' হতে]

একইভাবে $y = q + 1 = \log_b abc$

এবং $z = r + 1 = \log_c abc$

এখন, $\frac{2xy + 3yz + 4zx}{xyz} = \frac{2xy}{xyz} + \frac{3yz}{xyz} + \frac{4zx}{xyz}$

$= \frac{2}{z} + \frac{3}{x} + \frac{4}{y}$

$= \frac{2}{\log_c abc} + \frac{3}{\log_a abc} + \frac{4}{\log_b abc}$

$= 2 \log_{abc} c + 3 \log_{abc} a + 4\log_{abc} b$

$= \log_{abc} c^2 + \log_{abc} a^3 + \log_{abc} b^4$

$= \log_{abc} c^2 \times a^3 \times b^4$

$= \log_{abc} (abc)^2 ab^2$

$= \log_{abc} (abc)^2 + \log_{abc} ab^2$

$= 2 \log_{abc} abc + \log_{abc} ab.b$

$= 2 + \log_{abc} abc$ [$\because b = c$]

$= 2 + 1$

$= 3$ **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ২৮ যদি $(\sqrt{8})^p = A = 2^{\frac{q}{2}-1}$ হয় তাহলে,

ক. দেখাও যে, $p = 2\log_8 A$ এবং $q = 2\log_2 2A$ ২

খ. $q - p = 4$ হলে A এর মান নির্ণয় কর। ৪

গ. দেখাও যে, $p + q = \frac{14}{3}$ হলে A এর মান 'খ' থেকে প্রাপ্ত A এর মানের সমান নয়। ৪

২৮ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $(\sqrt{8})^p = A$

বা, $8^{\frac{p}{2}} = A$

বা, $\log_8 A = \frac{p}{2}$ [সূত্র: $\log_a b = x$ হলে $a^x = b$]

বা, $2\log_8 A = p$ **(দেখানো হলো)**

এবং $2^{\frac{q}{2}-1} = A$

বা, $2^{\frac{q}{2}}.2^{-1} = A$

বা, $2^{\frac{q}{2}} \times \frac{1}{2} = A$

বা, $2^{\frac{q}{2}} = 2A$

বা, $\log_2 2A = \frac{q}{2}$ [সূত্র, $\log_a b = x$ হলে $a^x = b$]

$\therefore 2\log_2 2A = q$ **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে, $q - p = 4$

বা, $2\log_2 2A - 2\log_8 A = 4$

বা, $2\log_2 2 + 2\log_2 A - 2\log_8 A = 4$

বা, $2 \times 1 + 2 (\log_2 A - \log_8 A) = 4$

বা $2 (\log_2 A - \log_8 A) = 4 - 2 = 2$

বা, $\log_2 A - \log_8 A = 1$

বা, $\log_2 8. \log_8 A - \log_8 A = 1$

$\left[\log_a b = \frac{\log_k b}{\log_k a};\ \log_k b = \log_a b \times \log_k a\right]$

বা, $\log_8 A \left(\log_2 2^3 - 1\right) = 1$

বা, $\log_8 A (3 \log_2 2 - 1) = 1$

বা, $\log_8 A (3 \times 1 - 1) = 1$

বা, $\log_8 A \times 2 = 1$

বা, $\log_8 A = \frac{1}{2}$

বা, $8^{\frac{1}{2}} = A$

বা, $\sqrt{8} = A$

$\therefore A = \sqrt{2 \times 4} = 2\sqrt{2}$ **(উত্তর)**

গ $p + q = \frac{14}{3}$

বা, $2\log_8 A + 2\log_2 2A = \frac{14}{3}$

বা, $2\log_8 A + 2\log_2 2 + 2\log_2 A = \frac{14}{3}$

বা, $2\log_8 A + 2 \times 1 + 2 \log_2 A = \frac{14}{3}$

বা, $2(\log_8 A + \log_2 A) + 2 = \frac{14}{3}$

বা, $2(\log_8 A + \log_2 8. \log_8 A) = \frac{14}{3} - 2$

বা, $2 (\log_8 A + \log_2 2^3 \log_8 A) = \frac{14-6}{3}$

বা, $(1 + 3 \log_2 2) \log_8 A = \frac{8}{3} \times \frac{1}{2}$

বা, $(1 + 3 \times 1) \log_8 A = \frac{4}{3}$

বা, $4\log_8 A = \frac{4}{3}$

বা, $\log_8 A = \frac{1}{3}$

বা, $A = (8)^{\frac{1}{3}}$

বা, $A = (2^3)^{\frac{1}{3}}$

$\therefore A = 2$

$\therefore$ A এর মান 'খ' এ প্রাপ্ত এর মানের সমান নয়। **(দেখানো হলো)**

প্রশ্ন ▶ ২৯ $f(x) = ln(x-4)$ হলে,

ক. ফাংশনটির বিপরীত ফাংশন নির্ণয় কর। ২

খ. $f(x)$ এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

গ. $f(x)$ ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং এর বৈশিষ্ট্য লেখ। ৪

২৯ নং প্রশ্নের সমাধান

ক দেওয়া আছে, $f(x) = \ln(x-4)$

ধরি, $y = f(x) = \ln(x-4)$

$\therefore y = f(x)$ এবং $y = ln(x-4)$

বা, $x = f^{-1}(y)$ বা, $e^y = x - 4$ .... (i)

বা, $x = e^y + 4$ ....(ii)

(i) ও (ii) থেকে $f^{-1}(y) = e^y + 4$

$\therefore f^{-1}(x) = e^x + 4.$

খ যেহেতু লগারিদমিক শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়।

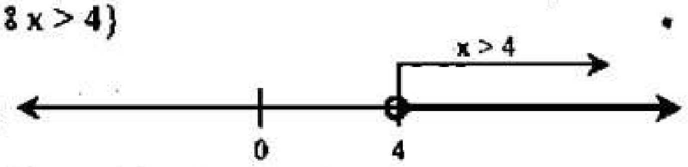
$\therefore x - 4 > 0$

বা, $x > 4$

বা, $\{x \in \mathbb{R} : x > 4\}$

$= (4, \infty)$

সংখ্যারেখা :



$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন $= (4, \infty)$

আবার 'ক' হতে পাই, $x = e^y + 4$

y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ $= \mathbb{R}$.

গ লেখচিত্র: $y = f(x) = ln(x-4)$

যেহেতু ফাংশনটির ডোমেন $(4, \infty)$, সুতরাং ডোমেনের মধ্যে x এর কয়েকটি মানের জন্য y এর মান নির্ণয় করি (ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে)।

$x = 5$ হলে, $y = \ln(5-4) = \ln 1 = 0$

$x = 4.5$ হলে $y = \ln(0.5) = -0.693$

$x = 6$ হলে $y = \ln 2 = 0.693$

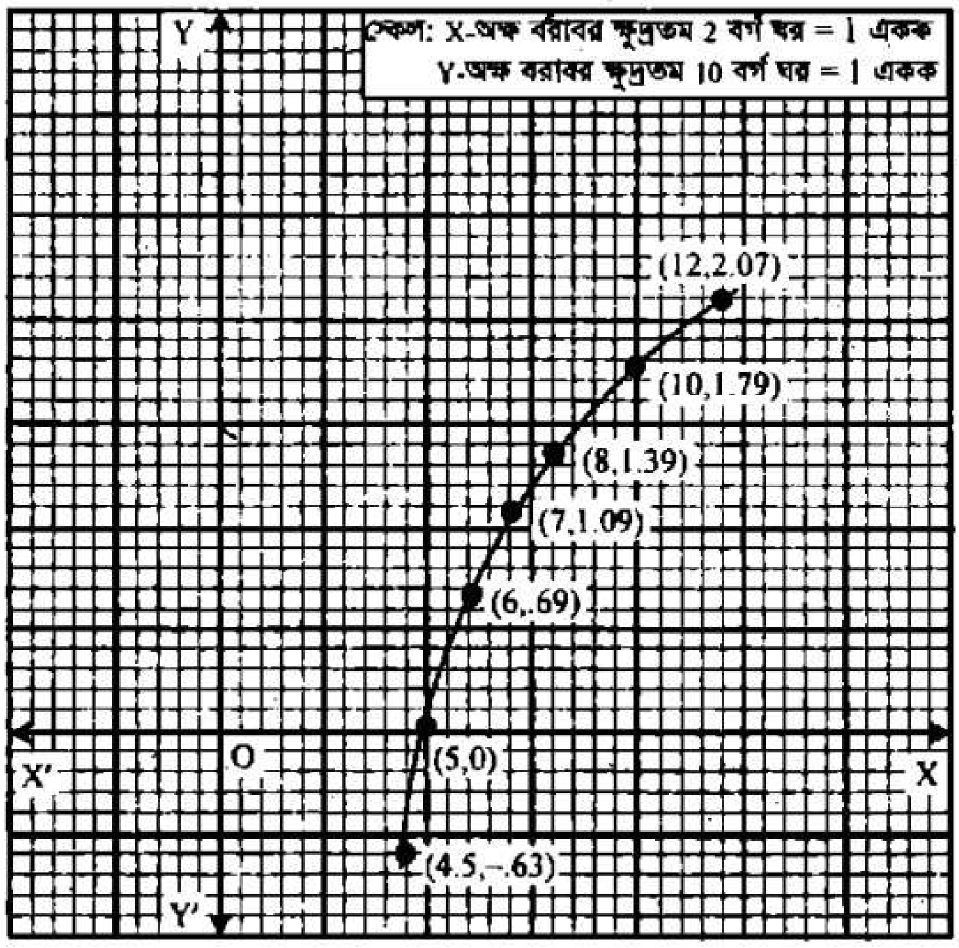
$x = 7$ হলে $y = \ln(7-4) = 1.09$

$x = 8$ হলে $y = \ln(8-4) = 1.39$

$x = 10$ হলে $y = \ln(10-4) = 1.79$

$x = 12$ হলে $y = \ln(12-4) = 2.07$

প্রাপ্ত বিন্দুগুলো গ্রাফ কাগজে স্থাপন করে সংযোগ করলে $f(x)$ এর লেখচিত্র আঁকলে তা নিম্নরূপ:



স্কেল: X-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 2 বর্গ ঘর = 1 একক
Y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 10 বর্গ ঘর = 1 একক

লেখচিত্রটির ধর্ম :

1. x-এর সকল মান 4 থেকে বড়।
2. $x = 5$ এর জন্য $y = \ln(5-4) = \ln 1 = 0$ অর্থাৎ রেখাটি x-অক্ষকে (5, 0) বিন্দুতে ছেদ করে।
3. $x > 5$ হলে x-এর সকল মানের জন্য y ধনাত্মক।
4. $4 < x < 5$ হলে y ঋণাত্মক।
5. $x \to 4$ হলে y এর মান ক্রমাগত ঋণাত্মক অসীমের দিকে অগ্রসর হয় অর্থাৎ $y \to -\infty$

প্রশ্ন ব্যাংক উত্তরসহ সৃজনশীল রচনামূলক প্রশ্ন

প্রশ্ন ▶ ৩০ $\dfrac{ab \log_k(ab)}{a+b} = \dfrac{bc \log_k(bc)}{b+c} = \dfrac{ca \log_k(ca)}{c+a} = m$

ক. $\log_k(ab)$ এবং $\log_k(bc)$ এর মান কত ?

খ. প্রমাণ কর যে, $c^c = k^m$

গ. প্রমাণ কর যে, $a^a = b^b = c^c$

উত্তর: ক. $\dfrac{m(a+b)}{ab}, \dfrac{m(b+c)}{bc}$

প্রশ্ন ▶ ৩১ $\log_4 x = a$ এবং $\log_2 y = b$

ক. x এবং y এর মান নির্ণয় কর।

খ. xy এবং $\dfrac{x}{y}$ কে 2 এর শক্তিরূপে প্রকাশ কর।

গ. যদি $xy = 128$ এবং $\dfrac{x}{y} = 4$ হয়, তবে a এবং b এর মান নির্ণয় কর।

উত্তর: ক. $2^{2a}, 2^b$ **খ.** $xy = 2^{2a+b}, \dfrac{x}{y} = 2^{2a-b}$; **গ.** $\dfrac{9}{4}, \dfrac{5}{2}$

প্রশ্ন ব্যাংক উত্তরসহ সৃজনশীল রচনামূলক প্রশ্ন : সব অনুশীলনীর সমন্বয়ে

প্রশ্ন ▶ ৩২ $a^{3-x} b^{5x} = a^{5+x}.b^{3x}$ এবং $\dfrac{\log_k(1+x)}{\log_k x} = 2$

ক. $\dfrac{a^{5+x}}{a^{3-x}}$ কে সরল কর।

খ. দেখাও যে, $x \log_k \left(\dfrac{b}{a}\right) = \log_k a$

গ. দ্বিতীয় শর্ত থেকে দেখাও যে, $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

উত্তর: ক. a^{2x+2}

প্রশ্ন ▶ ৩৩ $f(x) = 5^{-x+1}, x \in \mathbb{R}$ [সাতক্ষীরা সরকারি মাধ্যমিক বালিকা উচ্চ বিদ্যালয়]

ক. প্রমাণ কর যে, $\dfrac{5p}{5q} = \dfrac{1}{5^{q-p}}$, p, q ∈ N এবং p < q ২

খ. f(x) এর বিপরীত ফাংশনকে $\log\left(\dfrac{a}{b}\right)$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। ৪

গ. ফাংশনটির রেঞ্জ নির্ণয় কর। ৪

উত্তর: খ. $f^{-1}(x) = \dfrac{\log\left(\dfrac{5}{4}\right)}{\log 5}$; **গ.** রেঞ্জ $(0, \infty)$

প্রশ্ন ▶ ৩১ $\frac{\log_k a}{b-c} = \frac{\log_k b}{c-a} = \frac{\log_k c}{a-b}$ [ইস্পাহানি পাবলিক স্কুল এন্ড কলেজ, চট্টগ্রাম]

ক. abc এর মান কত? ২

খ. প্রমাণ কর যে, $a^a.b^b.c^c = 1$ ৪

গ. প্রমাণ কর যে, $a^{b+c}.b^{c+a}.c^{a+b} = 1$ ৪

উত্তর: ক. 1

internet linked

প্রশ্ন ব্যাংকের আরও প্রশ্ন ও উত্তরের জন্যে নিচের ওয়েব অ্যাড্রেসটি টাইপ করুন

ssc.panjeree.com/hmt/hm09qbs.pdf

REVISION

এ অংশে অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ তথ্য ও সূত্র, পরীক্ষার আগে যার উপর চোখ বুলিয়ে নেওয়া প্রয়োজন বা অবশ্যই মনে রাখতে হবে এমন বিষয়সমূহ একনজরে উল্লেখ করা হয়েছে। পরীক্ষার আগে এ বিষয়গুলো রিভিশন দিলে পরীক্ষায় নির্ভুলভাবে অঙ্ক সমাধান করতে পারবে।

- logos এবং arithmas দুটি গ্রিক শব্দ হতে লগারিদম শব্দের উৎপত্তি। logos অর্থ আলোচনা, arithmas অর্থ সংখ্যা অর্থাৎ বিশেষ সংখ্যা নিয়ে আলোচনা।
- যদি $a^x = b$ হয়, যেখানে $a > 0$, $a \neq 1$, তবে x কে বলা হয় b এর a ভিত্তিক লগারিদম অর্থাৎ $x = \log_a b$
- $x = \log_a b$ হয় তবে $a^x = b$; b কে ভিত্তি a এর সাপেক্ষে x এর প্রতিলগ বলে।
- কোনো ঋণাত্মক সংখ্যার লগারিদম নির্ণয় করা যায় না।
- $a > 0$, $a \neq 1$ এবং $b \neq 0$ হলে b এর অনন্য a ভিত্তিক লগারিদমকে $\log_a{}^b$ দ্বারা সূচিত করা হয়।
- **লগারিদমের সূত্রাবলি:**
  ১. $\log_a a = 1$ এবং $\log_a 1 = 0$
  ২. $\log_a (M \times N) = \log_a M + \log_a N$
  ৩. $\log_a \left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$
  ৪. $\log_a (M)^N = N\log_a M$
  ৫. $\log_a M = \log_b M \times \log_a b$
- যদি $x > 0$, $y > 0$ এবং $a \neq 1$ তখন $x = y$; যদি এবং কেবল যদি $\log_a x = \log_a y$
- যদি $a > 1$, $x > 1$ হয় তবে $\log_a x > 0$
- যদি $0 < a < 1$ এবং $0 < x < 1$ হয়, তবে $\log_a x > 0$
- যদি $a > 1$ এবং $0 < x < 1$ হয়, তবে $\log_a x < 0$
- কোনো ফাংশনকে জ্যামিতিকভাবে প্রতিস্থাপনই ঐ ফাংশনের লেখচিত্র।
- $f(x) = a^x$; x এর সকল মানের জন্য সংজ্ঞায়িত যেখানে $a > 0$ এবং $a \neq 1$
- $f(x) = e^x$; x এর সকল মানের জন্য সংজ্ঞায়িত।
- $f(x) = ln x$; শুধু $x > 0$ এর জন্য সংজ্ঞায়িত।
- $\frac{1}{0} = \infty$ কিন্তু $\frac{1}{\infty} = 0$ অর্থাৎ 0(শূন্য) দ্বারা কোনো সংখ্যাকে ভাগ করলে তা অসংজ্ঞায়িত। আবার কোনো সংখ্যাকে ইনফিনিটি (∞) দ্বারা ভাগ করলে ভাগফল শূন্য হবে।
- বাস্তব সংখ্যা x এর মান শূন্য, ধনাত্মক বা ঋণাত্মক কিন্তু x এর পরমমান সবসময়ই শূন্য বা ধনাত্মক। একে |x| দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
- পরমমান ফাংশন, $x \in \mathbb{R}$, হয়, তবে $|x| = \begin{cases} x \text{ যখন } x > 0 \\ 0 \text{ যখন } x = 0 \\ -x \text{ যখন } x < 0 \end{cases}$
- পরমমান ফাংশন $f(x) = |x|$ এর ডোমেন $= \mathbb{R}$, রেঞ্জ $= [0, \infty]$

SUGGESTION

এখানে অধ্যায়টির অনুশীলনী, বহুনির্বাচনি ও সৃজনশীল প্রশ্নগুলো বিশ্লেষণ করে স্টার মার্কসহ সাজেশন দেওয়া হয়েছে। পরীক্ষার আগে অবশ্যই এ অঙ্কগুলো সমাধান করবে। তাহলে পরীক্ষায় যেকোনো অঙ্কের সমাধান সহজেই করতে পারবে।

সাজেশন | বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

	প্রশ্ন নম্বর
★★★	৫, ৬, ৭, ৯, ১৫, ১৮, ১৯, ২০, ২৮, ২৯, ৩৩, ৩৪, ৩৫, ৩৮, ৪২, ৪৩, ৪৫, ৪৮, ৪৯, ৫০, ৫১, ৫২, ৫৩, ৬৪, ৬৫, ৬৬, ৬৭, ৬৮, ৭২, ৭৩, ৭৪
★★	২, ৮, ১০, ১৪, ১৬, ১৭, ২১, ২২, ২৪, ২৫, ২৬, ২৭, ৩৭, ৩৯, ৪৭, ৫৮, ৫৯, ৬০, ৭০/ ৭১

সাজেশন | সৃজনশীল রচনামূলক প্রশ্ন

	প্রশ্ন নম্বর
★★★	৪, ৬, ৭, ৮, ৯, ১০, ১৩, ১৫, ১৭, ১৮, ১৯, ২৩, ২৪, ২৭, ২৮, ২৯
★★	২, ৩, ৫, ১১, ১৬, ২৫, ২৬