অধ্যায়- ০২ : ভেক্টর

Written

01. একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর যা $\bar{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\bar{b} = \hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ ভেক্টরদ্বয়ের সমতলীয় এবং $\vec{a}$ ভেক্টরের উপর লম্ব।

সমাধান: নির্ণেয় ভেক্টর, $\vec{r} = \vec{a} + p\vec{b} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k} + p(\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}) = (1+p)\hat{i} + (1-p)\hat{j} + (1-p)\hat{k}$

$\vec{r} \cdot \vec{a} = 0 \Rightarrow 1 + p + 1 - p + 1 - p = 0 \Rightarrow p = 3 \;\therefore \vec{r} = 4\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$ **[BUET'18-19]**

$\therefore$ একক ভেক্টর $= \pm\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \pm\frac{4\hat{i}-2\hat{j}-2\hat{k}}{2\sqrt{6}} = \pm\frac{2\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}}{\sqrt{6}}$ $\therefore$ একক ভেক্টর $= \pm\frac{2\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}}{\sqrt{6}}$ (Ans.)

02. ধনাত্মক x-অক্ষের সঙ্গে ভেক্টর $\bar{A} = -\sqrt{3}i + j$ যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর। **[RUET'18-19]**

সমাধান: $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{A_x}{\sqrt{A_x^2+A_y^2}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{3+1}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$; $\theta = 150°$ or $210°$ (Ans.)

03. ভেক্টর পদ্ধতিতে $3i + j + k$ এবং $2i + 2j - k$ এর ছেদবিন্দু গামী সরলরেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। **[BUET'17-18]**

সমাধান: যেহেতু $3\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ এবং $2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ এর ছেদবিন্দু মূল বিন্দুতে, তাই মূলবিন্দুগামী যেকোন ভেক্টরই $3\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ এবং $2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ এর ছেদবিন্দু গামী হবে। তাই সরলরেখার ভেক্টর সমীকরণ,

$\vec{r} = <0,0,0> + t<a,b,c> \;\therefore x = at, y = bt, z = ct$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ যেখানে $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$

04. যদি $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} = \underline{0}$ এবং $|\underline{a}| = 3, |\underline{b}| = 5, |\underline{c}| = 7$ হয়, তাহলে $\underline{a}$ এবং $\underline{b}$ এর মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $\underline{a} + \underline{b} + \underline{c} = 0 \Rightarrow \underline{a} + \underline{b} = -\underline{c}$ **[BUET'17-18]**

ধরি, $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ এর মধ্যবর্তী কোণ $= \theta$

সুতরাং $(|a|)^2 + (|b|)^2 + 2\cdot|a|\cdot|b|\cdot\cos\theta = (|c|)^2 \Rightarrow 3^2 + 5^2 + 2\times3\times5\cos\theta = 7^2$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{7^2-3^2-5^2}{2\times3\times5} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$ (Ans.)

05. ABC ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় A(1,2,3), B(2,3,1) এবং C(3,1,2) হলে, ভেক্টর পদ্ধতিতে ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: $\overrightarrow{OA} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $\overrightarrow{OB} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$, $\overrightarrow{OC} = 3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ **[BUET'16-17]**

$\overrightarrow{AB} = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$; $\overrightarrow{AC} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ $\therefore \Delta ABC = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$

এখন, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \hat{i}(-1-2) - \hat{j}(-1+4) + \hat{k}(-1-2) = -3\hat{i} - 3\hat{j} - 3\hat{k}$

$\therefore \Delta ABC = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + (-3)^2}$ বর্গ একক $= \frac{3\sqrt{3}}{2}$ বর্গ একক

06. $\vec{B} = 2\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}$ ভেক্টর এর লম্ব দিক বরাবর $\vec{A} = -\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টর এর অংশক $\vec{W}$ নির্ণয় কর। অত:পর $\vec{W}$ ভেক্টরের উপর $\vec{A}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ নির্ণয় কর। **[BUET'14-15]**

সমাধান: $\vec{B}$ বরাবর $\vec{A}$ এর অংশক, $\overrightarrow{A_x} = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{B}|}\cdot\frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{-2+4+6}{\sqrt{29}}\cdot\frac{2\hat{i}-4\hat{j}+3\hat{k}}{\sqrt{29}} = \frac{8}{29}(2\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k})$

$\therefore$ $\vec{B}$ এর লম্ব বরাবর $\vec{A}$ এর অংশক $\overrightarrow{A_y}$

এখন, $\vec{A} = \overrightarrow{A_x} + \overrightarrow{A_y}$

$\therefore \vec{W} = \overrightarrow{A_y} = \vec{A} - \overrightarrow{A_x} = (-\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}) - \frac{8}{29}(2\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}) = -\frac{45}{29}\hat{i} + \frac{3}{29}\hat{j} + \frac{34}{29}\hat{k}$ (Ans.)

$\vec{W}$ এর উপর $\vec{A}$ এর অভিক্ষেপ $= \frac{\vec{W}\cdot\vec{A}}{|\vec{W}|} = \frac{\frac{45}{29} - \frac{3}{29} + \frac{68}{29}}{\frac{\sqrt{3190}}{29}} = \frac{110}{\sqrt{3190}}$ (Ans.)

07. $AB = 3i + 2j - k$ এবং $AC = 5i - j + 2k$ হলে AB ও AC কে সন্নিহিত বাহু ধরে অংকিত সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3\hat{i} - 11\hat{j} - 13\hat{k}$ **[BUET'04-05,09-10, RUET'13-14]**

$\therefore$ AB ও AC কে সন্নিহিত বাহু ধরে অংকিত সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল, $\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{3^2 + (11)^2 + (-13)^2} = \sqrt{299}$

08. দেখাও যে, $\vec{A} = 8\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি পরস্পর লম্ব। **[BUTEX'07-08,03-04,10-11]**

সমাধান: $\vec{A}.\vec{B} = (8\hat{i} + \hat{j} - 6\hat{k}).(4\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}) = 8 \times 4 + 1 \times (-2) + (-6) \times 5 = 0$

$\therefore$ $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব। (Showed)

09. ধ্রুবক a এর মান নির্ণয় কর যেন $2i + j - k, 3i - 2j + 4k, i - 3j + ak$ ভেক্টর তিনটি একই সমতলে থাকে।

সমাধান: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4a + 24 - 3a + 4 + 7 = 0 \therefore a = 5$ (Ans) **[CUET'07-08]**

10. A ও B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে, $2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$ ও $4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$. $\overrightarrow{AB}$ এর মান এবং $\overrightarrow{AB}$ বরাবর এক ভেক্টরের মান নির্ণয় কর। **[BUTEX'06-07]**

সমাধান: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}) - (2\hat{i} + 3\hat{i} - 4\hat{k}) = 2\hat{i} - 6\hat{j} + 6\hat{k}$

$\therefore \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4 + 36 + 36} = \sqrt{76}$ (Ans)

$\overrightarrow{AB}$– বরাবর একক ভেক্টর, $\hat{a} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \dfrac{2\hat{i} - 6\hat{j} + 6\hat{k}}{\sqrt{76}}$ (Ans.)

11. দেখাও যে, $\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরটি অক্ষত্রয়ের সাথে সমান কোণে আনত। **[BUTex'05-06]**

সমাধান: ধরি, x-অক্ষ বরাবর একক ভেক্টর, $\vec{a} = \hat{i}$

$\therefore \vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{K}$................(i)

$\Rightarrow \cos\theta = \dfrac{\vec{r}.\vec{a}}{ra} = \dfrac{1}{\sqrt{3}.1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$|\vec{r}| = r = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

$|\vec{a}| = a = \sqrt{1^2} = 1$

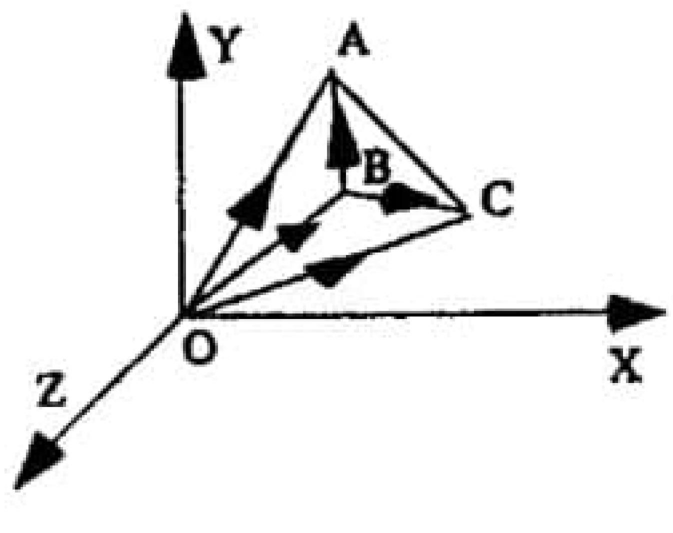
$\vec{a} = \hat{i}$.....................(ii)

$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ অনুরূপভাবে, y ও z অক্ষের ক্ষেত্রে প্রমাণ করা যায়, $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (Showed)

12. ভেক্টর পদ্ধতিতে একটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর, যার শীর্ষবিন্দুত্রয় যথাক্রমে A (1, 3, 2), B (2, –1, 1) এবং C (–1, 2, 3).

সমাধান: $\overrightarrow{OA} = \hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}, \overrightarrow{OB} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}, \overrightarrow{OC} = -\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ **[CUET'04-05]**

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \hat{i} - 4\hat{j} - \hat{k}, \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = -3\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$



$\Delta ABC = \dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}\right|; \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -4 & -1 \\ -3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -5\hat{i} + \hat{j} - 9\hat{k}$

$\therefore \Delta ABC = \dfrac{1}{2}\sqrt{25 + 1 + 81} = \dfrac{1}{2}\sqrt{107}$ (Ans.)

13. $2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ ভেক্টরটি X অক্ষের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তা নির্ণয় কর। **[KUET'04-05]**

সমাধান: $\vec{a}=2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$; $|\vec{a}|=3$

x অক্ষের বরাবর ভেক্টর $\vec{b}=\hat{i}$

$|\vec{b}|=1$

$\vec{a}.\vec{b}=ab\cos\theta \Rightarrow \cos\theta=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \Rightarrow \cos\theta=\dfrac{(2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}).\hat{i}}{3}$

$\therefore \theta=\cos^{-1}\left(\dfrac{2}{3}\right)$ (Ans.)

14. P ও Q বিন্দুর স্থানাংক যথাক্রমে (1,1,1) এবং (3,2,-1) হলে $\overrightarrow{PQ}$ ভেক্টরের সমান্তরালে একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

সমাধান: $\overrightarrow{OP}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$; $\overrightarrow{OQ}=3\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ **[BUET'03-04]**

$\therefore \overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=(3\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})-(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})=2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$

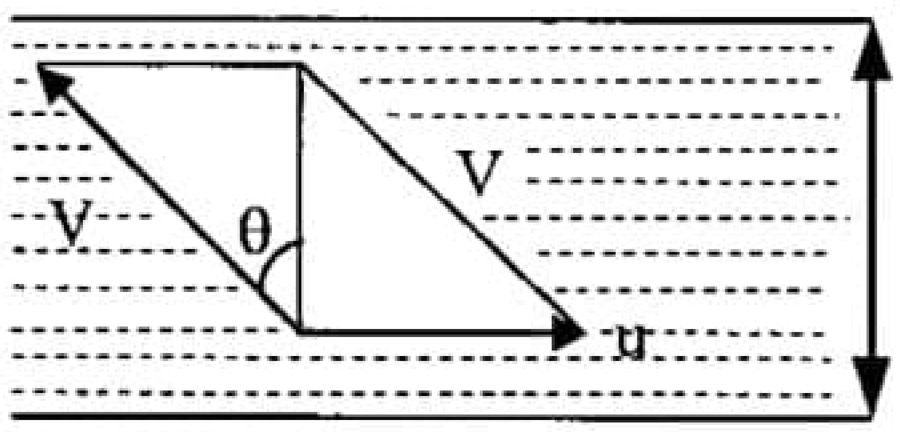
নির্ণেয় একক ভেক্টর $=\pm\dfrac{\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|}=\pm\dfrac{2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=\pm\dfrac{1}{3}(2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k})$ (Ans.)

15. স্রোতহীন অবস্থায় 100m প্রশস্ত একটি নদী সাঁতরিয়ে একজন লোক 4 মিনিটে সোজাসুজি একে অতিক্রম করে কিন্তু স্রোত থাকলে সে একই পথে 5 মিনিটে একে অতিক্রম করে। স্রোতের বেগ নির্ণয় কর। **[KUET'03-04]**

সমাধান: ধরি u = স্রোতের বেগ , v = সাতারুর বেগ

স্রোতহীন অবস্থায়, $V=\dfrac{100}{4}=25\,m/min$

স্রোতাবস্থায়, লব্ধি রেখা $w=\sqrt{v^2-u^2}$



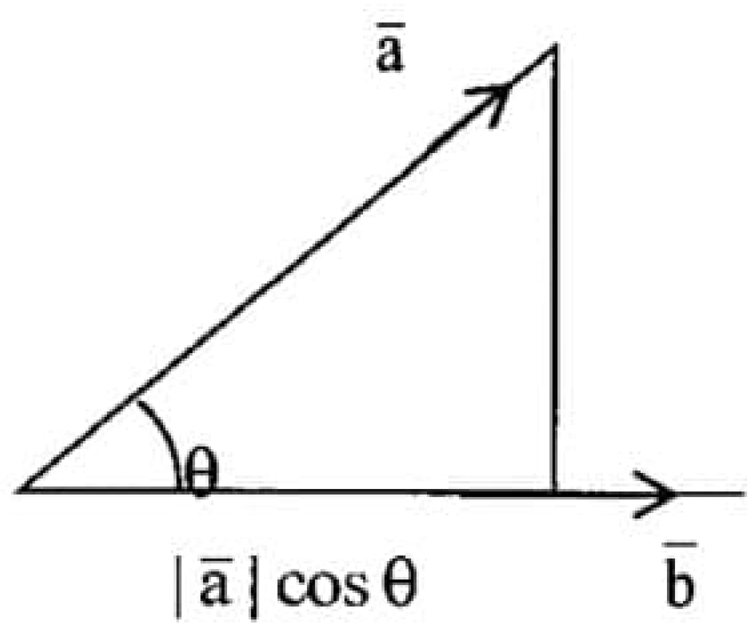
$\therefore \sqrt{v^2-u^2}\times 5=100 \Rightarrow v^2-u^2=(20)^2 \Rightarrow (25)^2-u^2=400 \quad \therefore u=15m/min$ (Ans.)

16. যদি $\bar{a}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $\bar{b}=\sqrt{3}\,\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k}$ হয় তাহলে $\bar{b}$ ভেক্টরের উপর $\bar{a}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ বের কর। **[KUET'03-04]**

সমাধান: $\bar{a}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $\bar{b}=\sqrt{3}\,\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k}$

$\bar{a}.\bar{b}==ab\cos\theta \quad \Rightarrow a\cos\theta=\dfrac{\bar{a}.\bar{b}}{b}$

$\dfrac{(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})\ (\sqrt{3}\,\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k})}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+3^2+2^2}}=\dfrac{\sqrt{3}+3-2}{\sqrt{16}}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$ (Ans.)



17. $\underline{A}=3\underline{i}-2\underline{j}+\underline{k}$, $\underline{B}=\underline{i}-3\underline{j}+5\underline{k}$ ও $\underline{C}=2\underline{i}+\underline{j}-4\underline{k}$ ভেক্টরসমূহ দ্বারা একটি সমকোণী ত্রিভুজ তৈরি করা কি সম্ভব?

সমাধান: $|\underline{A}|^2=9+4+1=14$; $|\underline{B}|^2=1+9+25=35$ $|\underline{C}|^2=4+1+16=21$ **[BUTEX'03-04]**

$\therefore |\underline{B}|^2=|\underline{A}|^2+|\underline{C}|^2=35$ আবার, $\underline{A}.\underline{C}=6-2-4=0$ $\therefore$ সমকোণী ত্রিভুজ গঠন করা সম্ভব। (Ans)

18. যদি $(a\underline{i}+b\underline{j}+\underline{k})\times(2\underline{i}+2\underline{j}+3\underline{k})=\underline{i}-\underline{j}$ হয়, তবে a এবং b এর মান নির্ণয় কর। **[BUET'01-02]**

সমাধান: $\begin{vmatrix}\underline{i} & \underline{j} & \underline{k}\\ a & b & 1\\ 2 & 2 & 3\end{vmatrix}=\underline{i}(3b-2)-\underline{j}(3a-2)+\underline{k}(2a-2b) \therefore \underline{i}(3b-2)-\underline{j}(3a-2)+\underline{k}(2a-2b)=\underline{i}-\underline{j}$

উভয় পক্ষে i ও j এর সহগ সমীকৃত করলে, $3b-2=1, 3a-2=1, 2a-2b=0$

$\Rightarrow b=1, a=1, a=b$ প্রাপ্ত ফলগুলো সুসঙ্গত (coherent) [a=b=1] $\therefore a=1, b=1$ (Ans.)

19. যদি $\underline{a} = i + 2j + 3k$ এবং $\underline{b} = 3i - 2j + 3k$ হয় তবে $\underline{a} \times \underline{b}$ এর মান নির্ণয় কর। **[BUET'00-01]**

সমাধান: $\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 8\hat{i} + 8\hat{j} - 8\hat{k} \ \therefore |\underline{a} \times \underline{b}| = \sqrt{(8)^2 + (8)^2 + (-8)^2} = \sqrt{192} = 8\sqrt{3}$

MCQ

01. যদি $\underline{P} = 4\underline{i} - 2\underline{j} + 4\underline{k}$ এবং $\underline{Q} = 4\underline{i} - 2\underline{j} - \underline{k}$ হয়, তাহলে $\underline{P}$ এবং $\underline{Q}$ মধ্যবর্তী কোণ কোনটি? **[KUET'18-19]**

(a) $\cos^{-1}\left(\frac{8\sqrt{21}}{63}\right)$ (b) $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{21}}{63}\right)$ (c) $\cos^{-1}\left(\frac{5\sqrt{21}}{63}\right)$ (d) $\sin^{-1}\left(\frac{8\sqrt{21}}{63}\right)$ (e) $\cos^{-1}\left(\frac{2\sqrt{21}}{63}\right)$

সমাধান: (a); $\cos^{-1}\left(\frac{P.Q}{PQ}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{8\sqrt{21}}{63}\right)$

02. 'a' এর কোন মানের জন্য $\vec{A} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{B} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + a\vec{k}$ ও $\vec{C} = a\vec{i} + 7\vec{j} + 9\vec{k}$ সমতলীয় হবে?

(a) 2 (b) −2 (c) 3 (d) −5 (e) 5

সমাধান: (e); সমতলীয় হবে যদি $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = 0$ হয়। **[KUET'17-18]**

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & a \\ a & 7 & 9 \end{vmatrix} = 2(36 - 7a) + 3(a^2 - 27) + 4(21 - 4a) = 3a^2 - 30a + 75 = 0$$

$$\Rightarrow a^2 - 10a + 25 = 0 \Rightarrow (a - 5)^2 = 0 \Rightarrow a = 5$$

03. $\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরটি x অক্ষের সাথে কত কোণ উৎপন্ন করে? **[BUTex'16-17]**

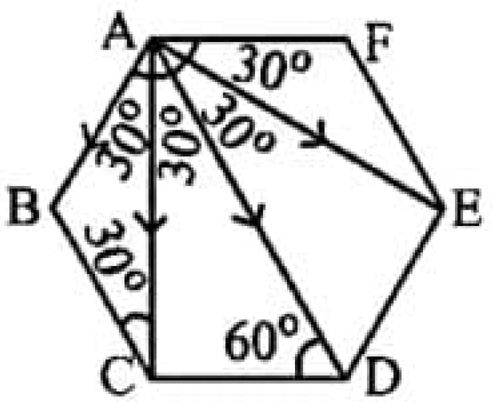
(a) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (b) $\cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ (c) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (d) $\cos^{-1} - \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

সমাধান: (a); $\cos\theta = \frac{(\hat{i})\cdot(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})}{\sqrt{3}\times 1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

04. ABCDEF একটি সুষম ষড়ভুজ। $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = ?$ **[BUTex'15-16]**

(a) $3\overrightarrow{AD}$ (b) $2\overrightarrow{AD}$ (c) $\frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$ (d) None

সমাধান: (a);



$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}| = 2AB\cos\left(\frac{120^\circ}{2}\right) = AB$; $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}| = 2AC\cos\left(\frac{60^\circ}{2}\right) = \sqrt{3}AC$

ΔABC এ, $\frac{AB}{\sin 30^\circ} = \frac{AC}{\sin 120^\circ} \Rightarrow AB = \frac{1}{\sqrt{3}}AC$

আবার, ΔACD এ, $\frac{AC}{\sin 60^\circ} = \frac{AD}{\sin 90^\circ} \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{3}}{2}AD$

$\therefore \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = (AB + \sqrt{3}AC + AD)\frac{\overrightarrow{AD}}{AD} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)\overrightarrow{AD} = 3\ AD$

Alternate: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}) + (\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF})$

$\overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}) + (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF}) = 3\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} = 3\overrightarrow{AD}$

[কিন্তু $AB || DE, AB = DE$, কারণ সুষম ষড়ভুজ বলে $\therefore \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{DE}$ এবং $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{EF}$]

05. $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ এবং $\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় কোন সামান্তরিকের দুটি সন্নিহিত বাহু নির্দেশ করলে, তার ক্ষেত্রফল হবে- **[CUET'15-16]**

(a) $3\sqrt{3}$ (b) $5\sqrt{3}$ (c) $5\sqrt{5}$ (d) $3\sqrt{5}$

সমাধান: (b); $\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -\hat{i} + 5\hat{j} + 7\hat{k}$ $\therefore$ ক্ষেত্রফল $= \sqrt{1 + 25 + 49} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

06. যদি p + q = p − q হয় তবে p এবং q ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ কোনটি? [BUTex'14-15]

(a) 0° (b) 90° (c) 120° (d) 180°

সমাধান: (b); $\vec{p}+\vec{q}=\vec{p}-\vec{q} \Rightarrow (\vec{p}+\vec{q}).(\vec{p}+\vec{q})=(\vec{p}-\vec{q}).(\vec{p}-\vec{q})$

$\Rightarrow p^2+2\vec{p}.\vec{q}+q^2=p^2-2\vec{p}.\vec{q}+q^2 \Rightarrow 4\vec{p}.\vec{q}=0 \Rightarrow \vec{p}.\vec{q}=0 \Rightarrow \vec{p}\perp\vec{q}$

07. $\vec{A},\vec{B}$ ও $\vec{C}$ ভেক্টর হলে নিচের কোনটি অর্থবহ নহে ? [Ans: c] [RUET'14-15]

(a) $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$ (b) $\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C})$ (c) $\vec{A}.(\vec{B}.\vec{C})$ (d) $\vec{A}+(\vec{B}\times\vec{C})$ (e) $(\vec{A}.\vec{B}+\vec{B}.\vec{C})$

08. $\vec{A}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ ও $\vec{B}=2\vec{i}+10\vec{j}-11\vec{k}$ দ্বারা গঠিত সমতলের উপর একক লম্ব ভেক্টর কোনটি? [RUET'14-15]

(a) $\frac{1}{\sqrt{29}}(2\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k})$ (b) $\frac{4}{\sqrt{29}}(2\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k})$

(c) $\frac{4}{\sqrt{29}}(4\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k})$ (d) $\frac{1}{\sqrt{29}}(-4\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k})$ (e) $\frac{1}{\sqrt{29}}(-4\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k})$

সমাধান: (d); $\vec{A}=2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ ও $\vec{B}=2\hat{i}+10\hat{j}-11\hat{k}; \vec{A}\times\vec{B}=-32\hat{i}+24\hat{j}+16\hat{k}$

$\therefore$ একক লম্ব ভেক্টর $=\frac{\vec{A}\times\vec{B}}{|\vec{A}\times\vec{B}|}=\frac{1}{\sqrt{29}}(-4\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k})$

09. যদি $\underline{A}=2\underline{i}-\underline{j}+3\underline{k}, \underline{B}=3\underline{i}+4\underline{j}-5\underline{k}$ হয়, তাহলে $\underline{B}$ ভেক্টরের উপর $\underline{A}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ হচ্ছে-

[KUET'05-06,09-10, BUET'08-09,10-11,12-13,13-14]

(a) $\frac{-13\sqrt{2}}{10}$ (b) $\frac{13}{7}$ (c) $\frac{-13}{10\sqrt{7}}$ (d) $\frac{7}{5\sqrt{2}}$

সমাধান: $A\cos\theta=\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{B}|}=\frac{2\times3+4(-1)+3\times(-5)}{\sqrt{3^2+4^2+(-5)^2}}=-\frac{13\sqrt{2}}{10}$

10. $\vec{P}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$ এবং $\vec{Q}=3\vec{i}-6\vec{j}-2\vec{k}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের মান হবে-

[KUET'05-06,CUET'11-12,RUET'13-14,BUET'02-03,10-11,13-14]

(a) $\cos^{-1}\frac{21}{8}$ (b) $\cos^{-1}\frac{8}{21}$ (c) $\sin^{-1}\frac{21}{8}$ (d) $\tan^{-1}\frac{8}{21}$

সমাধান: (b); $\alpha=\cos^{-1}\left(\frac{\vec{P}.\vec{Q}}{PQ}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{3\times2+6-4}{3\times7}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{8}{21}\right)$

11. ভেক্টর দুইটির অর্ন্তগত কোণ $A=\sqrt{2}\cos\alpha\hat{i}-\sqrt{2}\sin\alpha\hat{j}$ $B=-\sqrt{2}\cos\alpha\hat{j}+\sqrt{2}\sin\alpha\hat{k}$ $(0<\alpha<\pi/2)$

(a) $\pi/2-2\alpha$ (b) $\pi-2\alpha$ (c) $\pi-\alpha$ (d) $\cos^{-1}(\sin\alpha\cos\alpha)$ (e) None

সমাধান: (d); $\cos\theta=\frac{\vec{A}.\vec{B}}{A.B}=\frac{(\sqrt{2}\cos\alpha\hat{i}-\sqrt{2}\sin\alpha\hat{j})(-\sqrt{2}\cos\alpha\hat{j}+\sqrt{2}\sin\alpha\hat{k})}{\sqrt{(\sqrt{2}\cos\alpha)^2+(-\sqrt{2}\sin\alpha)^2}.\sqrt{(-\sqrt{2}\cos\alpha)^2+(\sqrt{2}\sin\alpha)^2}}.$

$=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{2}.\sqrt{2}}$ $[i.j=0; i.k=0; j.k=0]$ $=\sin\alpha\cos\alpha$ $\therefore\theta=\cos^{-1}(\sin\alpha\cos\alpha)$ **[KUET'12-13]**

12. a এর মান কত হলে $A=a\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}$ ভেক্টরটি x − অক্ষের সাথে 30^0 কোণ উৎপন্ন করে? [SUST'12-13]

(a) $-3\sqrt{3}$ (b) $\sqrt{(3/2)}$ (c) $\sqrt{3}$ (d) $3\sqrt{3}$ (e) $5\sqrt{3}$

সমাধান: প্রশ্নমতে, $\frac{a}{\sqrt{a^2+4^2+3^2}}=\cos30°$

$\therefore\ \frac{a^2}{a^2+25}=\frac{3}{4}$ $\therefore\ 4a^2=3a^2+75$ $\therefore\ a^2=75$ $\therefore\ a=5\sqrt{3}$

13. $\overline{A}=\hat{i}-3\hat{j}-8\hat{k}$ এবং $\overline{B}=8\hat{i}-2\hat{j}-3\hat{k}$ হলে $|3\overline{A}+2\overline{B}|$ এর মান কত? **[BUTEX'11-12]**

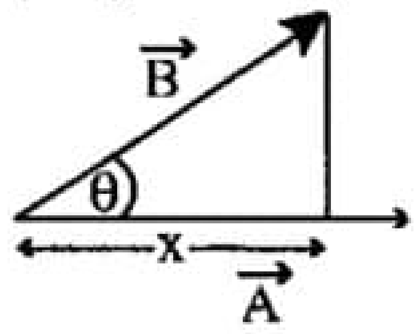
(a) 359 (b) 720 (c) 719 (d) 358 (e) None

সমাধান: $3\vec{A}+2\vec{B}=19\hat{i}-13\hat{i}-30\hat{k}$ $\therefore|3\vec{A}+2\vec{B}|=\sqrt{19^2+13^2+30^2}=\sqrt{1430}$

14. $\overline{A}$ এর দিক বরাবর $\overline{B}$ ভেক্টরের উপাংশের দৈর্ঘ্য- [BUTex'11-12]

(b) $|\vec{A}|\cos\theta$ (b) $|\vec{B}|\cos\theta$ (c) $|\vec{B}|\sin\theta$ (d) $|\vec{A}|\sin\theta$

সমাধান: (b); $\frac{x}{|\vec{B}|} = \cos\theta \quad \therefore x = |\vec{B}|\cos\theta$



15. XOZ তলের সমান্তরাল এবং $3\underline{i} - \underline{j} + 4\underline{k}$ ভেক্টরের সাথে লম্ব একক ভেক্টরটি হবে- [BUET'10-11]

(a) $4\underline{i} - 3\underline{k}$ (b) $\frac{1}{5}(4\underline{i} - 3\underline{k})$ (c) $\frac{1}{5}(3\underline{i} - 4\underline{k})$ (d) $\underline{j}$

সমাধান: XOZ তলের সমান্তরাল $\therefore \hat{i}$ এবং $\hat{k}$ উপাংশ থাকবে $\therefore$ লম্ব সেহেতু ডট গুণফল শূন্য

$\therefore$ (b) option গ্রহণযোগ্য। [$\because$ লম্ব একক vector, সেহেতু (b)]

16. দুটি ভেক্টর $\overline{P} = 2\overline{i} - 3\overline{j} - \overline{k}$ এবং $\overline{Q} = \overline{i} + 4\overline{j} - 2\overline{k}$ দ্বারা গঠিত সমতলের উপর একক লম্ব ভেক্টর কত? [CUET'10-11]

(a) $\frac{1}{\sqrt{134}}(2\overline{i} + 3\overline{j} + 11\overline{k})$ (b) $\frac{1}{\sqrt{19}}(3\overline{i} + \overline{j} - 3\overline{k})$

(c) $\frac{1}{\sqrt{51}}(\overline{i} - 7\overline{j} + \overline{k})$ (d) None of these

সমাধান: (d) ; $\vec{P} \times \vec{Q} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = \hat{i}(6+4) + \hat{j}(-1+4) + \hat{k}(8+3) \quad = 10\hat{i} + 3\hat{j} + 11\hat{k}$

$|\vec{P} \times \vec{Q}| = \sqrt{10^2 + 3^2 + 11^2} = \sqrt{230}$ $\therefore$ নির্ণেয় একক ভেক্টর $= \pm\frac{\vec{P}\times\vec{Q}}{|\vec{P}\times\vec{Q}|} = \pm\frac{1}{\sqrt{230}}(10\hat{i} + 3\hat{j} + 11\hat{k})$

17. যদি $\overline{u} = 4\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\overline{v} = \lambda\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হয়, হবে λ এর মান কোনটি?

[KUET'06-07,SUST'10-11,CUET'10-11,BUTex'10-11]

(a) -3 (b) 2 (c) $\frac{13}{4}$ (d) 1

সমাধান: (c) ; $4\lambda - 4 - 9 = 0, \; 4\lambda = 13 \Rightarrow \lambda = \frac{13}{4}$