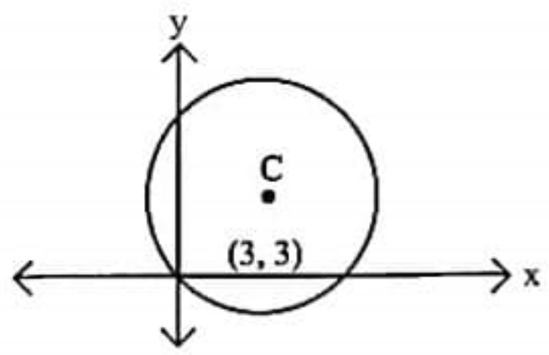
Question Type-01: বৃত্তের কেন্দ্র, ব্যাসার্ধ নির্ণয়

➲ **Formula & Concept:** বৃত্তের কেন্দ্র $\left(\frac{x\text{ এর সহগ}}{-2}, \frac{y\text{ এর সহগ}}{-2}\right)$ এবং ব্যাসার্ধ, $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$; বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$

MCQ

01. In the following circle, the area is Kπ, what is the value of K? **[IUT'17-18]**

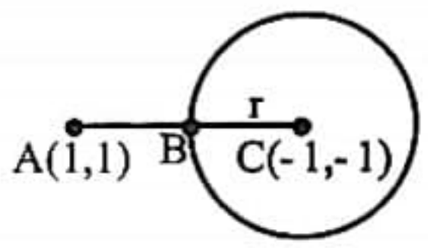


(a) 3 (b) 6 (c) 9 (d) 18

Solution: (d); $r = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$ $\therefore K\pi = 18\pi \Rightarrow K = 18$

02. (1, 1) বিন্দু হতে $x^2 + y^2 + 2(x + y) = 0$ বৃত্তের উপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর? **[BUTEX'11-12]**

(a) $\sqrt{5}$ (b) $\sqrt{6}$ (c) $\sqrt{7}$ (d) কোনটিই নয়



সমাধান: (d); $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 0$

কেন্দ্র, $C(-1, -1)$; ব্যাসার্ধ $r = \sqrt{2}$; $AC = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$; $BC = r = \sqrt{2}$

$\therefore AB = AC - BC = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$ একক; যা অপশনে নেই।

03. 154 বর্গ একক ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসদ্বয় $2x - 3y = 5$ এবং $3x - 4y = 7$ হলে বৃত্তের সমীকরণ হবে-

(a) $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 62$ (b) $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 47$ **[RUET'10-11, KUET'08-09]**

(c) $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 47$ (d) $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 62$ (e) None

সমাধান: (c); $2x - 3y = 5, 3x - 4y = 7$

সমাধান করে পাই, বৃত্তের কেন্দ্র; $(1, -1)$; $\pi r^2 = 154 \therefore r = 7$

$\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ, $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 49 \therefore x^2 + y^2 - 2x + 2y - 47 = 0$

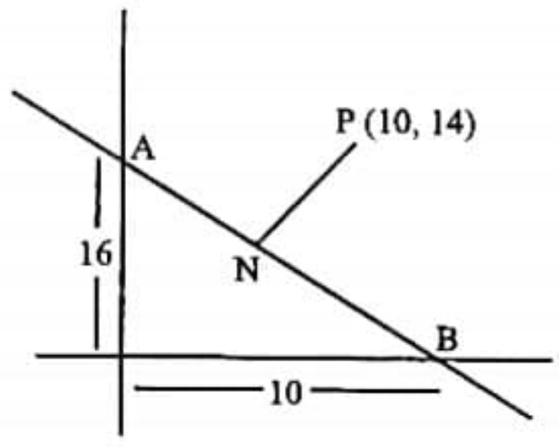
Written

04. r এর মান কত হলে r ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট শুধুমাত্র একটিই বৃত্ত পাওয়া যাবে যা (6, 7) ও (12, 13) বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

সমাধান: যেহেতু শুধুমাত্র বৃত্তটি প্রদত্ত বিন্দু ২টি দিয়ে যায়, তাই বিন্দু ২টি ব্যাসের প্রান্ত বিন্দু হবে। **[RUET'06-07]**

$r = \frac{1}{2}\sqrt{(6 - 12)^2 + (7 - 13)^2} = 3\sqrt{2}$

05. পার্শ্বের চিত্রে AB এর উপর PN লম্ব । PN এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। আবার এমন একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা N বিন্দুতে AB কে স্পর্শ করে। **[BUET'02-03]**



সমাধান: AB রেখার সমীকরণ, $\frac{x}{10} + \frac{y}{16} = 1 \Rightarrow 16x + 10y = 160 \Rightarrow 8x + 5y = 80$

$\therefore PN = \frac{|8\times10+5\times14-80|}{\sqrt{8^2+5^2}} = \frac{70}{\sqrt{89}}$

বৃত্তের সমীকরণ, $(x - 10)^2 + (y - 14)^2 = \left(\frac{70}{\sqrt{89}}\right)^2 \Rightarrow x^2 - 20x + 100 + y^2 - 28y + 196 = \frac{4900}{89}$

$\Rightarrow 89x^2 + 89y^2 - 1780x - 2492y + 21444 = 0$ **(Ans.)**

Question Type-02: বৃত্ত হওয়ার শর্ত

➲ **Formula & Concept:**

বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, কেন্দ্র $(-g, -f)$, ব্যাসার্ধ $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

এখানে, (i) সমীকরণটি x ও y এর দ্বিঘাত (ii) x^2 ও y^2 এর সহগ সমান [কিন্তু শূন্য নয়] (iii) কোনো xy সম্বলিত পদ নেই

বি.দ্রঃ যদি $g^2 + f^2 - c \geq 0$ হয়, তবে তা বাস্তব বৃত্ত হবে।

MCQ

01. $p^2x^2 + 2px + qy + p^2y^2 = 0$ সমীকরণটি দ্বারা কি নির্দেশ করে? **[BUTEX'14-15]**

(a) একজোড়া সরল রেখা (b) বৃত্ত (c) পরাবৃত্ত (d) উপবৃত্ত

সমাধান: (b); কারণ x^2 ও y^2 এর সহগ একই এবং xy বিশিষ্ট কোন পদ নেই।

02. k এর কোন মানের জন্য $(x - y + 3)^2 + (kx + 2)(y - 1) = 0$ সমীকরণটি একটি বৃত্ত নির্দেশ করে? **[CUET'11-12]**

(a) 2 (b) –1 (c) 2 (d) None of these

সমাধান: (a, c); $(x - y + 3)^2 + (kx + 2)(y - 1) = 0$

বা, $x^2 + y^2 + 9 - 2xy - 6y + 6x + kxy - kx + 2y - 2 = 0$

বা, $x^2 + y^2 + (6 - k)x - 4y + (k - 2)xy + 7 = 0$

কিন্তু বৃত্তের ক্ষেত্রে xy যুক্ত কোন পদ থাকতে পারবে না। $\therefore k - 2 = 0 \therefore k = 2$

Question Type-03: বৃত্তের কেন্দ্র দেওয়া আছে এবং অন্য কোনো বিন্দু দিয়ে যায়

➲ **Formula & Concept:** কেন্দ্র (h, k) এবং (x_1, y_1) বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ হলো,

$$\boxed{(x - h)^2 + (y - k)^2 = (x_1 - h)^2 + (y_1 - k)^2}$$

Written

01. একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার কেন্দ্র (4, 5) বিন্দুতে অবস্থিত এবং যা $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র দিয়ে যায়। **[BUTEX'06-07]**

সমাধান: $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + 2(-3)y - 12 = 0 \therefore$ কেন্দ্র $(-2, 3)$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= \sqrt{(4 + 2)^2 + (5 - 3)^2} = \sqrt{36 + 4} = 2\sqrt{10}$

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ, $= (x - 4)^2 + (y - 5)^2 = \left(2\sqrt{10}\right)^2$

$\Rightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 - 10y + 25 = 40 \Rightarrow x^2 + y^2 - 8x - 10y + 1 = 0$ (Ans.)

Question Type-04: অক্ষকে স্পর্শ করলে চিত্রের সাহায্য নিয়ে বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয়ের সহজ পদ্ধতি

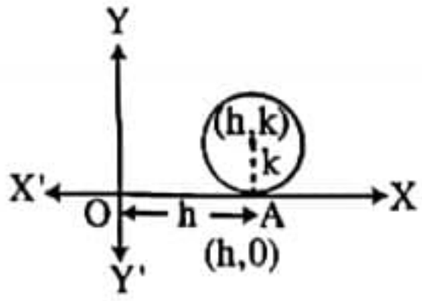
➲ **Formula & Concept:**

♦ x-অক্ষকে স্পর্শ করার শর্ত: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ ব্যবহার করলে,

➢ বৃত্তের কেন্দ্রের কোটি = বৃত্তের ব্যাসার্ধ $[|k| = r]$

➢ বৃত্তের কেন্দ্রের ভুজ = স্পর্শবিন্দুর ভুজ, স্পর্শ বিন্দু $A(h, 0)$

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ সমীকরণ ব্যবহার করলে, $\boxed{c = g^2}$

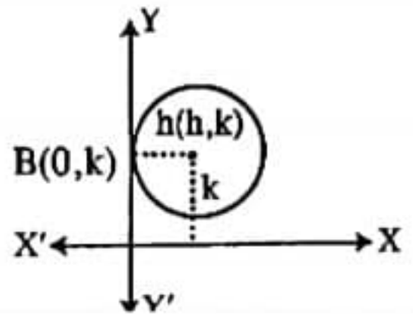


♦ y-অক্ষকে স্পর্শ করার শর্ত: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ ব্যবহার করলে,

➢ বৃত্তের কেন্দ্রের ভুজ = বৃত্তের ব্যাসার্ধ $[|h| = r]$

➢ বৃত্তের কেন্দ্রের কোটি = স্পর্শ বিন্দুর কোটি, স্পর্শ বিন্দু $[B(0, k)]$

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ সমীকরণ ব্যবহার করলে, $\boxed{c = f^2}$



01. y-অক্ষকে স্পর্শ করে এবং $(3,0)$ ও $(7,0)$ বিন্দুদ্বয় দিয়ে গমনকারী বৃত্তগুলোর সমীকরণ নির্ণয় কর।

[BUET'13-14, RUET'07-08, 17-18; CKRUET'20-21]

(a) $x^2+y^2-10x\pm\sqrt{21}y+21=0$ (b) $x^2+y^2-10x\pm2\sqrt{21}y+21=0$

(c) $x^2+y^2-10x+2\sqrt{21}y\pm21=0$ (d) $x^2+y^2-10x\pm\sqrt{21}y+\sqrt{21}=0$

(e) $x^2+y^2-10x\pm\sqrt{21}y-\sqrt{21}=0$

সমাধান: (b); y অক্ষকে স্পর্শ করলে, $c=f^2$

সমীকরণ, $x^2+y^2+2gx+2fy+f^2=0$

$(3,0)\Rightarrow 9+0+6g+0+f^2=0\Rightarrow 6g+f^2=-9$ ..... (i)

$(7,0)\Rightarrow 49+0+14g+0+f^2=0\Rightarrow 14g+f^2=-49$ ..... (ii)

(ii) $-$ (i) $\Rightarrow 8g=-40\Rightarrow g=-5$

$\therefore f^2=-9-6(-5)=21\Rightarrow f=\pm\sqrt{21}$

$\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ, $x^2+y^2-10x\pm2\sqrt{21}y+21=0$

02. If the circle $x^2+y^2+8x+2ky+c=0$ touches both the axes then possible valued of k and c are-

(a) $k=8,c=4$ (b) $k=8,c=16$ (c) $k=\pm4,c=16$ (d) $k=\pm4,c=4$ **[IUT'19-20]**

Solution: (c); $g=4,f=k$ if the circle touches both the axes then, $c=g^2=f^2$

Now, $c=g^2=4^2=16$, Again $c=f^2\Rightarrow 16=k^2$ [$\because f=k$] $\Rightarrow k=\pm4\therefore k=\pm4,c=16$

03. $x^2+y^2-4x+6y+c=0$ বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে। c এর মান কত? **[BUTEX'16-17]**

(a) 4 (b) 5 (c) 7 (d) 11

সমাধান: (a); $g=-2$, x-অক্ষকে স্পর্শ করলে, $c=g^2\Rightarrow c=4$

04. একটি বৃত্ত y-অক্ষকে মূলবিন্দুতে স্পর্শ করে এবং $(3,-4)$ বিন্দু দিয়া অতিক্রম করে, বৃত্তটির সমীকরণ কোনটি? **[KUET'10-11]**

(a) $3x^2+y^2=10x$ (b) $4x^2+y^2=x$ (c) $x^2+3y^2=7x$

(d) $3x^2+y^2=5x$ (e) $3x^2+3y^2=25x$

সমাধান: (e); $f^2=c\therefore x^2+y^2+2gx+2fy+f^2=0$ যা, $(0,0)$ ও $(3,-4)$ বিন্দুগামী

$f^2=c=0\therefore x^2+y^2+2gx=0$ যা $(3,-4)$ বিন্দুগামী

$9+16+6g=0;6g=-25;g=-\frac{25}{6}\therefore x^2+y^2-\frac{25}{3}x=0\therefore 3x^2+3y^2-25x=0$

05. k-এর কোন মানের জন্য $x^2+y^2+kx+2y+25=0$, বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে? **[CUET'10-11]**

(a) 5 (b) -5 (c) 10 (d) None of these

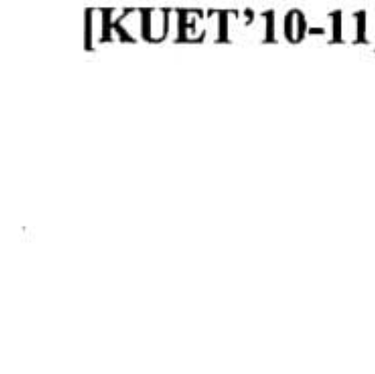
সমাধান: (c); $2\sqrt{g^2-c}=0\Rightarrow g^2=c\Rightarrow\left(\frac{k}{2}\right)^2=25\Rightarrow\frac{k}{2}=\pm5\therefore k=\pm10$

Written

06. একটি বৃত্ত x অক্ষকে মূলবিন্দুতে স্পর্শ করে এবং $(1,3)$ বিন্দু দিয়ে যায়, তার সমীকরণ নির্ণয় কর। **[BUTEX'18-19]**

সমাধানঃ মনে করি কেন্দ্র $(0,k)$

যেহেতু বৃত্তটি X অক্ষকে মূলবিন্দুতে স্পর্শ করে সুতরাং কেন্দ্র Y অক্ষে অবস্থিত এবং কেন্দ্রের কোটি = বৃত্তের ব্যাসার্ধ



শর্তমতে, $k=\sqrt{(0-1)^2+(k-3)^2}\Rightarrow k^2=1+k^2-6k+9\Rightarrow 6k=10\Rightarrow k=\frac{5}{3}$

$\therefore$ বৃত্তটির সমীকরণ, $x^2+\left(y-\frac{5}{3}\right)^2=\frac{25}{9}$ **[Ans.]**

07. একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা x-অক্ষকে স্পর্শ করে এবং $(1,1)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং যার কেন্দ্র প্রথম চতুর্ভাগে $x+y=3$ রেখার উপর অবস্থিত। **[BUTEX'07-08, BUET'16-17]**

সমাধান: ধরি, বৃত্তটির সমীকরণ: $x^2+y^2+2gx+2fy+g^2=0$ ..... (i)

বৃত্তটি $(1,1)$ বিন্দুগামী। $\therefore 1+1+2g+2f+g^2=0 \Rightarrow 2+2(g+f)+g^2=0$ ..... (ii)

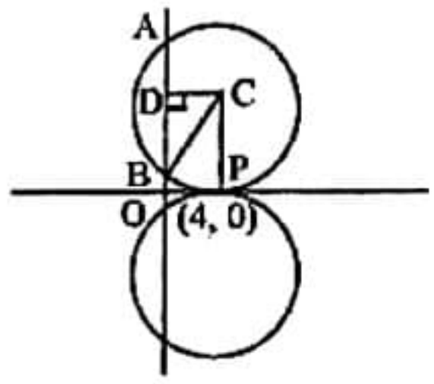
বৃত্তটির কেন্দ্র $x+y=3$ এর উপর অবস্থিত। $\therefore -g-f=3 \Rightarrow g+f=-3$ ..... (iii)

$\therefore$ (ii) $\Rightarrow 2+2(-3)+g^2=0 \Rightarrow g^2=4 \ \therefore g=-2$ [$\because$ কেন্দ্র ১ম চতুর্ভাগে]

(iii) $\Rightarrow -2+f=-3 \ \therefore f=-1 \ \therefore$ বৃত্তটি $x^2+y^2-4x-2y+4=0$

08. একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা x-অক্ষকে $(4,0)$বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং y-অক্ষ হতে 6 একক দীর্ঘ একটি জ্যা খণ্ডিত করে। **[KUET'05-06, BUET'02-03, 11-12]**

সমাধান: $CD \perp AB$ আঁকি



এখানে, $BD=\frac{6}{2}=3$ [নিয়মটা সুন্দর কিন্তু অনেকের বোধগম্য নাও হতে পারে]

[কারণ লম্ব জ্যাকে সমদ্বিখন্ডিত করে]; $CD=4$

$\therefore CB=\sqrt{4^2+3^2}=5=CP \ \therefore$ কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(4,\pm5)$ এবং ব্যাসার্ধ $=5$

$\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ ঃ $(x-4)^2+(y\pm5)^2=5^2$

09. এমন বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যা উভয় অক্ষকে স্পর্শ করে এবং $(1,8)$ বিন্দু দিয়ে গমন করে। **[CUET'08-09]**

সমাধান: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$; a ব্যাসার্ধ হলে, এক্ষেত্রে, $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$

$(1,8)$ বিন্দুগামী বলে, $(1-a)^2+(8-a)^2=a^2 \therefore a^2-18a+65=0 \ \therefore a=13,5$

সমীকরণ, $(x-13)^2+(y-13)^2=13^2$ এবং $(x-5)^2+(y-5)^2=5^2$ (Ans.)

10. $x^2+y^2-4x-6y+c=0$ বৃত্তটি x অক্ষকে স্পর্শ করলে c এর মান এবং স্পর্শবিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় কর। **[KUET'03-04]**

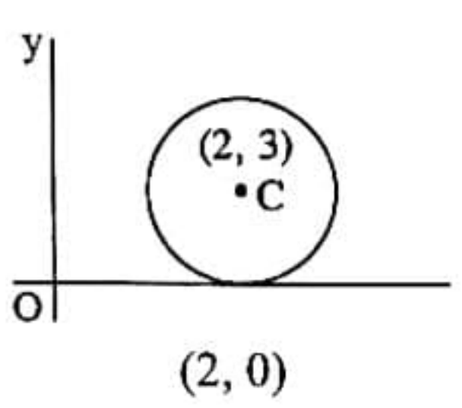
সমাধান: $x^2+y^2-4x-6y+c=0$ কেন্দ্র $\equiv(2,3)$

x অক্ষকে স্পর্শ করায়, $2\sqrt{g^2-c}=0 \Rightarrow g^2=c \Rightarrow c=2^2=4$ (Ans.)

$x^2+y^2-4x-6y+4=0$

x অক্ষে $y=0 \ \therefore x^2-4x+4=0$

$\Rightarrow (x-2)^2=0 \Rightarrow x=2 \ \therefore$ স্পর্শবিন্দু $=(2,0)$ (Ans)



Question Type-05: বৃত্ত x ও y অক্ষ থেকে কী পরিমাণ অংশ ছেদ করে তা নির্ণয়

➲ **Formula & Concept:**

$x^2+y^2+2gx+2fx+c=0$ বৃত্তের

x অক্ষ থেকে খণ্ডিত অংশ $=2\sqrt{g^2-c}$

y অক্ষ থেকে খণ্ডিত অংশ $=2\sqrt{f^2-c}$

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ বৃত্তের

x অক্ষ থেকে খণ্ডিত অংশ $=2\sqrt{r^2-k^2}$

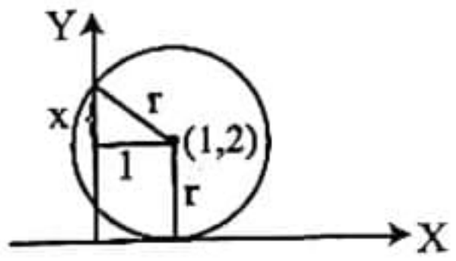
y অক্ষ থেকে খণ্ডিত অংশ $=2\sqrt{r^2-h^2}$

MCQ

01. $(1,2)$ কেন্দ্র বিশিষ্ট একটি বৃত্ত x-অক্ষকে স্পর্শ করে। y-অক্ষ হতে বৃত্তটি দ্বারা খণ্ডিত অংশের পরিমাণ কত? **[BUTEX'15-16]**

(a) $\sqrt{3}$ (b) $2\sqrt{2}$ (c) $2\sqrt{3}$ (d) 3

সমাধান: (c);



ব্যাসার্ধ, $r=2, \ x^2=r^2-1^2=2^2-1^2=3 \Rightarrow x=\sqrt{3} \therefore$ y-অক্ষ হতে বৃত্তটি দ্বারা খন্ডিত অংশ $=2\sqrt{3}$

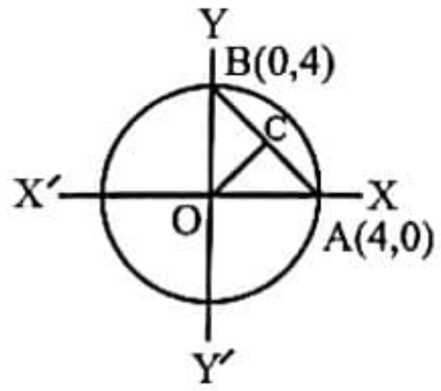
02. একটি বৃত্তের সাধারণ সমীকরণের x-অক্ষের খন্ডিত অংশের পরিমাণ- **[Ans: c][BUTEX'12-13]**

(a) $2\sqrt{g^2+c}$ (b) $2\sqrt{f^2+c}$ (c) $2\sqrt{g^2-c}$ (d) $2\sqrt{f^2-c}$

03. $x^2+y^2=16$ বৃত্তটি x ও y অক্ষকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। বৃত্তটির কেন্দ্র থেকে AB এর উপর অঙ্কিত লম্বদূরত্বকে একটি বর্গের বাহু বিবেচনা করলে বর্গটির ক্ষেত্রফল কত হবে? **[CUET'11-12]**

(a) 4 sq. unit (b) 6 sq. unit (c) 8 sq. unit (d) None of these

সমাধান: (c); $x^2+y^2=16$ বৃত্তটি x অক্ষকে $A(4,0)$ ও y অক্ষকে $B(0,4)$ বিন্দুতে ছেদ করে।



$\therefore$ AB রেখার সমীকরণ $4x+4y=16 \Rightarrow x+y=4$

$\therefore O(0,0)$ হতে AB রেখার লম্ব দূরত্ব= $\frac{|0+0-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}$

$\therefore OC=2\sqrt{2}$

$\therefore$ OC কে একটি বর্গের বাহু ধরে অঙ্কিত বর্গের ক্ষেত্রফল $OC^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2=8$ sq unit

Written

04. C কেন্দ্রবিশিষ্ট $x^2+y^2+6x-4y+4=0$ বৃত্তটি x-অক্ষকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। x-অক্ষের খণ্ডিতাংশ AB এবং ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **[BUET'14-15]**

সমাধান: $x^2+y^2+6x-4y+4=0$

এখানে, $g=3,\ f=-2,\ c=4$

$AB=2\sqrt{g^2-c}=2\sqrt{3^2-4}=2\sqrt{5}$ (Ans.)

A ও B বিন্দুর কোটি 0।

এখন, $x^2+6x+4=0 \Rightarrow x=\frac{-6\pm2\sqrt{5}}{2} \therefore x=-3\pm\sqrt{5}\ ;\ C\equiv(-3,2)$

এখন, $\Delta ABC=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}-3 & 2 & 1\\ -3+\sqrt{5} & 0 & 1\\ -3-\sqrt{5} & 0 & 1\end{vmatrix}$

$=\frac{1}{2}\left[-3(0-0)-2\left(-3+\sqrt{5}+3+\sqrt{5}\right)+1(0-0)\right]=\frac{1}{2}\times(-2)\left[2\sqrt{5}\right]=2\sqrt{5}$ বর্গ একক (Ans.)

05. (2, 3) কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্ত উল্লম্ব অক্ষকে স্পর্শ করে এরূপ বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর। বৃত্তটির y-অক্ষে কর্তিত জ্যা এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। **[BUTEX'03-04]**

সমাধান: কেন্দ্রে (2, 3), কেন্দ্রের ভুজ = |ব্যাসার্ধ| $\therefore (x-2)^2+(y-3)^2=2^2$

$\Rightarrow x^2-4x+4+y^2-6y+9=4 \Rightarrow x^2+y^2-4x-6y+9=0$ (Ans.)

y-অক্ষ হতে কর্তিত জ্যা এর পরিমাণ, $2\sqrt{(3)^2-9}=0$ **(Ans.)**

Question Type-06: ব্যাসের প্রান্তবিন্দু দেওয়া থাকলে তা থেকে বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় সংক্রান্ত

➲ **Formula & Concept:**

$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ ব্যাসের প্রান্তবিন্দু হলে বৃত্তের সমীকরণ, $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$

MCQ

01. $(0,-1)$ এবং $(2,3)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোগ রেখাকে ব্যাস ধরে অংকিত বৃত্তটি x-অক্ষ থেকে যে পরিমাণ অংশ ছেদ করে তা হচ্ছে-

(a) 4 (b) 2 (c) 3 (d) $3\sqrt{2}$ **[BUET'10-11, CUET'13-14]**

সমাধান: $x(x-2)+(y+1)(y-3)=0 \Rightarrow x^2-2x+y^2-2y-3=0 \Rightarrow x^2+y^2-2x-2y-3=0$

$\therefore$ x অক্ষ থেকে ছেদক অংশ, $2\sqrt{g^2-c}=2\sqrt{1^2+3}=4$

Question Type-07: তিন বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয়

➲ **Formula & Concept:** কোনো বৃত্ত $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ এবং $C(x_3, y_3)$ বিন্দুগামী হলে,

➢ বৃত্তের সমীকরণ ধরতে হবে, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ... ... (i)

➢ (i) নং বৃত্তটিকে A, B এবং C বিন্দু দ্বারা সিদ্ধ করলে 3 টি সমীকরণ পাওয়া যাবে (g, f, c যুক্ত)।

➢ সমীকরণ তিনটিকে সমাধান করে g, f, c এর মান নির্ণয় করতে হবে।

➢ g, f, c এর মান (i)-এ বসালে নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করা যাবে।

Shortcut: $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ এবং $C(x_3, y_3)$ বিন্দুগামী বৃত্তের সমীকরণ,

$$\frac{(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)}{(x-x_1)(y_1-y_2)-(y-y_1)(x_1-x_2)} = \frac{(x_3-x_1)(x_3-x_2)+(y_3-y_1)(y_3-y_2)}{(x_3-x_1)(y_1-y_2)-(y_3-y_1)(x_1-x_2)}$$

Written

01. $A(2a, 0)$ এবং $B(-a, 0)$ বিন্দু দুইটির মধ্য দিয়ে গমনকারী দুইটি রেখা y-অক্ষের উপর C বিন্দুতে লম্বভাবে ছেদ করে। C এর স্থানাঙ্ক এবং ABC বৃত্তের সমীকরণ বের কর। **[RUET'19-20]**

সমাধান: C বিন্দু $(0, b)$ এখন, $\frac{b-0}{0-2a} \times \frac{b-0}{0+a} = -1 \Rightarrow \frac{b^2}{-2a^2} = -1 \Rightarrow b^2 = 2a^2 \Rightarrow b = \pm\sqrt{2}a$

ABC বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

$A(2a, 0)$ বসিয়ে, $4a^2 + 4ag + c = 0$ ... ... (i) এবং $B(-a, 0)$ বসিয়ে, $a^2 - 2ag + c = 0$ ... ... (ii)

$C(0, b)$ বসিয়ে, $b^2 + 2fh + c = 0$ ... ... (iii)

(i) − (ii) $\Rightarrow 3a^2 + 6ag = 0 \Rightarrow a = -2g \Rightarrow g = \frac{-a}{2}$

g এর মান (ii) এ বসিয়ে, $a^2 + a^2 + c = 0 \Rightarrow c = -2a^2$

b^2, c এর মান (iii) এ বসিয়ে, $2a^2 + 2bf - 2a^2 = 0 \Rightarrow f = 0$

∴ সমীকরণ $x^2 + y^2 - ax - 2a^2 = 0$ এবং C বিন্দু $(0, \pm\sqrt{2}a)$

বিকল্প: যেকোন বৃত্তস্থ বিন্দু তার ব্যাসের (AB) সাথে সমকোণ উৎপন্ন করে, কাজেই বৃত্তস্থ বিন্দু (x,y) হলে ABC বৃত্তের সমীকরণ $\left(\frac{y-0}{x-2a}\right)\left(\frac{y-0}{x+a}\right) = -1 \Rightarrow \frac{y^2}{x^2-ax-2a^2} = -1 \Rightarrow y^2 = -x^2 + ax + 2a^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - ax - 2a^2 = 0.$

02. $A(5, 3), B(-2, 0)$ এবং $C(1, 1)$ বিন্দু তিনটি একটি বৃত্তের উপর অবস্থিত হলে বৃত্তের কেন্দ্র ও ত্রিভুজ ABC এর ভরকেন্দ্রের মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় কর। **[BUET'17-18]**

সমাধান: বৃত্তের কেন্দ্র $O(x_1, y_1)$ হলে, $OA = OC \Rightarrow \sqrt{(x_1-5)^2 + (y_1-3)^2} = \sqrt{(x_1-1)^2 + (y_1-1)^2}$

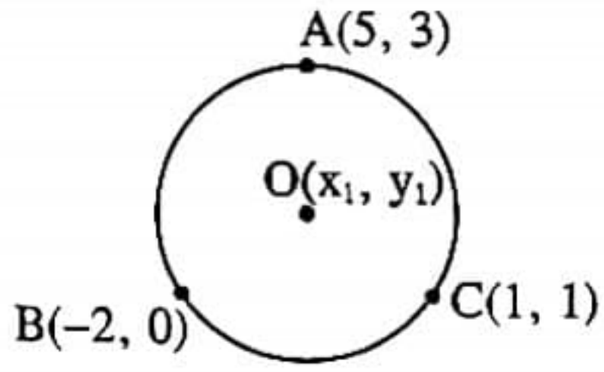
$\Rightarrow x_1^2 + y_1^2 - 10x_1 - 6y_1 + 34 = x_1^2 + y_1^2 - 2x_1 - 2y_1 + 2$

$\Rightarrow -8x_1 - 4y_1 + 32 = 0 \Rightarrow 2x_1 + y_1 - 8 = 0$ ... ... (i)

এবং $OA = OB \Rightarrow \sqrt{(x_1-5)^2 + (y_1-3)^2} = \sqrt{(x_1+2)^2 + (y_1-0)^2}$

$\Rightarrow x_1^2 + y_1^2 - 10x_1 - 6y_1 + 34 = x_1^2 + y_1^2 + 4x_1 + 4$

$\Rightarrow -14x_1 - 6y_1 + 30 = 0 \Rightarrow 7x_1 + 3y_1 - 15 = 0$



(i) নং ও (ii) নং সমীকরণ সমাধান করে পাই, $x_1 = -9;\ y_1 = 26$

এখন ΔABC এর ভরকেন্দ্র $O(x_2, y_2)$ হলে $x_2 = \frac{5+1-2}{3};\ y_2 = \frac{3+1+0}{3} \therefore D \equiv \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

সুতরাং মধ্যবর্তী দূরত্ব, $OD = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2} = \sqrt{\left(-9-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(26-\frac{4}{3}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{961}{9} + \frac{5476}{9}} = \frac{\sqrt{6437}}{3} = 26.74$ (প্রায়) **(Ans.)**

বিকল্প: $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ যা $(5,3), (-2,0), (1,1)$ বিন্দুগামী।

$\therefore 25 + 9 + 10g + 6f + c = 0 \Rightarrow 10g + 6f + c = -34 \cdots$ (i)

$\therefore 4 + 0 - 4g + 0 + c = 0 \Rightarrow -4g + c = -4 \cdots$ (ii)

$\therefore 1 + 1 + 2g + 2f + c = 0 \Rightarrow 2g + 2f + c = -2 \cdots$ (iii)

Solving (i) × (ii) × (iii), $g = 9 \Rightarrow f = -26 \Rightarrow c = 32$

$\therefore$ কেন্দ্র $(-9, 26)$

ΔABC এর ভরকেন্দ্র $= \left(\frac{5-2+1}{3}, \frac{3+0+1}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$

$\therefore$ কেন্দ্র ও ভরকেন্দ্রের মধ্যবর্তী দূরত্ব, $= \sqrt{\left(-9 - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(26 - \frac{1}{3}\right)^2} = 26.74$ প্রায়।

Question Type-08: বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় যার কেন্দ্র বিভিন্ন রেখার উপর অবস্থিত

➲ **Formula & Concept:** এক্ষেত্রে বৃত্তের সাধারণ সমীকরণঃ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ এই সমীকরণ এবং প্রদত্ত বিভিন্ন শর্ত দ্বারা সিদ্ধ করে g, f, c এর মান বের করলেই উত্তর চলে আসবে। কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক দেয়া থাকলে, $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ ব্যবহার সুবিধাজনক।

MCQ

01. A circle passes through the origin & the point (4, 2) and its centre is on the line $x + y = 1$. The equation of the circle is- **[IUT'16-17]**

(a) $x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0$ (b) $x^2 + y^2 - x - 8y = 0$

(c) $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$ (d) $x^2 + y^2 - 2x - 6y = 0$

Solution: (c); $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy = 0$

That passes through point $(4,2) \therefore 20 + 8g + 4f = 0$

Again, centre $(-g, -f)$; $g + f + 1 = 0 \therefore g = -4, f = 3$

Ans. $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$

Written

02. (1, 1) বিন্দুগামী একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা x অক্ষকে স্পর্শ করে এবং যার কেন্দ্র $x + y = 3$ রেখার উপর প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থিত। **[BUTEX'07-08, BUET'15-16]**

সমাধান: ধরি বৃত্তের কেন্দ্র $(h,k) \therefore$ ব্যাসার্ধ= k

শর্তমতে, $\sqrt{(h-1)^2 + (k-1)^2} = k$ অথবা, $h^2 - 2h + 1 + k^2 - 2k + 1 = k^2$

অথবা, $h^2 - 2h - 2k + 2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (i); $x + y = 3$ রেখার উপর কেন্দ্র (h,k) অবস্থিত।

$\therefore h + k = 3$ অথবা, $h = 3 - k \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (ii); (i) $\Rightarrow (3-k)^2 - 2(3-k) - 2k + 2 = 0$

অথবা, $9 - 6k + k^2 - 6 + 2k - 2k + 2 = 0$ অথবা, $k^2 - 6k + 5 = 0 \Rightarrow k^2 - 5k - k + 5 = 0$

অথবা, $k(k-5) - 1(k-5) = 0$ অথবা, $(k-5)(k-1) = 0 \therefore k = 1,5$

(ii) $\Rightarrow h = 2, -2 \because$ কেন্দ্র প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থিত। $\therefore$ কেন্দ্র 2, 1 ব্যাসার্ধ= 1

$\therefore$ রেখাটির সমীকরণ $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1^2$ অথবা, $x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 1$

অথবা, $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ (Ans)

Question Type-09: সরলরেখা বৃত্তকে স্পর্শ করার শর্ত সংক্রান্ত

➲ **Formula & Concept:**

➢ $ax + by + c_1 = 0$ সরলরেখাটি $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের স্পর্শক হলে বৃত্তের কেন্দ্র $C(-g, -f)$ হতে $ax + by + c_1 = 0$ রেখার লম্ব দূরত্ব বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$ এর সমান হবে।

অর্থাৎ, $\therefore \frac{|-ag-bf+c_1|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{g^2 + f^2 - c} = r$

➢ $y = mx + c$ রেখাটি-

(a) $x^2 + y^2 = r^2$ বৃত্তকে স্পর্শ করার শর্ত, $c^2 = r^2(1 + m^2)$

(b) $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ বৃত্তকে স্পর্শ করার শর্ত, $(mh + c - k)^2 = r^2(1 + m^2)$

(c) $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c_1 = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করার শর্ত, $(c + f - mg)^2 = (g^2 + f^2 - c_1)(1 + m^2)$

MCQ

01. $x + y = 1$ রেখাটি $x^2 + y^2 = c$ এর একটি স্পর্শক হলে, c এর মান বের কর। **[CKRUET'21-22]**

(a) 1 (b) 2 (c) $\sqrt{2}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (e) $\frac{1}{2}$

সমাধান: **(e)**; $x + y = 1$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = c \Rightarrow x^2 + (1 - x)^2 = c \Rightarrow x^2 + 1 - 2x + x^2 = c \Rightarrow 2x^2 - 2x + 1 - c = 0 \therefore D = 0$

$\Rightarrow 4 - 4.2.(1 - c) = 0 \Rightarrow 4 + 8(c - 1) = 0 \Rightarrow 1 + 2(c - 1) = 0 \Rightarrow 1 + 2c - 2 = 0 \Rightarrow 2c = 1 \therefore c = \frac{1}{2}$

02. For what values of k, $3x - 4y = k$ will touch $x^2 + y^2 - 8x = 0$? **[IUT'11-12, 17-18]**

(a) $-8, 32$ (b) $-32, 8$ (c) $8, 32$ (d) $81, 3$

Solution: (a); Center (4,0), Radius = 4 $\therefore \left|\frac{3\times4-k}{5}\right| = 4 \Rightarrow 12 - k = \pm 20 \Rightarrow k = -8, 32$

03. কোন শর্তে $x + y = 1$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করবে? **[BUET'11-12, BUTEX'16-17]**

(a) $a^2 - 2a = 1$ (b) $a^2 + 2a = -1$ (c) $a^2 + 2a = 1$ (d) $a^2 - 2a = -1$

সমাধান: (c); $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ বৃত্তটি কেন্দ্র $(a, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ $= a$

$\therefore \frac{|a-1|}{\sqrt{2}} = a \Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 2a^2 \Rightarrow a^2 + 2a = 1$

04. $3x + ky - 1 = 0$ রেখাটি $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 4 = 0$ বৃত্তকে স্পর্শ করলে k এর মান কত? **[BUTEX'15-16]**

(a) $2, \frac{1}{6}$ (b) $-2, \frac{1}{6}$ (c) $2, -\frac{1}{6}$ (d) $-2, -\frac{1}{6}$

সমাধান: (c); $lx + my + n = 0$ ও $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ স্পর্শ করার শর্ত:

$(lg + mf - n)^2 = (l^2 + m^2)(g^2 + f^2 - c) \Rightarrow \{3(-4) + k(-1) - (-1)\}^2 = (3^2 + k^2)(4^2 + 1^2 - 4)$

$\Rightarrow (-k - 11)^2 = (9 + k^2)(13) \Rightarrow k^2 + 121 + 22k = 13k^2 + 117 \Rightarrow 12k^2 - 22k - 4 = 0 \Rightarrow k = 2, -\frac{1}{6}$

Written

05. a এর মান কত হলে $x^2 + y^2 - 4x + 2ay - 12 = 0$ বৃত্তটি $3x - 4y + 7 = 0$ রেখাকে স্পর্শ করবে।

সমাধান: প্রদত্ত সরলরেখাটি বৃত্তের স্পর্শক হলে কেন্দ্র থেকে সরলরেখাটির লম্ব দূরত্ব বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান হবে। **[BUTEX'09-10]**

প্রদত্ত বৃত্তের কেন্দ্র $(2, -a)$; ব্যাসার্ধ $= \sqrt{(2)^2 + a^2 + 12} = \sqrt{16 + a^2}$

$(2, -a)$ হতে সরলরেখার লম্ব দূরত্ব $= \left|\frac{3\times2-4(-a)+7}{\sqrt{3^2+4^2}}\right| = \left|\frac{(13+4a)}{5}\right|$

$\therefore$ স্পর্শক তাই, $\left|\frac{13+4a}{5}\right|^2 = \left(\sqrt{16 + a^2}\right)^2$

$\Rightarrow 169 + 104a + 16a^2 = 25(16 + a^2) = 400 + 25a^2 \Rightarrow 9a^2 - 104a^2 + 231 = 0$

$\therefore a = \frac{104 \pm \sqrt{(104)^2 - 4\times9\times231}}{2\times9} = \frac{104 \pm 50}{18} \therefore a = 3, \frac{77}{9}$ **(Ans.)**

Question Type-10: বৃত্ত একটি নির্দিষ্ট রেখাকে স্পর্শ করলে তা হতে বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় সংক্রান্ত

➲ **Formula & Concept:** বৃত্তের কেন্দ্র হতে উক্ত স্পর্শকের লম্ব দূরত্ব = বৃত্তের ব্যাসার্ধ

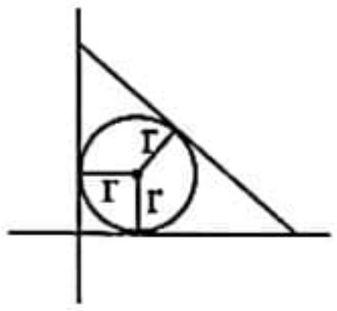
MCQ

01. A circle whose center is in the first quadrant and touches the x and y axes, and the line $3x - 4y = 12$, the equation of the circle is- **[IUT'14-15]**

(a) $x^2 + y^2 + 4x + 4y - 1 = 0$ (b) $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0$

(c) $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 4 = 0$ (d) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$

Solution: (b);



The equation of the circle is, $x^2 + y^2 + 2(-r)x + 2(-r)y + r^2 = 0$

The point (r, r) has a distance of r from the straight line $3x - 4y = 12$

$\therefore \frac{|3r-4r-12|}{5} = r \Rightarrow r + 12 = \pm 5r \Rightarrow r = 3, -2$ (not possible)

$\therefore$ The equation of the circle is, $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 = 0$

Question Type-11: কোন রেখার উপর লম্ব, সমান্তরাল বা অন্য কোন শর্তযুক্ত বৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয়

➲ **Formula & Concept:**

(i) প্রথমে লম্ব/ সমান্তরাল রেখার সমীকরণ লিখতে হবে (বা অন্য শর্তযুক্ত সমীকরণ লিখতে হবে)

(ii) এরপর কেন্দ্র থেকে উক্ত রেখার লম্ব দুরত্ব = বৃত্তের ব্যাসার্ধ শর্ত ব্যবহার করে প্রয়োজনীয় ইচ্ছামূলক ধ্রুবকের মান নির্ণয় করলে স্পর্শকের সমীকরণ পাওয়া যাবে।

Written

01. $x^2 + y^2 = 9$ বৃত্তের স্পর্শক x-অক্ষের সাথে 45^0কোণ উৎপন্ন করে, স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয় কর। **[BUTEX'11-12]**

সমাধান: ধরি, স্পর্শকের সমীকরণ, $y = \tan 45^0 \times x + c \;\; \therefore y = x + c$ বা, $x - y + c = 0$

$x^2 + y^2 = 9$ বৃত্তের কেন্দ্র (0,0)ও ব্যাসার্ধ 3 একক। $\therefore$ (0,0) হতে $x - y + c = 0$ এর দূরত্ব 3 একক।

$\therefore \left|\frac{0+0+c}{\sqrt{1^2+1^2}}\right| = 3 \therefore c = \pm 3\sqrt{2} \therefore$ স্পর্শকের সমীকরণ, $x - y \pm 3\sqrt{2} = 0$

02. বৃত্ত $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 2 = 0$ এর স্পর্শকগুলির সমীকরণ বের কর যারা অক্ষদ্বয়কে সমান ও বিপরীত চিহ্নে খন্ডিত করে।

সমাধান: ধরি, স্পর্শকের সমীকরণ $\frac{x}{a} - \frac{y}{a} = 1$ বা, $x - y - a = 0$ **[RUET'09-10]**

$x^2 + y^2 + 4x - 8y + 2 = 0$ বা, $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 2^2 + 4^2 - 2 = 18$

বা, $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = \left(3\sqrt{2}\right)^2 \;\; \therefore$ কেন্দ্র $(-2,4)$ ও ব্যাসার্ধ $3\sqrt{2}$

$\therefore \left|\frac{-2-4-a}{\sqrt{1^2+1^2}}\right| = 3\sqrt{2}$ বা, $|a + 6| = 6$ বা, $(a + 6) = \pm 6 \;\; \therefore a = 0, -12$

$\therefore$ স্পর্শকের সমীকরণ হলো $x - y = 0$ ও $x - y + 12 = 0$ **(Ans.)**

Question Type-12: বৃত্তের জ্যা-এর দৈর্ঘ্য/সমীকরণ নির্ণয় সংক্রান্ত

➲ **Formula & Concept:**

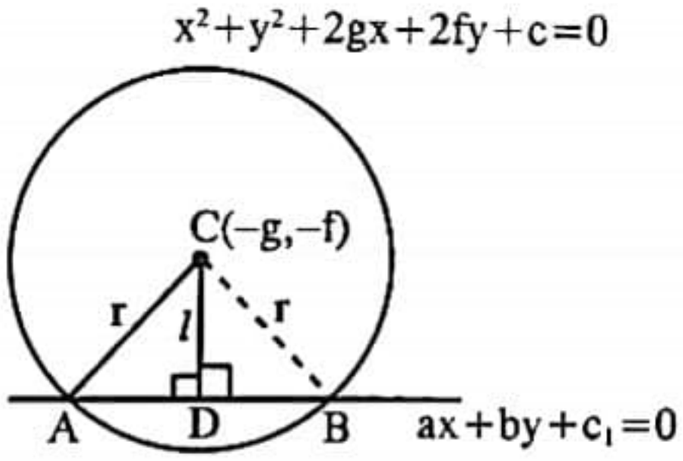
♦ জ্যা-এর সমীকরণ দেওয়া থাকলে জ্যায়ের দৈর্ঘ্য নির্ণয়:

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

বৃত্তের কেন্দ্র $C(-g, -f)$ এবং ব্যাসার্ধ, $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

বৃত্তের কেন্দ্র C থেকে জ্যা-এর লম্ব দূরত্ব, $CD = l = \frac{|-ag-bf+c_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

এখন, $AD = \sqrt{r^2 - l^2}$ তাহলে জ্যা-এর দৈর্ঘ্য, $\boxed{AB = 2AD = 2\sqrt{r^2 - l^2}}$



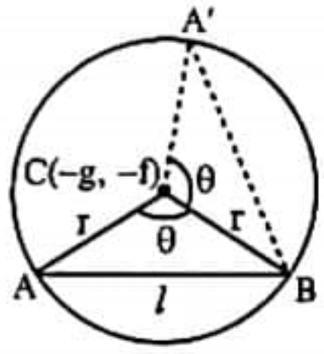
♦ জ্যা-এর দ্বারা কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণ দেওয়া থাকলে জ্যা-এর দৈর্ঘ্য ও সমীকরণ নির্ণয়:

দৈর্ঘ্য নির্ণয়: এখানে, AB জ্যা-এর দৈর্ঘ্য $= l$ [ধরি] বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= r$

AB জ্যা-টি বৃত্তের কেন্দ্রে θ কোণ উৎপন্ন করে। তাহলে, $\cos\theta = \frac{r^2+r^2-l^2}{2.r.r}$ [ত্রিভুজের Cosine Law]

$\Rightarrow l^2 = 2r^2 - 2r^2\cos\theta = 2r^2(1-\cos\theta) \Rightarrow l^2 = 2r^2.2\sin^2\frac{\theta}{2} \therefore \boxed{l = 2r\sin\frac{\theta}{2}}$

সমীকরণ নির্ণয়: সমীকরণ নির্ণয়ের জন্য কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণের সাথে অপর একটি শর্ত জানা থাকা লাগবে।

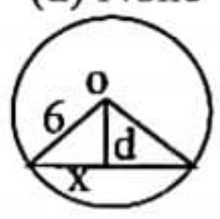


MCQ

01. If the equation of a given circle is $x^2 + y^2 = 36$, then the length of the chord which lies along the line $3x + 4y - 15 = 0$ is- **[IUT'10-11]**

(a) $3\sqrt{6}$ (b) $2\sqrt{3}$ (c) $6\sqrt{3}$ (d) None

Solution: (c); $r = 6 \Rightarrow d = \left|\frac{3.0+4.0-15}{\sqrt{3^2+4^2}}\right| = \frac{15}{5} = 3 \therefore 2x = 2\sqrt{6^2 - 3^2} = 6\sqrt{3}$



Question Type-13: বৃত্তের একটি জ্যা-এর অন্তঃবিভক্তকারী বিন্দুর স্থানাঙ্ক দেওয়া থাকলে জ্যা-এর সমীকরণ নির্ণয় সংক্রান্ত

➲ **Formula & Concept:**

♦ **Process-01:** $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তের কোনো একটি জ্যা-এর মধ্যবিন্দু $P(x_1, y_1)$ হলে উক্ত জ্যা-এর সমীকরণ, $T = S_1$ [যেখানে, $T = xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c$ এবং $S_1 = x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$]

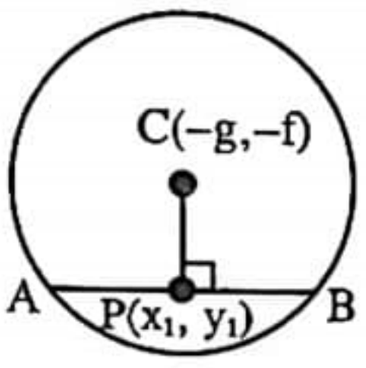
♦ **Process-02:**

➢ বৃত্তের সমীকরণ থেকে বৃত্তের কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $C(-g, -f)$ নির্ণয় কর।

➢ CP রেখার ঢাল নির্ণয় কর, $m_{CP} = \frac{y_1+f}{x_1+g}$

➢ CP এর উপর লম্ব AB রেখার ঢাল হবে, $m_{AB} = -\frac{x_1+g}{y_1+f}$

➢ AB রেখার সমীকরণ, $y - y_1 = m_{AB}(x - x_1) \therefore y - y_1 = -\frac{x_1+g}{y_1+f}(x - x_1)$



MCQ

01. $4x^2 + 4y^2 - 8x + 24y - 17 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র হতে $x - y - 6 = 0$ জ্যা-টির উপর অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দু হতে জ্যা-টি Y অক্ষকে যেখানে ছেদ করে তার দূরত্ব কত? **[KUET'15-16]**

(a) $4\sqrt{2}$ (b) $2\sqrt{2}$ (c) $\sqrt{2}$ (d) $5\sqrt{2}$ (e) $7\sqrt{2}$

সমাধান: (b); $4x^2 + 4y^2 - 8x + 24y - 17 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 6y - \frac{17}{2} = 0$ $\therefore$ কেন্দ্র $C \equiv (1, -3)$

ধরি, লম্বের পাদবিন্দু A

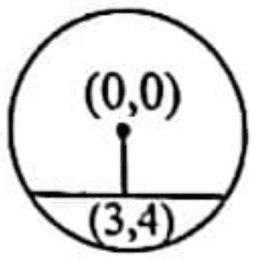
এখন, $x - y - 6 = 0$ এর উপর লম্ব ও C বিন্দুগামী রেখার সমীকরণ, $x + y + 2 = 0$ ... ... (i)

$x - y - 6 = 0$ ও (i) নং রেখার ছেদবিন্দু $B \equiv (2, -4)$

আবার, $x - y - 6 = 0$ ও y অক্ষের ছেদবিন্দু $D \equiv (0, -6)$

$\therefore BD = \sqrt{(-4+6)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$

02. $x^2 + y^2 = 64$ বৃত্তের যে জ্যা (3,4) বিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত হয়, তার সমীকরণ নির্ণয় কর। **[BUET'18-19]**

সমাধানঃ 

কেন্দ্র (0,0) ; (3,4) বিন্দুগামী ব্যাসের ঢাল $= \frac{4}{3}$ $\therefore$ জ্যা-টির ঢাল $= -\frac{3}{4}$

জ্যা-এর সমীকরণ $\Rightarrow (y-4) = -\frac{3}{4}(x-3) \Rightarrow 4y - 16 = -3x + 9 \Rightarrow 3x + 4y - 25 = 0$ (Ans.)

Question Type-14: বৃত্তের সাপেক্ষে বিন্দুর অবস্থান

➲ **Formula & Concept:**

- (x_1, y_1) বিন্দু বৃত্তের বাইরে থাকবে যদি, $x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c > 0$ [+ve] হয়
- (x_1, y_1) বিন্দু বৃত্তের ভিতরে থাকবে যদি $x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c < 0$ [−ve] হয়
- (x_1, y_1) বিন্দু বৃত্তের উপর থাকবে যদি, $x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0$ হয়

MCQ

01. $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 4$ একটি বৃত্তের সমীকরণ। A(4,1) এবং B(2,1) বিন্দু দুটি কি বৃত্তের ভিতরে না বাহিরে অবস্থিত?

(a) A ও B উভয়েই ভিতরে (b) A ও B উভয়েই বাহিরে **[BUTEX'13-14]**

(c) A ভিতরে ও B বাহিরে (d) A বাহিরে ও B ভিতরে

সমাধান: (b); $\frac{C(A)}{C(B)} = \frac{1}{1} = 1$ যা +ve $\therefore$ দুইজনেই বাহিরে।

Question Type-15: বৃত্তের উপরস্থ কোন বিন্দুতে স্পর্শক এবং অভিলম্বের সমীকরণ

➲ **Formula & Concept:** $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ এর উপর বৃত্তের উপরস্থ (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ, $xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$

এই সমীকরণটিকে সংক্ষেপে $T = 0$ লেখা হয়।

➢ অভিলম্ব: অভিলম্ব স্পর্শকের লম্ব সরলরেখা এবং (x_1, y_1) বা স্পর্শ বিন্দুগামী।

অভিলম্বের সমীকরণ, $(y_1 + f)x - (x_1 + g)y + gy_1 - fx_1 = 0$

(x_1, y_1) বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয়ের জন্যঃ
x^2এর পরিবর্তে xx_1
y^2এর পরিবর্তে yy_1
x এর পরিবর্তে $\frac{x+x_1}{2}$
y এর পরিবর্তে $\frac{y+y_1}{2}$ বসাতে হয়।

MCQ

01. $4x^2 + 4y^2 - 6x + 9y - 13 = 0$ দ্বারা বর্ণিত বৃত্তের $(2, -3)$ বিন্দুতে অংকিত স্পর্শকের সমীকরণ কোনটি? **[KUET'18-19]**

(a) $x + y = 6$ (b) $2x + y = 12$ (c) $x + 2y = 5$ (d) $2x - 3y = 13$ (e) $3x + 4y = 7$

সমাধান: (d); $4xx_1 + 4yy_1 - 3(x + x_1) + \frac{9}{2}(y + y_1) - 13 = 0$; $(x_1, y_1) = (2, -3)$

02. $x^2 + y^2 = b(5x - 12y)$ বৃত্তে অংকিত ব্যাস মূলবিন্দু দিয়া অতিক্রম করে; মূলবিন্দুতে স্পর্শকটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

(a) $12x - 5y = 0$ (b) $5x - 12y = 0$ (c) $12x + 5y = 0$ (d) None of them

সমাধান: (b); $x^2 + y^2 - 5bx + 12by = 0$ $\therefore$কেন্দ্র $\left(\frac{5b}{2}, -6b\right)$ **[CUET'14-15, KUET'04-05]**

$\therefore$ মূল বিন্দুগামী ব্যাসের সমীকরণ, $y = \frac{-6b}{\frac{5b}{2}}x \therefore 5y + 12x = 0$

যেহেতু স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ স্পর্শকের উপর লম্ব। $\therefore$স্পর্শকের সমীকরণ, $5x - 12y = 0$

Written

03. একটি বৃত্ত $(-1,-1)$ এবং $(3,2)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে এবং এর কেন্দ্র $x^2+y^2-6x-4y-7=0$ বৃত্তের $(1,-2)$ বিন্দুতে স্পর্শকের উপর অবস্থিত। বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। **[BUET'19-20]**

সমাধান: $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$

$2-2g-2f+c=0$ ..... (i) এবং $13+6g+4f+c=0$ ..... (ii)

$x^2+y^2-6x-4y-7=0$ বৃত্তের $(1,-2)$ বিন্দুতে স্পর্শক,

$x-2y-3(x+1)-2(y-2)-7=0 \Rightarrow x+2y+3=0$ ..... (iii)

(iii) এর উপরে নির্ণেয় বৃত্তের কেন্দ্র $(-g,-f)$ অবস্থিত।

$-g-2f+3=0 \Rightarrow g+2f=3$ ..... (iv)

(i), (ii), (iv) সমাধান করে, $g=-4, f=\frac{7}{2}, c=-3$

$\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ, $x^2+y^2-8x+7y-3=0$ (Ans.)

04. $x^2+y^2-4x-6y=7$ বৃত্তের স্পর্শক এবং ঐ বৃত্তের $(-2,1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের উপর লম্ব রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।

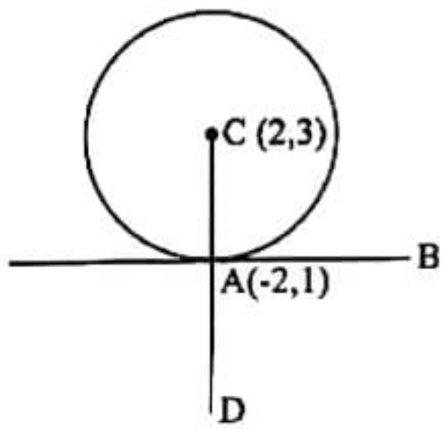
সমাধান: বৃত্তের কেন্দ্র $(2,3)$ **[KUET'19-20]**

$(-2,1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের উপর লম্বের সমীকরণ,

$y-3=\frac{3-1}{2+2}(x-2) \Rightarrow 4y-12=2x-4 \Rightarrow 2x-4y+8=0 \therefore x-2y+4=0$ (Ans.)

$(-2,1)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ, $y-1=-\left(\frac{3-1}{2+2}\right)^{-1}(x+2) \Rightarrow y-1=-2x-4 \therefore 2x+y+3=0$ **(Ans.)**

বিকল্প:



নির্ণেয় স্পর্শকের উপর লম্ব CD এর ঢাল $=\frac{1-3}{-2-2}=\frac{1}{2}$

AB এর ঢাল $=-2$

AB স্পর্শকের সমীকরণ, $y-1=-2(x+2) \Rightarrow 2x+y+3=0$ (Ans.)

AB স্পর্শকের উপর লম্ব রেখার সমীকরণ যা (2, 3) বিন্দুগামী।

$\Rightarrow x-2y=z-6 \Rightarrow x-2y+4=0$ (Ans.)

05. $x^2+y^2=45$ বৃত্তের (6, –3) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক $x^2+y^2-4x+2y-35=0$ বৃত্তকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। দেখাও যে, A ও B বিন্দুতে স্পর্শকদ্বয় পরস্পর লম্ব। **[BUET'00-01, RUET'11-12]**

সমাধান: $x^2+y^2=45$..... (i) বৃত্তের (6, –3) বিন্দুতে অংকিত স্পর্শকের সমীকরণ: $6x-3y=45$

$\Rightarrow 2x-y=15 \Rightarrow y=2x-15$..... (ii)

এখন, $x^2+(2x-15)^2-30-35=0 \Rightarrow 5x^2-60x+160=0 \Rightarrow x^2-12x+32=0 \Rightarrow x=8,4 \therefore y=1,-17$

$\therefore$ ছেদবিন্দু A(4, –7) ও B(8,1)

A বিন্দুতে অংকিত স্পর্শকের সমীকরণ $4x-7y-2(x+4)+y-7-35=0 \Rightarrow 2x-6y-50=0 \Rightarrow x-3y-25=0$

$m_1=\frac{1}{3}=$ A বিন্দুতে অংকিত স্পর্শকের ঢাল

B বিন্দুতে অংকিত স্পর্শকের সমীকরণ $8x+y-2(x+8)+(y+1)-35=0 \Rightarrow 6x+2y-50=0$

$\therefore m_2=-3=$ B বিন্দুতে অংকিত স্পর্শকের ঢাল। এখন, $m_1 \times m_2=\frac{1}{3}\times(-3)=-1$

$\therefore$ A ও B বিন্দুতে স্পর্শকদ্বয় পরস্পর লম্ব। **(Showed)**

06. $x^2+y^2-4x+10y-8=0$ বৃত্তের (3,1) বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ বের কর। **[BUTEX'02-03]**

সমাধান: প্রদত্ত $x^2+y^2-4x+10y-8=0$ সমীকরণকে বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ $x^2+y^2+2gx+2fyc+c=0$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $g=-2, f=5, c=-8.$

এখন, বৃত্তের উপরস্থ (x_1,y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ, $xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$

$\Rightarrow 3x+y-2(x+3)+5(y+1)-8=0 \Rightarrow x+6y-9=0 \ldots\ldots\ldots$ (i) (Ans.)

(i) নং সমীকরণ এর উপর লম্ব রেখার সমীকরণ, $6x-y+k=0$ $\therefore 18-1+k=0 \Rightarrow k=-17.$

সুতরাং, অভিলম্বের সমীকরণ $6x-y-17=0$ **(Ans.)**

Question Type-16: একটি বৃত্ত একটি সরলরেখাকে একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং বৃত্তটি একটি নির্দিষ্ট বিন্দুগামী সংক্রান্ত

➲ **Formula & Concept:** বৃত্তের কেন্দ্র হতে রেখার লম্ব দুরত্ব = বৃত্তের ব্যাসার্ধ।

Written

01. একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $y=2$ রেখাকে (3, 2) বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং (1, 4) বিন্দু দিয়ে যায়। **[BUET'13-14, 07-08]**

[BUET'13-14, 07-08]

সমাধান: $h=3; k=r+2;\ r=k-2$

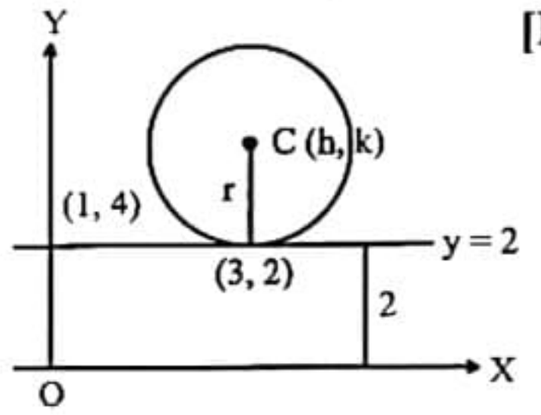
$\therefore (x-3)^2+(y-k)^2=(k-2)^2$

$\therefore 2^2+(k-4)^2=(k-2)^2$

$\therefore 4+k^2-8k+16=k^2-4k+4$

$\therefore 4k=16 \therefore k=4, r=2$

eq^n: $(x-3)^2+(y-4)^2=4$

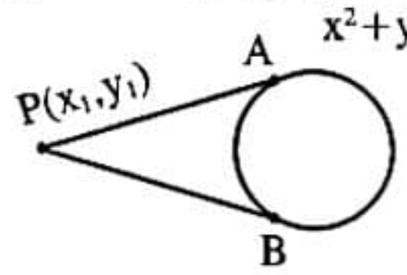


Question Type-17: বৃত্তকে নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু হতে বৃত্তের উপর অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয়ের দৈর্ঘ্য

➲ **Formula & Concept:**

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু $P(x_1,y_1)$ হতে বৃত্তের উপর অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য,

$PA=PB=\sqrt{x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c}=\sqrt{S_1}$; [যেখানে, $S_1=x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c$]



[**Note:** মনে রাখতে হবে, এই সূত্র ব্যবহারের ক্ষেত্রে বৃত্তের সমীকরণের x^2 ও y^2 এর সহগ অবশ্যই 1 হতে হবে।]

MCQ

01. যদি OA এবং OB মূলবিন্দু থেকে $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তের উপর স্পর্শক হয় এবং C বৃত্তের কেন্দ্র হলে চতুর্ভুজ OABC এর ক্ষেত্রফল হলো - **[RUET'10-11]**

(a) $\frac{1}{2}\sqrt{g^2+f^2-c}$ (b) $c\sqrt{g^2+f^2-c}$ (c) $\sqrt{g^2+f^2-c}$ $\frac{(a)\sqrt{g^2+f^2-c}}{c}$ (e) None

সমাধান: (b); $\square OABC=\Delta$

ΔOAC এর ক্ষেত্রফল + ΔOBC এর ক্ষেত্রফল

$(x+g)^2+(y+f)^2=g^2+f^2-c$

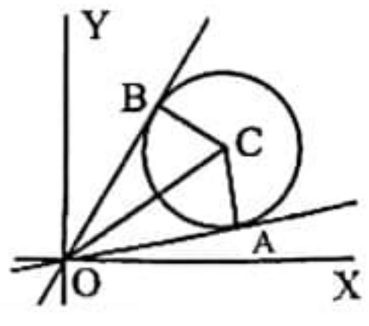
$AC=\sqrt{g^2+f^2-c}$; $OA=\sqrt{OC^2-AC^2}$

$=\sqrt{g^2+f^2-g^2-f^2+c}=\sqrt{c}$

$\Delta OAC=\frac{1}{2}.OAAC$

$=\frac{1}{2}\sqrt{c}.\sqrt{g^2+f^2-c}=\frac{1}{2}\sqrt{c(g^2+f^2-c)}$

$=\Delta OBC \quad \therefore OABC=\sqrt{c(g^2+f^2-c)}$



Question Type-18: বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু থেকে অঙ্কিত বৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ নির্ণয়

➲ **Formula & Concept:**

➢ বহিঃস্থ বিন্দুগামী m ঢালবিশিষ্ট রেখার সমীকরণ লিখতে হবে। বহিঃস্থ বিন্দু (x_1, y_1) হলে স্পর্শকের সমীকরণ $[y - y_1 = m(x - x_1)]$

➢ রেখাটি স্পর্শক হবে যদি বৃত্তের কেন্দ্র থেকে রেখার লম্ব দূরত্ব = বৃত্তের ব্যাসার্ধ হয় ।

MCQ

01. Find the equation (s) of the tangent (s) from the origin to the circle $x^2 + y^2 - 5x - 5y + 10 = 0$. **[IUT'16-17]**

(a) $3x - y = 0$ (b) $x - 3y = 0$ (c) None of these (d) Both a and b

Solution: (d); Tangent from origin: $y = mx \Rightarrow mx - y = 0$

Radius: $\frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{\frac{5m}{2} - \frac{5}{2}}{\sqrt{m^2+1}} \Rightarrow \frac{10}{4} = \frac{25}{4} \times \frac{(m-1)^2}{m^2+1} \Rightarrow 5m^2 - 10m + 5 = 2m^2 + 2 \Rightarrow m = 3, \frac{1}{3}$; $y = 3x; x - 3y = 0$

Written

02. $(3, -1)$ বিন্দু দিয়ে গমনকারী বৃত্তটি x অক্ষকে $(2,0)$ বিন্দুতে স্পর্শ করলে বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। মূলবিন্দু দিয়ে গমনকারী অপর স্পর্শকটির সমীকরণ নির্ণয় কর। **[BUTEX'00-01]**

সমাধান: ধরি, বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তটি x-অক্ষকে স্পর্শ করে, $\therefore g^2 = c$

$(2,0)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে বলে কেন্দ্রের ভুজ 2 $\therefore -g = 2$ এবং $c = g^2 = 4$

$(3, -1)$ বিন্দুগামী বৃত্তের ক্ষেত্রে $= 9 + 1 + 2g(3) + 2f(-1) + c = 0$

$10 + 6(-2) - 2f + 4 = 0 \therefore f = 1$

$\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ, $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$ (Ans.)

কেন্দ্র $(2, -1)$ এবং ব্যাসার্ধ $= \sqrt{g^2 + f^2 - c} = 1$

মূলবিন্দুগামী স্পর্শকের সমীকরণ $y - mx = 0$

$\therefore \left|\frac{-1-2m}{\sqrt{m^2+1}}\right| = 1 \Rightarrow m^2 + 1 = 4m^2 + 4m + 1 \Rightarrow 3m^2 + 4m = 0 \quad \therefore m = \frac{-4}{3}; m = 0$

$m = 0$ হলে স্পর্শক, $y = 0$ যা প্রদত্ত। $\therefore$ স্পর্শকের সমীকরণ, $y + \frac{4}{3}x = 0 \Rightarrow 4x + 3y = 0$ **(Ans.)**

Question Type-19: সরলরেখা ও বৃত্তের অর্ন্তভুক্ত কোণ নির্ণয় সংক্রান্ত

➲ **Formula & Concept:** m_1 ও m_2 ঢালবিশিষ্ট দুটি রেখার মধ্যবর্তী কোণ, $\theta = \tan^{-1} \pm \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$

MCQ

01. $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 6 = 0$ বৃত্তের $x - y = 0$ জ্যাটি পরিধির সঙ্গে যে কোণ উৎপন্ন করে তা হলো-

(a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{2\pi}{3}$ (e) $\frac{3\pi}{4}$

সমাধান: (c); $x - y = 0$ জ্যাটি বৃত্তকে ছেদ করে, **[KUET'17-18]**

$2x^2 + 4x - 6 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1, -3 \quad \therefore (x, y) = (1,1), (-3, -3)$

$\therefore$ বৃত্তের ঢাল, $2x + 2y\frac{dy}{dx} - 2 + 6\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2-2x}{2y+6}$

$(1,1)$ বিন্দুতে বৃত্তের ঢাল $= 0 \therefore$ রেখাটি বৃত্তের পরিধির সাথে $\frac{\pi}{4}$ কোণ উৎপন্ন করে।

Question Type-20: সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় সংক্রান্ত

➲ **Formula & Concept:** সঞ্চারপথের উপর একটি বিন্দু ধরে (x, y) এবং ধ্রুবক এর মাধ্যমে প্রকাশ করতে হবে।

MCQ

01. মূলবিন্দু হইতে (h, k) বিন্দু দিয়া গমনকারী রেখা সমূহের উপর অংকিত লম্বের পাদবিন্দুর সঞ্চার পথের সমীকরণ কোনটি?

(a) $x^2 + y^2 - hx - ky = 0$ (b) $x^2 + y^2 - h - 2k = 0$ (c) $x^2 + y^2 = 2h + k$

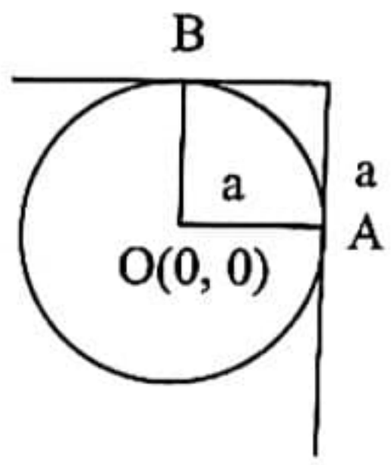
(d) $x^2 + y^2 - 5h - k = 0$ (e) $x^2 + y^2 - 4h - 7k = 0$ **[KUET'10-11]**

সমাধান: (a); $x^2 + y^2 - hx - ky = 0$; সমীকরণটি (h, k) বিন্দুগামী।

Written

02. $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের এমন দুটি স্পর্শকের ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর যারা পরস্পর লম্ব। **[CUET'04-05]**

সমাধান: বৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ-



$y = mx \pm a\sqrt{1+m^2} \Rightarrow (y - mx)^2 = \left(\pm a\sqrt{1+m^2}\right)^2$

$\Rightarrow y^2 - 2mxy + m^2x^2 = a^2(1+m^2) \Rightarrow m^2x^2 - 2mxy + y^2 - a^2(1+m^2) = 0$

$\Rightarrow m^2(x^2 - a^2) - 2mxy + (y^2 - a^2) = 0$

যদি, মূলদ্বয় m_1 ও m_2 হয়,

শর্তমতে, $m_1m_2 = -1 \Rightarrow \frac{y^2-a^2}{x^2-a^2} = -1 \Rightarrow y^2 - a^2 = -x^2 + a^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2a^2$. (Ans.)

বিকল্প: ধরি, সঞ্চারপথের উপরস্থ বিন্দু $C(x, y)$

OABC চতুর্ভূজে, $\angle A = \angle B = \angle C = 90^\circ \therefore \angle O = 90^\circ$এবং $OA = OB = a \therefore$ OABC একটি বর্গ

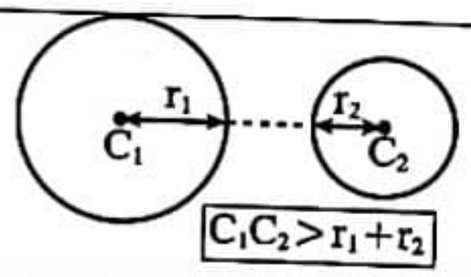
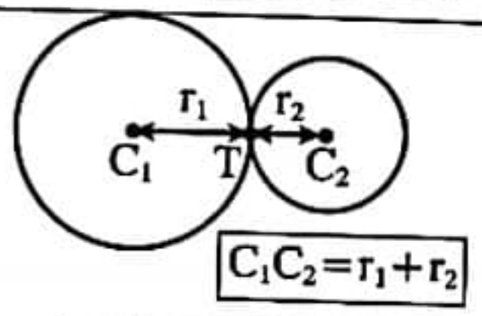
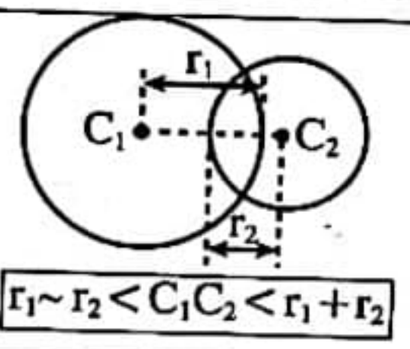
$\therefore$ বর্গের কর্ণ $OC = \sqrt{OA^2 + AC^2} = a\sqrt{2}$

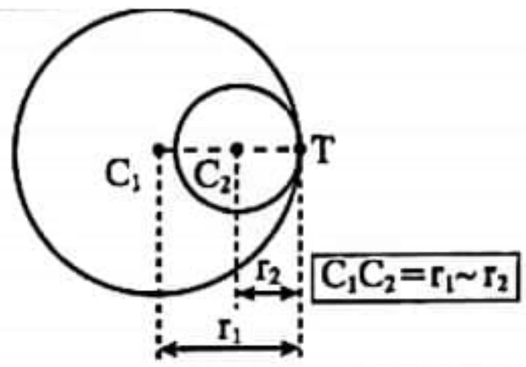
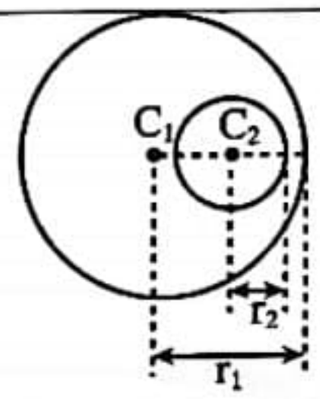
আবার, $OC = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \therefore \sqrt{x^2 + y^2} = a\sqrt{2};\ x^2 + y^2 = 2a^2$

Qucstion Type-21: বৃত্তের সাপেক্ষে বৃত্তের অবস্থান এবং ২টি বৃত্ত স্পর্শ করে সংক্রান্ত

➲ **Formula & Concept:**

♦ দুইটি বৃত্তের পারস্পরিক অবস্থান:

➢ বৃত্ত দুটি পরস্পরকে ছেদ করে না, স্পর্শও করে না।	
➢ বৃত্ত দুটি পরস্পরকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে। স্পর্শবিন্দু T, C_1C_2 কে $r_1 : r_2$ অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে	
➢ বৃত্ত দুটি পরস্পরকে ছেদ করলে	

➢ বৃত্ত দুটি পরস্পরকে অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করে। স্পর্শবিন্দু T, C_1C_2 কে $r_1 : r_2$ অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে।	
➢ একটি বৃত্ত অপর একটি বৃত্তের অভ্যন্তরে অবস্থিত।	 চিত্রে, $C_1C_2 + r_2 < r_1$ $\Rightarrow C_1C_2 < r_1 - r_2$ $C_1C_2 < r_1 + r_2$ $C_1C_2 < r_1 \sim r_2$

MCQ

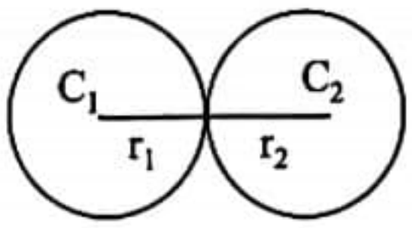
01. $x^2 + y^2 + 2x + c = 0$ এবং $x^2 + y^2 + 2y + c = 0$ বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে স্পর্শ করলে c এর মান হবে-

(a) 0 (b) $\frac{1}{2}$ (c) 1 (d) 2 **[CUET'03-04, BUET'12-13]**

সমাধান: (b); $x^2 + y^2 + 2x + c = 0$; $C_1(-1,0)$; $r_1 = \sqrt{1-c}$

$x^2 + y^2 + 2y + c = 0$; $C_2(0,-1)$; $r_2 = \sqrt{1-c}$

$C_1C_2 = \sqrt{(-1-0)^2 + (0+1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$



চিত্র হতে, বহিস্পর্শের জন্য, $C_1C_2 = r_1 + r_2 \Rightarrow \sqrt{2} = \sqrt{1-c} + \sqrt{1-c}$

$\Rightarrow \sqrt{2} = 2\sqrt{1-c} \Rightarrow \sqrt{2} = 2\sqrt{1-c} \Rightarrow 2 = 4(1-c) \Rightarrow \frac{1}{2} = 1 - c \Rightarrow c = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Note: এখানে বৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্ধ সমান তাই তাদের পক্ষে কখনো অন্তঃস্পর্শ করা সম্ভব নয় [চিত্র এঁকে চিন্তা কর]

Written

02. (9, 8) কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত, $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$ বৃত্তটিকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করলে বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$ বৃত্তের কেন্দ্র $C_1\left(\frac{-2}{-2}, \frac{-4}{-2}\right) \equiv C_1(1,2)$ **[BUET'20-21]**

ব্যাসার্ধ, $r_1 = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 - (-20)} = 5$ একক

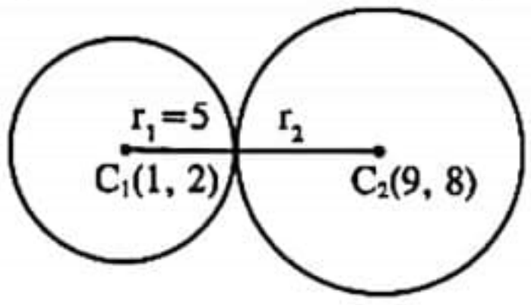
নির্ণেয় বৃত্তের কেন্দ্র $C_2(9,8)$ এবং ব্যাসার্ধ $= r_2$[ধরি] এখন বৃত্তদ্বয় বহিঃস্পর্শ করলে $C_1C_2 = r_1 + r_2$

$\Rightarrow \sqrt{(1-9)^2 + (2-8)^2} = 5 + r_2$

$\therefore r_2 = 10 - 5 = 5$ একক

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ, $(x-9)^2 + (y-8)^2 = 5^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 - 18x - 16y + 120 = 0$ **(Ans.)**



03. এরূপ দুইটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যাদের প্রত্যেকটির কেন্দ্র (3, 4) এবং যারা $x^2 + y^2 = 9$ বৃত্তকে স্পর্শ করে।

সমাধান: $x^2 + y^2 = 9$ বৃত্তের কেন্দ্র $C_1(0,0)$ এবং ব্যাসার্ধ $r_1 = 3$ **[BUET'17-18]**

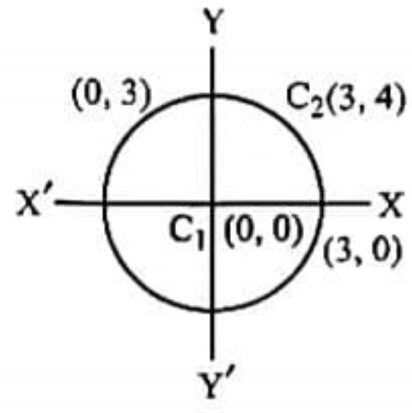
এখন ধরি নির্ণেয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= r_2$ এবং কেন্দ্র $C_2(3,4)$

$C_1C_2 = r_2 \pm r_1 \Rightarrow \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = r_2 \pm 3$

$\Rightarrow 5 = r_2 \pm 3 \Rightarrow r_2 = 5 \pm 3 \Rightarrow r_2 = 8$ [+ নিয়ে] বা, $r_2 = 2$ [− নিয়ে]

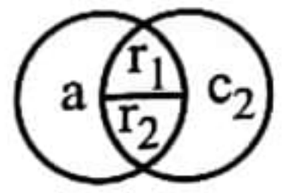
সুতরাং নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 2^2 = 4$

এবং $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 8^2 = 64$ **(Ans.)**



04. $2x^2 + 2y^2 - 3x - 4y + 1 = 0$ এবং $16x^2 + 16y^2 - 32x - 1 = 0$ দুটি বৃত্ত। দেখাও যে তাদের প্রাতাঢর কেন্দ্র অপরাঢর পারাধর উপর অবস্থিত। **[RUET'03-04, 08-09]**

সমাধান: প্রথমটির কেন্দ্র, $(\frac{3}{4}, 1)$; প্রথমটির ব্যাসার্ধ, $r_1 = \sqrt{\frac{9}{16} + 1 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{17}}{4}$



দ্বিতীয়টির কেন্দ্র, (1,0) ; দ্বিতীয়টির ব্যাসার্ধ, $r_2 = \sqrt{1 + \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{17}}{4}$

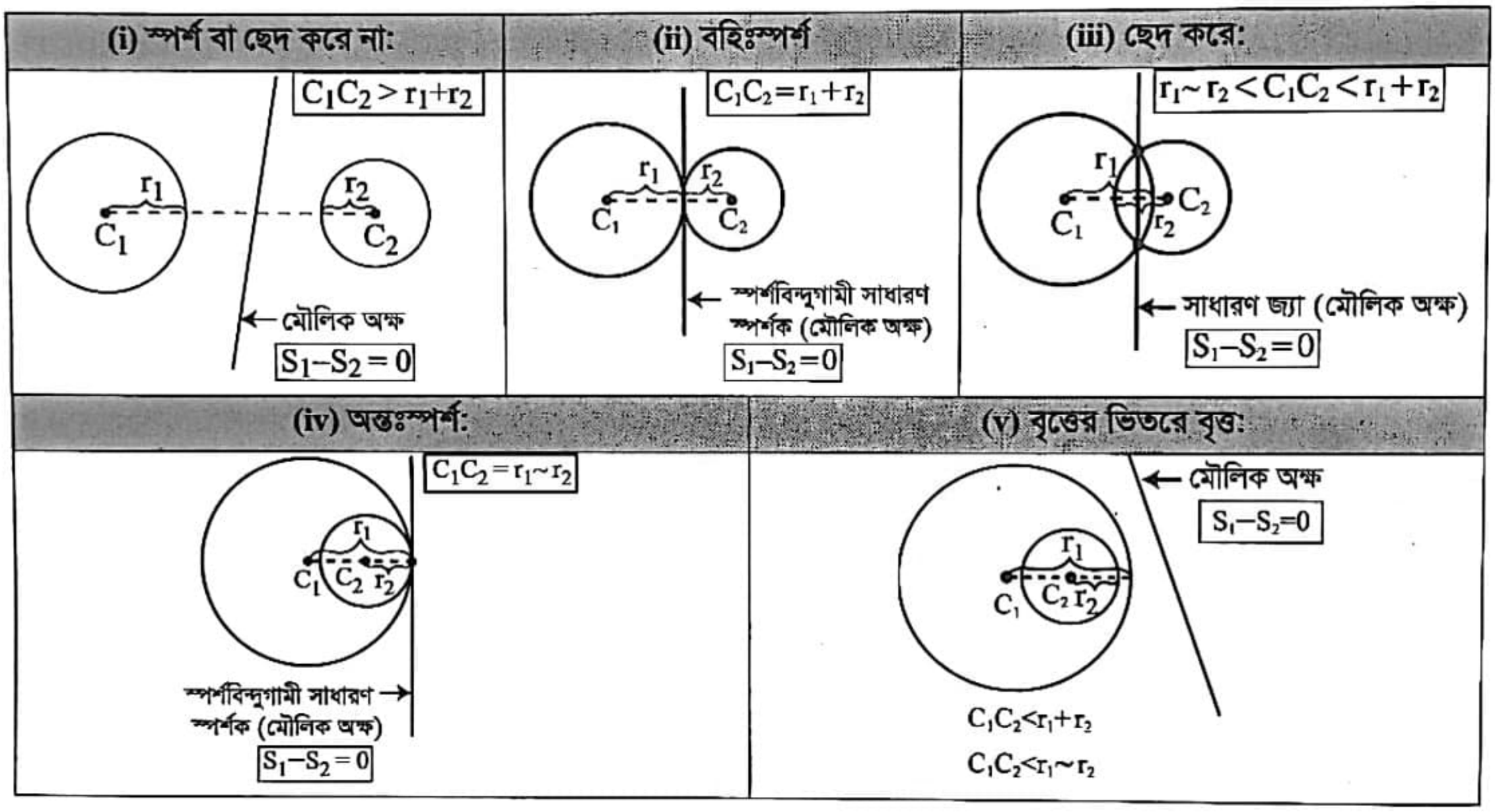
কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব, $d = \sqrt{\frac{1}{16} + 1} = \frac{\sqrt{17}}{4}$ সুতরাং, প্রতিটির কেন্দ্র অপরটির পরিধির উপর অবস্থিত। (showed)

[একটির কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক দ্বারা অপরটির সমীকরণকে সিদ্ধ করেও দেখানো যায়।]

Question Type-22: মৌলিক অক্ষ, সাধারণ জ্যা ও স্পর্শবিন্দুগামী সাধারণ স্পর্শক সম্পর্কিত

Formula & Concept:

বিভিন্ন ক্ষেত্রে মৌলিক অক্ষ:



MCQ

01. $x^2 + y^2 + 2x + 3y + 11 = 0$ এবং $x^2 + y^2 + 4x + 3y + 12 = 0$ বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ নিচের কোনটি?

(a) $x = -\frac{1}{2}$ (b) $2x + y = 0$ (c) $y = x$ (d) $x = -2y$ **[BUTEX'14-15]**

সমাধান: (a); $S_1 - S_2 \Rightarrow -2x - 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

02. If the circles $x^2 + y^2 - 16x - 12y + 75 = 0$ and $5x^2 + 5y^2 - 32x - 24y + 75 = 0$ touch each other, then the equation of the common tangent of their point of contact is- **[IUT'14-15]**

(a) $3y + 5x = 29$ (b) $3y + 4x = 25$ (c) $3y + 4x = 24$ (d) $3y + 5x = 25$

Solution: (b); $x^2 + y^2 - 16x - 12y + 75 = 0$ ..... (i) ; $x^2 + y^2 - \frac{32}{5}x - \frac{24}{5}y + 15 = 0$ ..... (ii)

(i) − (ii) $\Rightarrow \left(-16 + \frac{32}{5}\right)x + \left(\frac{24}{5} - 12\right)y + 60 = 0 \Rightarrow -\frac{48}{5}x - \frac{36}{5}y + 60 = 0 \Rightarrow 4x + 3y = 25$

03. $x^2 + y^2 - 4x - 8y - 5 = 0$ ও $x^2 + y^2 - 6x + 14y - 8 = 0$ বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা বৃহত্তর বৃত্তের কেন্দ্র হতে যে দূরত্বে অবস্থিত তা হলো- **[KUET'13-14]**

(a) $\frac{187}{\sqrt{584}}$ (b) $\frac{143}{\sqrt{584}}$ (c) $\frac{243}{\sqrt{584}}$ (d) $\frac{287}{\sqrt{584}}$ (e) $\frac{87}{\sqrt{584}}$

সমাধান: (সঠিক উত্তর নেই); বৃত্তদ্বয়ের সাধারণ জ্যা $\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 8y - 5 - x^2 - y^2 + 6x - 14y + 8 = 0 \Rightarrow 2x - 22y + 3 = 0$

বৃহত্তর বৃত্ত হলো যার ব্যাসার্ধ বড়। $\therefore x^2 + y^2 - 6x + 14y - 8 = 0$ বৃহত্তর বৃত্ত।

$\therefore$ কেন্দ্র $= (3, -7) \therefore$ দূরত্ব $= \left|\frac{2\times3-22(-7)+3}{\sqrt{2^2+(-22)^2}}\right|$ একক $= \frac{163}{\sqrt{488}}$ একক

04. $x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$ ও $x^2 + y^2 + 32x + 24y = 0$ বৃত্তদ্বয়ের ছেদ বিন্দুগামী ও বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্র সমূহের সংযোগকারী রেখার উপর লম্ব রেখার সমীকরণ হলো- **[BUET'12-13]**

(a) $6x - y = 0$ (b) $4x + 3y = 0$ (c) $3x + 4y = 0$ (d) $3x - 4y = 0$ (e) $4x - 3y = 0$

সমাধান: (b); প্রশ্নের বর্ণনা পড়ে বোঝাই যাচ্ছে যে, এখানে সাধারণ জ্যা এর সমীকরণ চাচ্ছে-

$x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$ ..... (i) $x^2 + y^2 + 32x + 24y = 0$ ..... (ii)

(i) $-$(ii); $-40x - 30y = 0 \Rightarrow 4x + 3y = 0$ (Ans.)

Question Type-23: বৃত্তের পোলার সমীকরণ সম্পর্কিত

➲ **Formula & Concept:**

$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ এবং $x^2 + y^2 = r^2$ বৃত্তের পোলার সমীকরণ $r^2 + 2r(g\cos\theta + f\sin\theta) + c = 0$

MCQ

01. পোলার স্থানাঙ্কে $\left(5, \frac{\pi}{4}\right)$ কেন্দ্র ও 2 ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ কোনটি? **[KUET'16-17]**

(a) $r^2 + 5\sqrt{2}(\cos\theta + \sin\theta)r + 21 = 0$ (b) $r^2 - \frac{5}{\sqrt{2}}(\cos\theta + \sin\theta)r - 21 = 0$

(c) $r^2 + 5\sqrt{2}(\cos\theta + \sin\theta)r - 21 = 0$ (d) $r^2 + \frac{5}{\sqrt{2}}(\cos\theta + \sin\theta)r + 21 = 0$

(e) $r^2 - 5\sqrt{2}(\cos\theta + \sin\theta)r + 21 = 0$

সমাধান: (e); $\left(x - 5\cos\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(y - 5\sin\frac{\pi}{4}\right)^2 = 2^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + 25 - 5\sqrt{2}x - 5\sqrt{2}y = 4$

$\Rightarrow r^2 - 5\sqrt{2}r(\cos\theta + \sin\theta) + 21 = 0$

02. পোলার সমীকরণ $r = \sin\theta$ প্রকাশ করে একটি **[RUET'13-14]**

(a) parabola, focus(1,0) (b) parabola, focus (0, 1)

(c) circle, centre $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ (d) circle, centre $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ (e) None

সমাধান: (d); $r = \sin\theta \Rightarrow r^2 = r\sin\theta$ [উভয়পক্ষকে r দ্বারা গুণ করে]

$\Rightarrow x^2 + y^2 = y \Rightarrow x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ $\therefore$ বৃত্তের সমীকরণ, যার কেন্দ্র $\left(0, \frac{1}{2}\right)$