Question Type-01: ম্যাট্রিক্সের প্রকারভেদ সংক্রান্ত

➲ **Formula & Concept:** এখানে বিভিন্ন প্রকার ম্যাট্রিক্সের সংজ্ঞা ও বৈশিষ্ট্যগুলো ব্যবহার করতে হবে।

MCQ

01. Matrix $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$ এর নাম- **[BUTEX'14-15]**

(a) প্রতিসম (b) Transpose (c) ব্যতিক্রমী (d) Scalar

সমাধান: (a); যে Matrix এর কলাম এবং সারি inter-change করলে Matrix অপরিবর্তিত থাকে। তাকে প্রতিসম Matrix বলে।

Question Type-02: ম্যাট্রিক্সের যোগ-বিয়োগ ও গুণ সংক্রান্ত সমস্যা

➲ **Formula & Concept:**

- দুইটি ম্যাট্রিক্স যোগ-বিয়োগ করা যাবে যদি ম্যাট্রিক্স দুটির ক্রম (order) সমান থাকে। দুটি ম্যাট্রিক্সের একই স্থানের ভুক্তিগুলো যোগ বা বিয়োগ করে যেই ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায় তাই যোগফল বা বিয়োগফল।
- একটি ম্যাট্রিক্সের সাথে কোনো সংখ্যা গুণ করা হলে, ম্যাট্রিক্সের সবগুলো ভুক্তির সাথে সংখ্যাটি গুণ হয়ে যাবে।

$$k\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \\ kg & kh & ki \end{bmatrix}$$

- দুইটি ম্যাট্রিক্স গুণ করা যাবে যদি প্রথমটির কলাম সংখ্যা দ্বিতীয়টির সারি সংখ্যার সমান হয়। A এর ক্রম $m \times n$ এবং B এর ক্রম $n \times p$ হলে, AB নির্ণয়যোগ্য কিন্তু BA নির্ণয়যোগ্য নয়। AB গুণফল ম্যাট্রিক্সটির ক্রম হবে $= m \times p$

$$A \times B = C$$

$m \times \boxed{n \quad n} \times p$ → A এর Column সংখ্যা = B এর Row এর সংখ্যা

$m \times p$ (C এর ক্রম)

- দুইটি ম্যাট্রিক্স $A_{m\times n}$ ও $B_{n\times p}$ এর গুণন করে C ম্যাট্রিক্স পেলে $C_{m\times p}$ এর ভুক্তিগুলো এমন যে, $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \times b_{kj}$

MCQ

01. X ম্যাট্রিক্সটি বের কর যখন $2X + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$. **[CKRUET'21-22]**

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} -2 & -6 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$

সমাধান: (a); $2X + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow 2X = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \therefore X = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

02. Given the matrix, $A = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, what is the resultant matrix A^n? **[IUT'21-22]**

(a) $\begin{bmatrix} 1 & n^n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & n^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} n & n \\ 0 & n \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} n & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Solution: (b); $A = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ Using calculator, $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ [let $n = 3$]; $A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 3n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 4n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore A^n = \begin{bmatrix} 1 & n.n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & n^2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

03. Given $A = \begin{bmatrix} x+y & -6 \\ ab & 7 \end{bmatrix}$ and $B = \begin{bmatrix} -3 & a+b \\ -9 & x+y \end{bmatrix}$, where $A^T + B^T = I$. What are the values of a and b?

(a) $3, -3$ (b) $-3, -3$ (c) $3, 3$ (d) $-3, 3$ **[IUT'21-22]**

Solution: (c); $A^T + B^T = \begin{bmatrix} x+y & ab \\ -6 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -9 \\ a+b & x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y-3 & ab-9 \\ -6+a+b & 7+x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore a+b-6=0; ab-9=0 \therefore a+b=6;$ $ab = 9$ Solving we get, $a = b = 3$

04. If $2\begin{bmatrix}3 & 4\\5 & x\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & y\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 0\\10 & 5\end{bmatrix}$, then what is the value of $(x-y)$? [IUT'20-21]

(a) -8 (b) 2 (c) 10 (d) -6

Solution: (c); $2\begin{bmatrix}3 & 4\\5 & x\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & y\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 0\\10 & 5\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}6 & 8\\10 & 2x\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & y\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 0\\10 & 5\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}7 & 8+y\\10 & 2x+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 0\\10 & 5\end{bmatrix}$

$\therefore 8+y=0 \therefore y=-8 \quad \therefore 2x+1=5\Rightarrow x=2 \therefore x-y=2-(-8)=10$

05. A, B এবং C ম্যাট্রিক্সগুলোর মাত্রা যথাক্রমে $4\times5,\ 5\times4$ এবং 4×2 হলে $(A^T+B)C$ ম্যাট্রিক্সের মাত্রা হবে- [BUET'10-11, BUTEX' 15-16, IUT'18-19]

(a) 5×4 (b) 4×2 (c) 5×2 (d) 2×5

সমাধান: (c); A^T এর মাত্রা 5×4; (A^T+B) এর মাত্রা 5×4 $\therefore (A^T+B)C$ এর মাত্রা 5×2

06. If $\begin{bmatrix}a & b\\a_1 & b_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -5\\-1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\2 & 0\end{bmatrix}$, then the values of a and b are- [IUT'17-18]

(a) a = 1 and b = 2 (b) a = 2 and b = 3 (c) a = 2 and b = 5 (d) a = 3 and b = 8

Solution: (a) ; $\begin{bmatrix}a & b\\a_1 & b_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -5\\-1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\2 & 0\end{bmatrix}, 3a-b=1\ldots(i)\ -5a+2b=-1\ldots.(ii)$

(i) & (ii) $\Rightarrow a=1\ \&\ b=2$

07. If $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\a & b\end{bmatrix}$ and $A^2=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$, then the values of a and b are: [IUT'16-17]

(a) 2 and 1 (b) -2 and -1 (c) $-\frac{1}{2}$ and -1 (d) $\frac{1}{2}$ and 1

Solution: (c); $A^2=\begin{bmatrix}1+2a & 2+2b\\a+ab & 2a+b^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$; $\begin{matrix}1+2a & 2+2b=0\\a=-\frac{1}{2} & b=-1\end{matrix}$

08. তিনটি ম্যাট্রিক্স $[x\ \ y]\begin{bmatrix}a & h\\h & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ এর গুণফলের মান হবে- [BUET'12-13]

(a) $[x^2a+xyh\quad xyh+y^2b]$ (b) $[x^2a+2xyh+y^2b]$

(c) $\begin{bmatrix}x^2a+xyh\\xyh+y^2b\end{bmatrix}$ (d) $[2x^2a+xyh+2y^2b]$

সমাধান: (b); $[x\ \ y]\begin{bmatrix}a & h\\h & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=[ax+hy\quad hx+by]\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=[ax^2+hxy+hxy+by^2]=[x^2a+2xyh+y^2b]$

শর্টকাট: a, b, h, x, y এর ইচ্ছেমত মান নিয়ে তা নিয়ে calculator এ calculate কর।

09. যদি C = AB হয় যেখানে, $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 2 & 1\\1 & 1 & 2\end{bmatrix}$ ও $B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\1 & 2 & 3\\3 & 2 & 1\end{bmatrix}$ তবে C এর আকার হলো [KUET'12-13]

(a) $\begin{bmatrix}9 & 14 & 10\\7 & 10 & 14\\6 & 9 & 7\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}7 & 7 & 10\\9 & 8 & 9\\12 & 9 & 11\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}6 & 10 & 10\\6 & 9 & 11\\8 & 11 & 13\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}12 & 11 & 11\\8 & 9 & 13\\8 & 7 & 7\end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix}12 & 8 & 8\\11 & 9 & 7\\11 & 13 & 7\end{bmatrix}$

সমাধান: (d);$C=AB=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 2 & 1\\1 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\1 & 2 & 3\\3 & 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+2+9 & 1+4+6 & 2+6+3\\3+2+3 & 3+4+2 & 6+6+1\\1+1+6 & 1+2+4 & 2+3+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12 & 11 & 11\\8 & 9 & 13\\8 & 7 & 7\end{bmatrix}$

10. যদি $AX=\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y\\-x\end{bmatrix}$ হয়, তবে XA^2 হবে- [BUET'11-12]

(a) $\begin{bmatrix}-x\\-y\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}x\\-y\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}-y\\-x\end{bmatrix}$ (d) None of these

সমাধান: (d); $X=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}$; A^2 এর মাত্রা 2×2; X এর মাত্রা 2×1 $\therefore$ X ও A^2 এর গুণ করা সম্ভব নয়।

11. যদি $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ এবং $|A^2|=1$ হয় তবে θ এর মান কত? [KUET'11-12]

(a) $\theta=0^0$ (b) $\theta=45^0$ (c) $\theta=0^0$and 45^0 (d) None of these

সমাধান: (c); Using calculator.

12. $\begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 2\\2 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 1\\2 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x & -1\\-1 & z\\y & -3\end{bmatrix}$. x, y এবং z এর মান হবে- [RUET'10-11]

(a) 1, 2, 3 (b) 3, 4, 3 (c) $3,-3,4$ (d) $-1,2,3$ (e) None

সমাধান: (b); $\begin{bmatrix}1 & 0\\-1 & 2\\2 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 1\\2 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1\\-1 & 3\\4 & -3\end{bmatrix}$

13. দুটি ম্যাট্রিক্স A এবং B দেয়া আছে। AB ও BA এর মধ্যে কোন সম্পর্ক থাকলে তা নির্ণয় কর। B^{-1} কে x ও A এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

[BUET'19-20]

$$A = \begin{bmatrix} 3x & -4x & 2x \\ -2x & x & 0 \\ -x & -x & x \end{bmatrix} \text{ এবং } B = \begin{bmatrix} x & 2x & -2x \\ 2x & 5x & -4x \\ 3x & 7x & -5x \end{bmatrix}$$

সমাধান: $AB = \begin{bmatrix} 3x & -4x & 2x \\ -2x & x & 0 \\ -x & -x & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 2x & -2x \\ 2x & 5x & -4x \\ 3x & 7x & -5x \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot x \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 3 & 7 & -5 \end{bmatrix}$

$= x^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \end{bmatrix}$

অনুরূপভাবে, $BA = \begin{bmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \end{bmatrix} \therefore AB = BA$

$\therefore BA = x^2 I \Rightarrow \frac{1}{x^2} A = B^{-1} I \Rightarrow B^{-1} = \frac{A}{x^2} = \begin{bmatrix} \frac{3}{x} & -\frac{4}{x} & \frac{2}{x} \\ -\frac{2}{x} & \frac{1}{x} & 0 \\ -\frac{1}{x} & -\frac{1}{x} & \frac{1}{x} \end{bmatrix} \therefore B^{-1} = \frac{A}{x^2}$

14. যদি $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ এবং $A^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$; θ এর মান নির্ণয় কর। **[CUET'09-10]**

সমাধান: $A^2 = AA = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ 2\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$

আবার, $A^2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \therefore \cos 2\theta = \frac{1}{2}$

$\therefore \cos 2\theta = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow 2\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} \therefore \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$ (Ans.)

15. কখন দুইটি ম্যাট্রিক্স গুণনের জন্য উপযোগী হবে? **[BUTEX'09-10]**

সমাধান: যদি প্রথম ম্যাট্রিক্সের কলাম সংখ্যা, ২য় ম্যাট্রিক্সের সারির সংখ্যার সমান হয়।

16. যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ হয়, মান নির্ণয় করঃ $A^2 - 4A - 5I$. **[CUET'05-06]**

সমাধান: $A.A = A^2 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+4+4 & 2+2+4 & 2+4+2 \\ 2+2+4 & 4+1+4 & 4+2+2 \\ 2+4+2 & 4+2+2 & 4+4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

$A^2 - 4A - 5I = \begin{bmatrix} 9 & 8 & 8 \\ 8 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 8 & 8 \\ 8 & 4 & 8 \\ 8 & 8 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 9-4-5 & 8-8-0 & 8-8-0 \\ 8-8-0 & 9-4-5 & 8-8-0 \\ 8-8-0 & 8-8-0 & 9-4-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(Ans.)**

17. যদি $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ এবং $C = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, হয় তবে দেখাও যে, (AB) C = A (BC).

সমাধান: $AB = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-0 & 6-2 & 9-10 \\ 1-0 & 2-2 & 3-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & -7 \end{pmatrix}$ **[CUET'04-05]**

$$BC = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-6+0 \\ 0-3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{L.H.S} \Rightarrow (AB)\,C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-12-0 \\ 2-0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \text{R.H.S} \Rightarrow A\,(BC) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12+6 \\ -4+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ L.H.S = R.H.S $\therefore$ (AB) C = A (BC) (Showed)

18. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2i \\ 0 & -2i & 0 \\ 2i & 0 & 0 \end{bmatrix}$, দেখাও যে, $A^2 + 4I = 0$, I একটি একক ম্যাট্রিক্স। **[CUET'03-04]**

সমাধান: $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2i \\ 0 & -2i & 0 \\ 2i & 0 & 0 \end{bmatrix} \therefore A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2i \\ 0 & -2i & 0 \\ 2i & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2i \\ 0 & -2i & 0 \\ 2i & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

$$\therefore A^2 + 4I = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 + 4I = 0 \text{ (Showed)}$$

Question Type-03: ম্যাট্রিক্স এর ভুক্তি নির্ণয় সংক্রান্ত

Formula & Concept:

যদি অজানা ম্যাট্রিক্সের মাত্রা দেয়া না থাকে তাহলে প্রথমে মাত্রা বের করে নিতে হবে। এরপর x, y, z ইত্যাদি বসিয়ে ঐ মাত্রার অজানা ম্যাট্রিক্স গঠন করতে হবে। এরপর প্রশ্নে উল্লিখিত শর্ত অনুসারে সমাধান করে x, y, z ইত্যাদির মান বের করে ম্যাট্রিক্সটি নির্ণয় করতে হবে।

01. যদি $P = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$ এবং $P \times Q = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ হয় তবে ম্যাট্রিক্স Q কত? **[RUET'14-15]**

(a) $\begin{bmatrix} 2 \\ 0.5 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 16 & -2 \\ 0.5 & 3 \end{bmatrix}$ (c) $[0.5 \quad -2]$ (d) $\begin{bmatrix} -16 & 2 \\ 3 & 0.5 \end{bmatrix}$ (e) None

সমাধান: (a); P একটি 2×2 ম্যাট্রিক্স এবং $P \times Q$ একটি 2×1 ম্যাট্রিক্স $\therefore$ Q-এর মাত্রা হবে 2×1.

ধরি, $Q = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \therefore PQ = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x-6y \\ -2x+8y \end{bmatrix}$

$\therefore$ শর্তমতে, $\begin{bmatrix} 4x-6y \\ -2x+8y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\therefore 4x - 6y = 5$.........(i); $-2x + 8y = 0$........(ii)

(i) & (ii) $\Rightarrow x = 2;\ y = 0.5 \ \therefore Q = \begin{bmatrix} 2 \\ 0.5 \end{bmatrix}$

02. If $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ and $AB = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 16 & 17 \end{bmatrix}$, then B =? **[IUT'14-15]**

(a) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Solution: (b); $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$

$$B = A^{-1} \cdot AB = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 16 & 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

03. Given $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ and $AB = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$, which one of the following is matrix B? [IUT'11-12]

(a) $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ (d) [-1 2 1]

Solution: (d); Only (d) has its number of rows equal to the number of columns of matrix A.

As a general solution, Let, $B = [x \quad y \quad z]$ $\therefore \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} [x \quad y \quad z] = \begin{bmatrix} x & y & z \\ 2x & 2y & 2z \\ 3x & 3y & 3z \end{bmatrix}$

Now, comparing this with AB we get, $B = [-1 \quad 2 \quad 1]$

04. যদি $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $AB = \begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ হয়, তাহলে B ম্যাট্রিক্সটি নির্ণয় কর। [BUTEX'21-22]

সমাধান: $AB = \begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow (A^{-1}A)B = A^{-1}\begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow B = \frac{1}{4-6}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ **(Ans.)**

05. যদি $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ এবং $ABC = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ হয়, তাহলে B=? [BUET'20-21]

সমাধান: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$, $ABC = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

এখানে ABC=ABC

$\Rightarrow A^{-1}.ABC.C^{-1} = A^{-1}.(ABC).C^{-1} \Rightarrow 1.B.1 = A^{-1}.(ABC).C^{-1}$

$\therefore B = A^{-1}.(ABC).C^{-1}$ $\therefore B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -7 & 9 \\ 12 & -14 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 & 11 \\ -46 & -16 \end{bmatrix}$

এখানে,

$A^{-1} = \frac{1}{4-3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

$C^{-1} = \frac{1}{4-5}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

06. যদি $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} -4 & 8 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ হয়, তাহলে A ম্যাট্রিক্সটি নির্ণয় কর। [BUET'17-18]

সমাধান: ধরি, $B = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} -4 & 8 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$; সুতরাং $B \times A = C$

এখন, B এর ক্রম $= 3 \times 1$; C এর ক্রম $= 3 \times 3$

সুতরাং, A এর ক্রম $= 1 \times 3$ $[\because B_{(3\times1)} \times A_{(1\times3)} = C_{(3\times3)}]$

ধরি, $A = [x \quad y \quad z]$

$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \times [x \quad y \quad z] = \begin{bmatrix} -4 & 8 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ ……… (i)

(i) নং সমীকরণ থেকে পাই, $4x = -4 \Rightarrow x = -1; 4y = 8 \Rightarrow y = 2; 4z = 4 \Rightarrow z = 1$

সুতরাং নির্ণেয় $A = [x \quad y \quad z] = [-1 \quad 2 \quad 1]$

07. যদি $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $AB = \begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ হয় তবে B ম্যাট্রিক্স এর উপাদানসমূহ বের কর। **[BUET'16-17, RUET'09-10]**

সমাধান: ধরি, $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

এখন, $AB = \begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4a+3c & 4b+3d \\ 2a+c & 2b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$

$\therefore 4a + 3c = 10 \quad 4b + 3d = 17$

$2a + c = 4 \quad 2b + d = 7$

সমাধান করে পাই, $\begin{matrix} a = 1 & b = 2 \\ c = 2 & d = 3 \end{matrix} \quad \therefore B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

বিকল্প: $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

এখন, $AB = \begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 4 & 17 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1}.AB = A^{-1}.\begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow I.B = B = A^{-1}.\begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}; \left[\because \begin{matrix} A^{-1}.A = I \\ I.B = B \end{matrix}\right]$

$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

08. $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ এবং $AB = \begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$, B ম্যাট্রিক্স নির্ণয় কর। **[RUET'09-10]**

সমাধান: এখানে, $A^{-1} = \frac{1}{4-(2\times3)}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

তারপর, $A^{-1}(AB) = (A^{-1}A)B = (I)B = B$

$\Rightarrow B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 & 17 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow B = \begin{bmatrix} -5+6 & -\frac{17}{2}+\frac{21}{2} \\ 10-8 & 17-14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (Ans.)

09. I অভেদক ম্যাট্রিক্স হলে B ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করঃ $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}B = I; I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ **[RUET'03-04]**

সমাধান: Let, $B = \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}$

$\therefore \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4w+3y & 4x+3z \\ 2w+y & 2x+z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\therefore 4w + 3y = 1$
$2w + y = 0$
$4x + 3z = 0$
$2x + z = 1$

অর্থাৎ, $w = \frac{-1}{2}, x = \frac{3}{2}, y = 1, z = -2$ [সমাধান করে] $\therefore \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 3/2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ (Ans.)

[বিঃদ্রঃ $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সের Inverse Matrix ই হচ্ছে B। এভাবেও অংকটি করা যায়।]

Question Type -04: নির্ণায়কের অনুরাশি ও সহগুণক সংক্রান্ত

Formula & Concept: মনে করি, $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

- a_1 এর অনুরাশি নির্ণয়ের জন্য a_1 এর সারি এবং কলাম বাদ দিতে হবে এভাবে $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

  এরপর $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের মান $b_2c_3 - b_3c_2$ ই a_1 এর অনুরাশি।

  অর্থাৎ, একটি নির্ণায়কে কোন ভুক্তি যে সারি ও কলামে অবস্থিত, সেই সারি ও কলামকে বাদ দিয়ে যে নির্ণায়কটি পাওয়া যায়, তাকে ঐ ভুক্তির অনুরাশি (Minor) বলে।
- কোনো ভুক্তির সহগুণক = $(-1)^{r+c} \times$ অনুরাশি
- $a_1, b_1, c_1, a_2 \dots\dots$ এর সহগুণককে সাধারণত $A_1, B_1, C_1, A_2 \dots\dots$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।
- a_1 এর সহগুণক, $A_1 = (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} = b_2c_3 - c_2b_3$

  এভাবে প্রত্যেকটির জন্য নির্ণয় করা যাবে।

01. নিম্নের নির্ণায়কে $(-2a)$ এর সহগুণক কত? **[KUET'11-12, RUET'14-15]**

$$\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$$

(a) $(1-a^4)-b^2(4-b^2)$ (b) $2a(1+a^2+b^2)$

(c) $(1+a^2+b^2)^3$ (d) $(1+a^2+b^2)$ (e) $-2a(1+a^2+b^2)$

সমাধান: (e); $(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & -2b \\ 2ab & 2a \end{vmatrix} = (-1)[2a+2a^3-2ab^2+4ab^2] = -2a(1+a^2+b^2)$

Question Type-05: ব্যতিক্রমী, অব্যতিক্রমী এবং ইনভার্স/বিপরীত ম্যাট্রিক্স সংক্রান্ত

Formula & Concept:

➢ A একটি বর্গ ম্যাট্রিক্সের ($n \times n$ আকারের) জন্য, A এর প্রত্যেকটি উপাদানকে A^T এর অনুরূপ উপাদানের সহগুণক দ্বারা (Cofactor) প্রতিস্থাপিত করে যে ম্যাট্রিক্স পাওয়া যায় তা হচ্ছে A ম্যাট্রিক্সের Adjoint ম্যাট্রিক্স। লেখা হয়, adj. A বা adj(A). [অথবা, A এর সহগুণক ম্যাট্রিক্সের ট্রান্সপোজ ম্যাট্রিক্সকে A ম্যাট্রিক্সের Adjoint ম্যাট্রিক্স বলা হয়।]

➢ যে বর্গ ম্যাট্রিক্স-এর নির্ণায়কের মান শূন্য (0), তাকে ব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স (Singular Matrix) বলে।

➢ যে বর্গ ম্যাট্রিক্স-এর নির্ণায়কের মান শূন্য (0) নয়, তাকে অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স (Non-Singular Matrix) বলে।

♦ A একটি বর্গ ($n \times n$ আকারের) ম্যাট্রিক্সের জন্য $AX = XA = I$ হলে X কে A এর Inverse/বিপরীত ম্যাট্রিক্স বলা হয় এবং প্রকাশ করা হয় A^{-1} দ্বারা অর্থাৎ $X = A^{-1} \Rightarrow A(A^{-1}) = (A^{-1})A = I$;

➢ বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয়ের সূত্র: $A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{|A|}$.

➢ বিপরীত ম্যাট্রিক্স থাকার শর্তসমূহঃ A ম্যাট্রিক্সের বিপরীত ম্যাট্রিক্স থাকবে যদি এবং কেবল যদি

(i) A একটি বর্গ ম্যাট্রিক্স হয়

(ii) A একটি অব্যতিক্রমী (Non-singular) ম্যাট্রিক্স হয় (অর্থাৎ $|A| \neq 0$).

➢ বিপরীত ম্যাট্রিক্স নির্ণয়ের ধাপগুলোঃ

(i) ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়কের মান নির্ণয় করা।

(ii) ম্যাট্রিক্সটির বিম্ব/Transpose ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করা [যদি, $|A| \neq 0$ হয়]

(iii) Transpose/বিম্ব ম্যাট্রিক্সটির Adjoint ম্যাট্রিক্স নির্ণয় করা [Adjoint Matrix হলো Transpose Matrix -এর প্রতিটি ভুক্তিকে তার সহগুণক দ্বারা প্রতিস্থাপন করে যে Matrix টি পাওয়া যায়।]

(iv) Adjoint ম্যাট্রিক্সটিকে ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়কের মান দ্বারা ভাগ করা।

Note: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj}(A)$ এবং $A = \frac{1}{|A^{-1}|}\text{adj}(A^{-1})$

♦ **Shortcut:** (2×2) ম্যাট্রিক্স $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ এর জন্য A^{-1} নির্ণয় করতে হলে, a ও d স্থান বিনিময় করবে এবং b ও c এর চিহ্ন পরিবর্তন করতে হবে। যদি ধনাত্মক চিহ্ন থাকে তবে ঋণাত্মক চিহ্ন হবে আর যদি ঋণাত্মক চিহ্ন থাকে তবে ধনাত্মক চিহ্ন হবে। একে ম্যাট্রিক্সটির নির্ণায়কের মান, $(ad-bc)$ দ্বারা ভাগ করতে হবে। $\therefore A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

01. Find the inverse of $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ [IUT'21-22]

(a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -5 & 0 & 0 \\ -3 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -2 \\ 0 & 0 & -4 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 4 & -5 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}$

Solution: (d); [Use Calculator]

02. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 9 \\ 2x & 2 & 6 \\ x^2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ একটি ব্যতিক্রমী ম্যাটিক্স হলে x এর মান নির্ণয় কর। [CKRUET'20-21]

(a) 1, 3 (b) $-1, -3$ (c) 2, 3 (d) $-2, 3$ (e) $-1, 3$

সমাধান: (a); $3(6-18) - 1(6x - 6x^2) + 9(6x - 2x^2) = 0 \Rightarrow -36 - 6x + 6x^2 + 54x - 18x^2 = 0$

$\Rightarrow -12x^2 + 48x - 36 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \therefore x = 3, 1$

03. $\begin{pmatrix} k\sqrt{k} & 2 \\ 2 & \sqrt{k} \end{pmatrix}$ একটি বাস্তব ম্যাট্রিক্স। k এর কোন মানের জন্য ম্যাট্রিক্সটির বিপরীত ম্যাট্রিক্স পাওয়া যাবে না?

[KUET'12-13, SUST'17-18]

(a) -2 (b) 2 (c) ± 2 (d) $\sqrt{2}$ (e) $-\sqrt{2}$

সমাধান: (b); বিপরীত ম্যাট্রিক্স না থাকলে $|A| = 0 \Rightarrow k.k - 4 = 0 \Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k = 2$ [$\sqrt{k}$ থাকায় $k \neq -2$]

04. If $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ and $B = A^{-1}$, then $b_{23} = ?$ [IUT'17-18]

(a) 1 (b) 2 (c) -1 (d) -2

Solution: (c) ; Use calculator.

05. x এর কোন কোন মানের জন্য $\begin{bmatrix} 2-x & 13 \\ 5 & 10-x \end{bmatrix}$ ম্যাট্রিক্সটি একটি ব্যতিক্রমী (singular) ম্যাট্রিক্স হবে? [KUET'16-17]

(a) -15 ও -3 (b) -15 ও 3 (c) 15 ও -3 (d) 13 ও 5 (e) 15 ও 3

সমাধান: (c); $\begin{vmatrix} 2-x & 13 \\ 5 & 10-x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2-x & 13 \\ 5 & 10-x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x^2 - 12x - 45 = 0 \Rightarrow x = 15, -3$

06. If $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ and $AB^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, then a =? [IUT'16-17]

(a) 1 (b) -1 (c) Cannot be found (d) None of these

Solution: (b); $B^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 7 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$; $AB^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ [N.B: There is a slight mistake in the question]

07. যদি $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ ও $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ হয়, তবে $(BA)^{-1}$ এর মান কত? [KUET'15-16]

(a) $\begin{pmatrix} 44 & -1 \\ -31 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 44 & -1 \\ -31 & 1 \end{pmatrix}$ (c) $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} -44 & 1 \\ 31 & -1 \end{pmatrix}$ (d) $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} -31 & 1 \\ 44 & -1 \end{pmatrix}$ (e) $\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 44 & -31 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

সমাধান: (b); $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ $\therefore BA = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 31 & 44 \end{bmatrix}$

$(BA)^{-1} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 44 & -1 \\ -31 & 1 \end{bmatrix}$ [Use Calculator]

08. x-এর কোন মানের জন্য ম্যাট্রিক্স $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, ম্যাট্রিক্স $B = \begin{pmatrix} -x & 14x & 7x \\ 0 & 1 & 0 \\ x & -4x & -2x \end{pmatrix}$ এর বিপরীত হবে?

(a) $\frac{3}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{1}{5}$ (e) $\frac{1}{4}$

সমাধান: (d); Using Calculator, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -0.2 & 2.8 & 1.4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.2 & -0.8 & -0.4 \end{pmatrix} = B$ **[RUET'09-10, KUET'14-15]**

$\therefore -x = -0.2 \Rightarrow x = (0.2) = \frac{1}{5}$

09. A^{-1} নির্ণয় কর: $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$ **[RUET'13-14]**

(a) $\frac{1}{14}\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ (b) $\frac{1}{14}\begin{bmatrix} -6 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\frac{1}{14}\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ (d) $\frac{1}{-14}\begin{bmatrix} -6 & -4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (e) None

সমাধান: (e); $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \therefore A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} -6 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-14}\begin{bmatrix} -6 & -4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

Written

10. যদি $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$ হয়, তাহলে $A^2 + 2A$ এর মান নির্ণয় কর। **[BUET'18-19]**

সমাধান: $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix} \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{7} \neq 0 \therefore$ A বিদ্যমান। $\therefore A = \frac{1}{\frac{1}{7}}\begin{bmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{5}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

$\therefore A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -7 \\ -21 & 28 \end{bmatrix}$; $2A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 10 \end{bmatrix} \therefore A^2 + 2A = \begin{bmatrix} 11 & -9 \\ -27 & 38 \end{bmatrix}$ (Ans.)

Question Type-06: নির্ণায়ক সম্বলিত অভেদ ও মান নির্ণয়

Formula & Concept:

নির্ণায়ক সম্বলিত অভেদ	উদাহরণ
♦ কোনো নির্ণায়কের সারিগুলো এদের অনুরূপ কলামসমূহে পরিবর্তিত হলে এবং কলামগুলো ইহাদের অনুরূপ সারিসমূহে পরিবর্তিত হলে নির্ণায়কের মানের কোনো পরিবর্তন হয় না।	অর্থাৎ $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ বা, $\|A\| = \|A^T\|$
♦ কোনো নির্ণায়কের একটি সারি অথবা কলামের সবগুলো উপাদান শূন্য হলে নির্ণায়কটির মান শূন্য হবে।	যেমনঃ $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$
♦ কোনো নির্ণায়কে পাশাপাশি দুইটি সারি অথবা কলাম পরস্পর স্থান বিনিময় করলে নির্ণায়কের চিহ্ন বদলে যায়।	যেমনঃ $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$; [$r_1$ ও r_2 এর স্থান বিনিময়]
♦ কোনো নির্ণায়কের দুটি সারি অথবা কলামের অনুরূপ উপাদানগুলো অভিন্ন হলে এর মান শূন্য হবে	অর্থাৎ, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = 0$ কারণ, $r_1 \equiv r_3$ এবং $\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$ কারণ $c_1 \equiv c_2$.
♦ কোনো নির্ণায়কের যে কোন সারি অথবা কলামের প্রত্যেক উপাদানকে একই রাশি দ্বারা গুণ করলে নির্ণায়কটির মানও ঐ রাশি দ্বারা গুণ হয়।	অর্থাৎ, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & kb_2 & kc_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

নির্ণায়ক সম্বলিত অভেদ	উদাহরণ
◆ নির্ণায়কের কোন সারি অথবা কলামের উপাদানগুলো অপর একটি সারি অথবা কলামের অনুরূপ উপাদানগুলোর সমানুপাতিক হলে নির্ণায়কটির মান শূন্য।	অর্থাৎ, $\begin{vmatrix} a_1 & ka_1 & b_1 \\ a_2 & ka_2 & b_2 \\ a_3 & ka_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0$
◆ নির্ণায়কটির কোন সারি অথবা কলামের প্রতিটি উপাদান দুইটি রাশির সমষ্টি হিসেবে প্রকাশিত হলে, নির্ণায়কটিকে একই ক্রমের দুটি পৃথক নির্ণায়কের যোগফল হিসেবে প্রকাশ করা হয়।	অর্থাৎ, $\begin{vmatrix} a_1+d_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+d_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$
◆ যদি দুইটি নির্ণায়ক এরূপ হয় যে, এদের প্রত্যেকের একটি মাত্র সারি অথবা কলামের উপাদানগুলো ভিন্ন হয়, তবে এই ভিন্ন সারি অথবা কলামের অনুরূপ উপাদানগুলো একত্রে যোগ করে নির্ণায়ক দুটির সমষ্টি পাওয়া যায়।	ধরি, $D_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ও $D_2 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ এদের শুধু প্রথম কলাম ভিন্ন। তাহলে, $D_1 + D_2 = \begin{vmatrix} a_1+d_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+d_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$
◆ কোন নির্ণায়কে কোন সারি অথবা কলামের উপাদানগুলো একই সংখ্যা দ্বারা গুণ করে অপর কোন সারি অথবা কলামের অনুরূপ উপাদানগুলোর সাথে যোগ / বিয়োগ করলে, নির্ণায়কটির মানের পরিবর্তন হয় না।	অর্থাৎ, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 \pm xb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 \pm xb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 \pm xb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$; $[c_1' = c_1 \pm xc_2]$
◆ কোন নির্ণায়কের পাশাপাশি 2টি সারি/কলাম এর ভুক্তিগুলো যদি সমান্তর প্রগমনে থাকে এবং অপর 2টি সারি/কলাম এর ভুক্তিগুলোও যদি সমান্তর প্রগমনে থাকে, তাহলে উক্ত নির্ণায়কের মান 0 হবে।	অর্থাৎ, $\begin{vmatrix} a & a+d & a+2d \\ b & b+d & b+2d \\ c & c+d & c+2d \end{vmatrix} = 0$

MCQ

01. $\begin{vmatrix} 265 & 240 & 219 \\ 240 & 225 & 198 \\ 219 & 198 & 181 \end{vmatrix}$ এর মান কোনটি? **[KUET'18-19]**

(a) 11 (b) 9 (c) 8 (d) 10 (e) 0

সমাধান: (e); Use Calculator

02. $\begin{vmatrix} x+y & x & y \\ x & x+z & z \\ y & z & y+z \end{vmatrix}$ এর মান কত? **[IUT'08-09, 14-15, RUET'12-13, KUET'08-09, 10-11, 17-18]**

(a) 4xyz (b) $\frac{1}{2}$xyz (c) $\frac{1}{7}$xyz (d) 11xyz (e) 13xyz

সমাধান: (a); $\begin{vmatrix} x+y & x & y \\ x & x+z & z \\ y & z & y+z \end{vmatrix}$ এ $(x,y,z) = (1,2,3)$ বসিয়ে পাই $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 24$

(a) $4xyz = 4.1.2.3 = 24$ (b) $\frac{1}{2}xyz = \frac{1}{2}.1.2.3 = 3$ (c) $\frac{1}{7}xyz = \frac{1}{7}.1.2.3 = \frac{6}{7}$

(d) $11xyz = 11.1.2.3 = 66$ (e) $13xyz = 13.1.2.3 = 78$

বিকল্প: $\begin{vmatrix} x+y & x & y \\ x & x+z & z \\ y & z & y+z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2z & -2z \\ x & x+z & z \\ y & z & y+z \end{vmatrix} = -2z\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ x & x+z & z \\ y & z & y+z \end{vmatrix}$

$= -2z\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & x & z \\ y & -y & y+z \end{vmatrix} = -2z(-xy-xy) = 4xyz$

03. $\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & \omega \end{vmatrix} = ?$ [Ans: d] [IUT'10-11,17-18]

(a) 1 (b) ω (c) ω^2 (d) 0

04. $D = \begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix}$ হলে D এর মান কত? [BUTEX'16-17]

(a) 4 abc (b) abc (c) $4a^2b^2c^2$ (d) $a^2b^2c^2$

সমাধান: (c); $D = \begin{vmatrix} -a^2 & ab & ac \\ ab & -b^2 & bc \\ ac & bc & -c^2 \end{vmatrix} = abc\begin{vmatrix} -a & b & c \\ a & -b & c \\ a & b & -c \end{vmatrix} = a^2b^2c^2\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$

05. $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$ নির্ণায়কের মান কত? [BUTEX'15-16]

(a) $a+b+c$ (b) 0 (c) 1 (d) abc

সমাধান: (b); $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & a+b+c \\ 1 & c & a+b+c \end{vmatrix}$ $[C_3' = C_3 + C_2] = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix} = (a+b+c) \times 0 = 0$

06. If $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -6$ then $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -d & -e & -f \\ 4g & 4h & 4i \end{vmatrix} = ?$ [IUT'14-15]

(a) 72 (b) – 72 (c) 6 (d) 24

Solution: (a); $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -6 \therefore \begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -d & -e & -f \\ 4g & 4h & 4i \end{vmatrix} = -3 \times 4\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (-12) \times (-6) = 72$

07. নির্ণায়কে দুইটি সারি বা কলাম সদৃশ্য হলে ঐ নির্ণায়কের মান হবে- [Ans: c] [BUTEX'12-13]

(a) 1 (b) 2 (c) 0 (d) কোনটাই না

সমাধান: (c); নির্ণায়কের ধর্ম অনুসারে ২টি সারি বা কলাম অভিন্ন হলে তার মান শূন্য হবে।

08. The value of $\begin{vmatrix} \log x & \log y & \log z \\ \log 2x & \log 2y & \log 2z \\ \log 3x & \log 3y & \log 3z \end{vmatrix}$ is - [BUET'09-10, KUET'07-08, RUET'11-12]

(a) $\log\frac{2}{3}$ (b) 0 (c) $\log\frac{3}{2}$ (d) 1

সমাধান: (b); $\begin{vmatrix} \log x & \log y & \log z \\ \log 2x & \log 2y & \log 2z \\ \log 3x & \log 3y & \log 3z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \log\left(\frac{x}{y}\right) & \log\left(\frac{y}{z}\right) & \log z \\ \log\left(\frac{x}{y}\right) & \log\left(\frac{y}{z}\right) & \log 2z \\ \log\left(\frac{x}{y}\right) & \log\left(\frac{y}{z}\right) & \log 3z \end{vmatrix}$ $[c_1' = c_1 - c_2, c_2' = c_2 - c_3]$

$= \log\left(\frac{x}{y}\right)\log\left(\frac{y}{z}\right)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \log z \\ 1 & 1 & \log 2z \\ 1 & 1 & \log 3z \end{vmatrix} = 0$ [নির্ণায়কের দুইটি কলাম একই হওয়ায় নির্ণায়কটির মান শূন্য]

09. $\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & -2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & 2a \\ 2b & -2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$ এর মান কত? [KUET'11-12]

(a) $(2+a^2+b^2)^2$ (b) $(a+b+5)^5$ (c) a^2+b+7 (d) $a^2-2b+11$ (e) $(1+a^2+b^2)^3$

সমাধান: (e); $\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2+2b^2 & 2ab-2ab & -2b \\ 2ab-2ab & 1-a^2+b^2+2a^2 & 2a \\ 2b-b+a^2b+b^3 & -a-a^3-ab^2 & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} c_1' = c_1 - bc_3 \\ c_2' = c_2 + ac_3 \end{pmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1+a^2+b^2 & 0 & -2b \\ 0 & 1+a^2+b^2 & 2a \\ b(1+a^2+b^2) & -a(1+a^2+b^2) & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix} = (1+a^2+b^2)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2b \\ 0 & 1 & 2a \\ b & -a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$

$= (1+a^2+b^2)^2\left\{\begin{vmatrix} 1 & 2a \\ -a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} 0 & -2b \\ 1 & 2a \end{vmatrix}\right\} = (1+a^2+b^2)^2(1-a^2-b^2+2a^2+2b^2) = (1+a^2+b^2)^3$

10. ω যদি 1 এর একটি জটিল ঘনমূল হয়, তবে $\begin{vmatrix} 1 & -\omega & \omega^2 \\ -\omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & -\omega \end{vmatrix}$ নির্ণায়কটির মান কত?

[SUST'08-09, KUET'06-07, BUET'10-11]

(a) 4 (b) 2 (c) 3 (d) None

সমাধান: (d); $\begin{vmatrix} 1 & -\omega & \omega^2 \\ -\omega & \omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & -\omega \end{vmatrix} = -\omega^3 - 1 + \omega(\omega^2 - \omega^2) + \omega^2(-\omega - \omega^4)$

$= -2 + 0 + \omega^2.-2\omega = -2 - 2\omega^3 = -4$

Written

11. মান নির্ণয় কর: $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 5 & -3 \\ -4 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ **[RUET'15-16]**

সমাধান: $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 5 & -3 \\ -4 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$; ৩য় কলাম বরাবর বিস্তার করে, $= -1\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

$= (-1) \times 3\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \times 3 \times 2\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -6(10+9) = -114$

12. মান নির্ণয় করঃ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & p^2 \\ 1 & p^2 & p^4 \end{vmatrix}$ **[RUET'07-08,08-09,12-13,13-14]**

সমাধান: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & p & p^2 \\ 1 & p^2 & p^4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1-p & p-p^2 & p^2 \\ 1-p^2 & p^2-p^4 & p^4 \end{vmatrix}$ $[c_1' = c_1 - c_2; c_2' = c_2 - c_3]$

$= (1-p)(1-p)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & p & p^2 \\ 1+p & (1+p)p^2 & p^4 \end{vmatrix} = (1-p)^2\begin{vmatrix} 1 & p \\ 1+p & (1+p)p^2 \end{vmatrix}$

$= (1-p)^2(p^2 + p^3 - p - p^2) = (1-p)^2(p^3 - p) = p(1-p)^2(p^2 - 1)$ (Ans.)

13. প্রমাণ কর যে, $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$ **[RUET'11-12]**

সমাধান: $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$ $[r_1' = r_1 + r_2 + r_3]$

$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a+b+c & -(a+b+c) & 2b \\ 0 & a+b+c & c-a-b \end{vmatrix}$ $\begin{bmatrix} c_1' = c_1 - c_2 \\ c_2' = c_2 - c_3 \end{bmatrix}$

$= (a+b+c)^3\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2b \\ 0 & 1 & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3.1 = (a+b+c)^3$

14. প্রমাণ কর: $\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & 2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & -2a \\ -2b & 2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix} = (1+a^2+b^2)^3$ [KUET'03-04, 04-05, 11-12]

সমাধান: $\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & 2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & -2a \\ -2b & 2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix} = (1+a^2+b^2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2b \\ 0 & 1+a^2+b^2 & 2a \\ b & -a(1+a^2+b^2) & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$

$= (1+a^2+b^2)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2b \\ 0 & 1 & 2a \\ b-a & 1-a^2 & -b^2 \end{vmatrix}$

$= (1+a^2+b^2)^2[1-a^2-b^2+2a^2-2b(-b)] = (1+a^2+b^2)^3$ **(Proved)**

বিকল্প: $\begin{vmatrix} 1+a^2-b^2 & 2ab & 2b \\ 2ab & 1-a^2+b^2 & -2a \\ -2b & 2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 1+a^2+b^2 & 0 & b+a^2b+b^3 \\ 0 & 1+a^2+b^2 & -a-a^3-ab^2 \\ -2b & 2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix} [r_1' = r_1 - b\cdot r_3, r_2' = r_2 + a\cdot r_3]$

$= (1+a^2+b^2)^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & -a \\ -2b & 2a & 1-a^2-b^2 \end{vmatrix} = (1+a^2+b^2)^2\cdot\{1(1-a^2-b^2+2a^2)+b(2b)\}$

$= (1+a^2+b^2)^2\cdot(1+a^2-b^2+2b^2) = (1+a^2+b^2)^3$

15. প্রমাণ করঃ $\begin{vmatrix} a+x & b+x & c+x \\ a+y & b+y & c+y \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(x-y)$ [RUET'10-11]

সমাধান: $L.H.S = \begin{vmatrix} a+x & b+x & c+x \\ a+y & b+y & c+y \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-b & b-c & c+x \\ a-b & b-c & c+y \\ a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2 \end{vmatrix} [c_1' = c_1 - c_2, c_2' = c_2 - c_3]$

$= (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & c+x \\ 1 & 1 & c+y \\ a+b & b+c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)\begin{vmatrix} 0 & 1 & c+x \\ 0 & 1 & c+y \\ a-c & b+c & c^2 \end{vmatrix} [c_1' = c_1 - c_2]$

$= (a-b)(b-c)(a-c)\begin{vmatrix} 0 & 1 & c+x \\ 0 & 1 & c+y \\ 1 & b+c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(a-c)(y-x) = (a-b)(b-c)(c-a)(x-y)$

16. মান নির্ণয় করঃ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 2b & 3c \\ (a^2-3ac) & (4b^2-3ac) & (9c^2-2ab) \end{vmatrix} (abc \neq 0)$ [RUET'06-07,05-06]

সমাধান: $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a-2b & 2b-3c & 3c \\ (a^2-3ac-4b^2+3ac) & (4b^2-3ac-9c^2+2ab) & 9c^2-2ab \end{vmatrix} [c_1' = c_1 - c_2; c_2' = c_2 - c_3]$

[১ম সারির সাপেক্ষে বিস্তার করে]

$= \begin{vmatrix} a-2b & 2b-3c \\ a^2-4b^2 & 4b^2-3ac-9c^2+2ab \end{vmatrix} = (a-2b)\begin{vmatrix} 1 & 2b-3c \\ a+2b & (2b-3c)(a+2b+3c) \end{vmatrix}$

$= (a-2b)(2b-3c)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a+2b & a+2b+3c \end{vmatrix} = (a-2b)(2b-3c)(a+2b+3c-a-2b) = 3c(a-2b)(2b-3c)$

17. কারণ প্রদর্শন করে এবং বিস্তার না করে সত্য অথবা মিথ্যা উত্তর কর।

(i) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\5 & 6 & 7\\8 & 7 & 6\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\6 & 5 & 7\\7 & 8 & 6\end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix}1 & 3 & -4\\2 & 8 & 3\\0 & -2 & 5\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\3 & 8 & -2\\-4 & 3 & 5\end{vmatrix}$

(iii) Cofactor (সহগুণক) of 2 in $\begin{vmatrix}2 & 4\\3 & 4\end{vmatrix}$ is (-3) (iv) $\begin{vmatrix}x^2-y^2 & x+y & x\\x-y & 1 & 1\\x-y & 1 & y\end{vmatrix} = 0$

সমাধান: (i) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\5 & 6 & 7\\8 & 7 & 6\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\6 & 5 & 7\\7 & 8 & 6\end{vmatrix}$; (–) চিহ্ন না দেয়ায় মিথ্যা (ii) $\begin{vmatrix}1 & 3 & -4\\2 & 8 & 3\\0 & -2 & 5\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\3 & 8 & -2\\-4 & 3 & 5\end{vmatrix}$; সত্য

(iii) মিথ্যা; কারণ, 2 এর সহগুণক 4 (iv) $\begin{vmatrix}x^2-y^2 & x+y & x\\x-y & 1 & 1\\x-y & 1 & y\end{vmatrix} = (x\text{-}y)\begin{vmatrix}x+y & x+y & x\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & y\end{vmatrix} = 0$; সত্য

Question Type-07: ম্যাট্রিক্সের নির্ণায়ক মান ও ব্যতিক্রম ম্যাট্রিক্স

➲ **Formula & Concept:** যদি A একটি $n \times n$ ক্রমের বর্গ matrix হয় যেখানে $|A| \neq 0$. তাহলে,
(i) $|(pA)| = p^n|A|$ (ii) $|(pA)^{-1}| = \frac{1}{p^n|A|}$ (iii) $|(pA^{-1})| = \frac{p^n}{|A|}$ (iv) $|(pA^{-1})^{-1}| = \frac{|A|}{p^n}$ **[Note:** $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$**]**
[Note: অনেকে চিন্তা করছো যে যদি Matrix $n \times n$ ক্রমের না হয়ে $m \times n$ ক্রমের হয় $(m \neq n)$ তাহলে $|(PA)|$ = কত হবে। উত্তর হলো: যদি Matrix $m \times n$ ক্রমের হয় $(m \neq n)$ তাহলে ঐ Matrix এর নির্ণায়কের মান নির্ণয় করা সম্ভব নয় কারণ শুধুমাত্র বর্গ Matrix এরই নির্ণায়ক বের করা সম্ভব।]
যদি A কোনো $n \times n$ ক্রমের বর্গ ম্যাট্রিক্স হয়, তার নির্ণায়কের মান $|A|$ এবং তার Adjoint ম্যাট্রিক্স Adj (A) হয় তবে,
(i) $|\text{Adj}(A)| = |A|^{n-1}$ (ii) $\text{Adj}(\text{Adj}(A)) = |A|^{n-2}A$

MCQ

01. The determinants of the reverse identity matrices are defined as follow: **[IUT'21-22]**

$|J_1| = |1| = +1, |J_2| = \begin{vmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{vmatrix} = -1, |J_3| = \begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\end{vmatrix} = -1, \cdots$ Find the determinant of J_{100}.

(a) +1 (b) 0 (c) −1 (d) None of the others

Solution: (a);

$\lvert J_1\rvert = 1$	$\lvert J_2\rvert = -1$	$\lvert J_3\rvert = -1$	$\lvert J_4\rvert = 1$
$\lvert J_5\rvert = 1$	$\lvert J_6\rvert = -1$	$\lvert J_7\rvert = -1$	$\lvert J_8\rvert = 1$
... ...	... ...	... ...	... ...
$\lvert J_{4n+1}\rvert = 1$	$\lvert J_{4n+2}\rvert = -1$	$\lvert J_{4n+3}\rvert = -1$	$\lvert J_{4n}\rvert = 1$

$\therefore |J_{100}| = |J_{4\times 25}| = 1$

02. If A is a 3×3 invertible matrix and $\det(A^{-1}) = (\det A)^{k+2}$, then the value of k is – **[IUT'20-21]**
(a) 1 (b) 0 (c) −1 (d) −3
Solution: (d); We know, $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$ ∴ Comparing, $-1 = k+2 \therefore k = -3$

03. 3×3 আকারের একটি কর্ণ ম্যাট্রিক্স D এর জন্য $|D| = 20$ হলে $|(2D)^{-1}|$ এর মান কত? **[BUET'12-13, SUST'15-16]**
(a) $\frac{1}{160}$ (b) $\frac{1}{40}$ (c) $\frac{1}{10}$ (d) $-\frac{1}{160}$ (e) $-\frac{1}{40}$

সমাধান: (a); ধরি, 3×3 আকারের কর্ণ ম্যাট্রিক্স, $D = \begin{bmatrix}a & 0 & 0\\0 & b & 0\\0 & 0 & c\end{bmatrix}$

$\therefore 2D = \begin{bmatrix}2a & 0 & 0\\0 & 2b & 0\\0 & 0 & 2c\end{bmatrix} \therefore |D| = \begin{bmatrix}a & 0 & 0\\0 & b & 0\\0 & 0 & c\end{bmatrix} = 20 \therefore |2D| = \begin{bmatrix}2a & 0 & 0\\0 & 2b & 0\\0 & 0 & 2c\end{bmatrix} = 2^3\begin{bmatrix}a & 0 & 0\\0 & b & 0\\0 & 0 & c\end{bmatrix} = 8 \times 20 = 160$

এখন, জেনে রাখো, $|(2D)^{-1}| = \frac{1}{|2D|} = \frac{1}{160}$

আরও জেনে রাখ, $n \times n$ ক্রমের ম্যাট্রিক্সের ক্ষেত্রে, (i) $|kA| = k^n|A|$; (ii) $|kA^{-1}| = \frac{k^n}{|A|}$; (iii) $|(kA)^{-1}| = \frac{1}{k^n|A|}$
যেখানে A একটি অব্যতিক্রমী ম্যাট্রিক্স।

04. ধরি, A একটি 3×3 ম্যাট্রিক্স এবং $|A| = -7$. তাহলে $|(2A)^{-1}|$ এর মান হল - [BUET'12-13]

(a) $-\frac{1}{14}$ (b) $-\frac{1}{56}$ (c) $-\frac{8}{7}$ (d) $-\frac{2}{7}$

সমাধান: **(b)**; A একটি 3×3 ম্যাট্রিক্স। তাহলে ধরি $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$; $2A = \begin{bmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \\ 2g & 2h & 2i \end{bmatrix}$; $|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -7$

আমরা জানি, $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ [নিজে প্রমাণ কর]

এখন, $|(2A)^{-1}| = \frac{1}{|(2A)|}$; $|(2A)| = \begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix}$

$= 2 \times 2 \times 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \left[C_1' = \frac{C_1}{2}\right] \left[C_2' = \frac{C_2}{2}\right] \left[C_3' = \frac{C_3}{2}\right] = 2^3(-7) = -56 \therefore |(2A)^{-1}| = \frac{1}{|(2A)|} = -\frac{1}{56}$

শর্টকাট: n ক্রমের ম্যাট্রিক্স A এর জন্য $|(mA)| = m^n|A|$

Question Type-08: নির্ণায়কবিশিষ্ট সমীকরণ সমাধান

Formula & Concept:

এসব ক্ষেত্রে চেষ্টা করবে যেন বিভিন্ন সারি/কলামের ভুক্তিগুলো যোগ/বিয়োগ করে বা common নিয়ে একটি কলাম বা একটি সারির 2টি ভুক্তির মান 0 তৈরি করতে। তাহলে তোমার বিস্তার করতে সুবিধা হবে।

MCQ

01. $\begin{vmatrix} x^4 & x^2 & a \\ 3 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 0$ হলে, a এর মান নির্ণয় কর। **[CKRUET'21-22]**

(a) $0, \pm\sqrt{a}$ (b) $0, \pm\sqrt{2}$ (c) $0, \pm\sqrt{b}$ (d) $0, \pm\sqrt{3}$ (e) $0, \pm 3$

সমাধান: **(d)**; $\begin{vmatrix} x^4 & x^2 & a \\ 3 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow c\begin{vmatrix} x^4 & x^2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow c(x^4 - 3x^2) = 0 \Rightarrow x^4 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 3) = 0$

হয় $x = 0$ অথবা, $x = \pm\sqrt{3}$

[Note: যদিও প্রশ্নে a এর মান নির্ণয় করতে বলা হয়েছে, তবে নির্ণায়কে x এর মান $0, \pm\sqrt{3}$ বসালে a এর মান 0 আসে। কিন্তু শুধু 0 অপশনে নেই। প্রশ্নে সম্ভবত x এর মানই চাওয়া হয়েছে। তাই x এর মানকেই উত্তর হিসেবে ধরা হয়েছে। আর যদি a এর মানই চেয়ে থাকে তাহলে সঠিক অপশনটি এখানে নেই।]

02. If $\begin{vmatrix} 1+x & x & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 0$ then, x =? **[IUT'17-18]**

(a) $\frac{5}{2}$ (b) $-\frac{31}{10}$ (c) $\frac{3}{37}$ (d) None

Solution: (d); $x = \frac{31}{10}$

03. x-এর কোন কোন মানের জন্য নিম্নলিখিত নির্ণায়কের মান শূন্য হবে? $\begin{vmatrix} x^2 & x & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$ **[BUET'05-06, KUET'10-11]**

(a) $x = 0, -2$ (b) $x = 1, 2$ (c) $x = 0, 1$ (d) $x = 0, 2$

সমাধান: (d); $\begin{vmatrix} x^2 & x & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -5\begin{vmatrix} x^2 & x \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x^2 - 2x) = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \therefore x = 0, 2$

04. সমাধান করঃ $\begin{vmatrix} x+4 & 3 & 3 \\ 3 & x+4 & 5 \\ 5 & 5 & x+1 \end{vmatrix} = 0$ [RUET’04-05, KUET’04-05, CUET’13-14, BUET’01-02,13-14]

সমাধান: $\begin{vmatrix} x+1 & 3 & 3 \\ -x-1 & x+4 & 5 \\ 0 & 5 & x+1 \end{vmatrix} = 0$ $[C_1' = C_1 - C_2] \Rightarrow (x+1)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & x+4 & 5 \\ 0 & 5 & x+1 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow (x+1)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & x+7 & 8 \\ 0 & 5 & x+1 \end{vmatrix} = 0$ $[r_2' = r_1 + r_2] \Rightarrow (x+1)[(x+7)(x+1) - 40] = 0$

$\Rightarrow (x+1)(x^2 + 8x - 33) = 0 \Rightarrow (x+1)(x+11)(x-3) = 0$

$x = -1, -11, 3$ **(Ans.)**

Question Type-09: বহুচলকবিশিষ্ট সমীকরণ জোটের সমাধান

➲ **Formula & Concept:**

♦ ক্রেমারের **(Cramer)** সূত্রের সাহায্যেঃ

$a_1x + b_1y + c_1z = d_1, a_2x + b_2y + c_2z = d_2, a_3x + b_3y + c_3z = d_3$(ক্রেমারের সূত্রানুসারে উপরোক্ত সমীকরণগুলো সমাধান করার জন্য নিম্নলিখিত নির্ণায়কগুলো তৈরি করতে হবে।)

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

$\therefore x = \frac{D_x}{D}, y = \frac{D_y}{D}$ এবং $z = \frac{D_z}{D}$

♦ **Inverse** ম্যাট্রিক্সের ধারণা ব্যবহার করেঃ

$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$
$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ ধরি, $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}; x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$
$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$

এখানে, $\boxed{AX = B} \Rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow IX = A^{-1}B \Rightarrow \boxed{X = A^{-1}B}$

Written

01. নির্ণায়কের সাহায্যে সমাধান করঃ $x + 2y - z = 5, 3x - y + 3z = 7, 2x + 3y + z = 11$ [BUTEX’10-11]

সমাধান: আমরা জানি, $x = \frac{D_x}{D}; y = \frac{D_y}{D}; x = \frac{D_z}{D}$

$$\therefore x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 7 & -1 & 3 \\ 11 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 7 & -1 & 3 \\ 11 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{-15} = \frac{-30}{-15} = 2$$

$$\therefore y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 3 & 7 & 3 \\ 2 & 11 & 1 \end{vmatrix}}{-15} = \frac{-30}{-15} = 2 \therefore z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 7 \\ 2 & 3 & 11 \end{vmatrix}}{-15} = \frac{-15}{-15} = 1$$

$\therefore x = 2, y = 2, z = 1$ **(Ans.)**