Written

01. $f(x)=\sqrt{x-1}, (x\ge 1), g(x)=x^2+2$ হলে, $(gof^{-1})(x)$ এবং $(gof)^{-1}(x)$ নির্ণয় কর। **[BUET'18-19]**

সমাধান: $f(x)=\sqrt{x-1}=y$ (ধরি)

$\Rightarrow y^2=x-1\Rightarrow x=y^2+1\Rightarrow f^{-1}(y)=y^2+1\Rightarrow f^{-1}(x)=x^2+1$

$(gof^{-1})(x)=(x^2+1)^2+2=x^4+2x^2+3$ (Ans.)

আবার, $(gof)(x)=\left(\sqrt{x-1}\right)^2+2=x+1=y$ (ধরি)

$\Rightarrow x=y-1\Rightarrow (gof)^{-1}(y)=y-1\Rightarrow (gof)^{-1}(x)=x-1$ (Ans.)

02. যদি $f(x)=\frac{1}{1+x}$ হয়, $f\left(f\left(f(x)\right)\right)$ এর মান বের কর। **[KUET'04-05;BUET'18-19]**

সমাধান: $f(x)=\frac{1}{1+x}$; $f(f(x))=\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}=\frac{1+x}{2+x}$

$f\left(f\left(f(x)\right)\right)=\frac{1}{1+\frac{1+x}{2+x}}=\frac{2+x}{2+x+1+x}=\frac{2+x}{3+2x}$ (Ans.)

03. $f(x)=\sin x\tan 2x$. ফাংশনটির পর্যায় নির্ণয় কর। **[BUTEX'18-19]**

সমাধান: $f(x)=\sin x\tan 2x$

$f(x+2\pi)=\sin(2\pi+x)\tan 2(2\pi+x)=\sin(2\pi+x)\tan(4\pi+2x)=\sin x\tan 2x$

$\sin x\tan 2x$ এর পর্যায় 2π

04. যদি $f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=x+2$ হয়, তাহলে ডোমেন এবং রেঞ্জসহ $f^{-1}(x)$ বের কর। **[BUET'17-18]**

সমাধান: দেয়া আছে, $f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=x+2\Rightarrow f^{-1}(x+2)=\frac{1-x}{1+x}$ [ধরি, $x+2=y\Rightarrow x=y-2$]

$f^{-1}(y)=\frac{1-y+2}{1+y-2}=\frac{3-y}{y-1}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{3-x}{x-1}$ (Ans.)

এখন, $f^{-1}(x)$ এর ডোমেন $=f(x)$ এর রেঞ্জ $=\mathbb{R}-\{1\}$ (Ans.)

এখন, ধরি $\frac{1-x}{1+x}=y\Rightarrow 1-x=y+xy\Rightarrow xy+x=1-y\Rightarrow x=\frac{1-y}{1+y}$

সুতরাং $f(y)=\frac{1-y}{1+y}+2=\frac{1-y+2+2y}{1+y}=\frac{3+y}{1+y}$

এখন $f(x)=\frac{3+x}{1+x}$ সুতরাং $f(x)$ এর ডোমেন $=f^{-1}(x)$ এর রেঞ্জ $=\mathbb{R}-\{-1\}$ (Ans.)

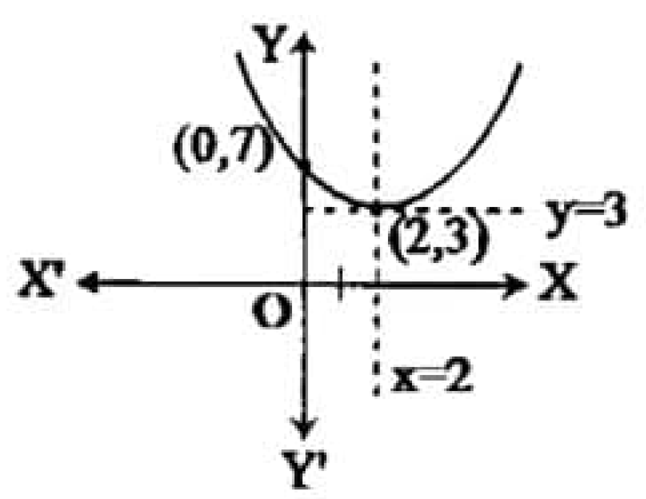
05. $y=x^2-4x+7$ ফাংশনের স্কেচ অংকন কর। একই সাথে ফাংশনের ডোমেন, রেঞ্জ, সিমেট্রিক লাইন, সর্বোচ্চ/সর্বনিম্ন মান এবং x–অক্ষ ও y–অক্ষ হতে কর্তিত অংশ বের কর। **[BUET'16-17]**

সমাধান: $y=x^2-4x+7\Rightarrow y=3+(x-2)^2\Rightarrow (x-2)^2=(y-3)$ ……… (i)

(i) নং সমীকরণের গ্রাফ হবে পরাবৃত্তাকার যার শীর্ষবিন্দু (2,3), অক্ষরেখা y অক্ষের সমান্তরাল। যেহেতু x^2 এর সহগ ধনাত্মক। সুতরাং গ্রাফটি হবে উর্ধ্বমূখী (upward)।

$x=0$ হলে, $y=7$ অর্থাৎ গ্রাফটি y অক্ষকে (0,7) বিন্দুতে ছেদ করবে।

আবার, $y=0\Rightarrow x^2-4x+7=0$ সমীকরণের পৃথায়ক, $b^2-4ac=16-28<0$ অর্থাৎ গ্রাফটি x অক্ষকে ছেদ বা স্পর্শ কোনটাই করবে না।



ফাংশনটির ডোমেন $=\mathbb{R}$, রেঞ্জ $=[3,\infty)$

ফাংশনটি $x=2$ সরলরেখার সাপেক্ষে প্রতিসম

$\therefore$ সিমেট্রিক লাইন, $x=2$। ফাংশনটির সর্বোচ্চ মান নির্ণয় সম্ভব নয়।

ফাংশনটির সর্বনিম্ন মান $=3$

x অক্ষ হতে কর্তিত অংশ $=0$

y অক্ষের ধনাত্মক দিক থেকে কর্তিত অংশ $=7$

06. মনে কর, R বাস্তব সংখ্যার সেট; $A, B \subset R, f: A \to B$ যেখানে $f(x) = \frac{3x+2}{7x-3}$. ফাংশনটির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে ফাংশনটি এক-এক ও সার্বিক। f^{-1} ও নির্ণয় কর। [BUET'14-15]

সমাধান: Given, $f(x) = \frac{3x+2}{7x-3}$; $x = \frac{3}{7}$ হলে, $f(x) =$ undetermined $\therefore$ ডোমেন $= R\setminus\left\{\frac{3}{7}\right\}$ (Ans.)

আবার, $f(x) = y = \frac{3x+2}{7x-3} \Rightarrow 7xy - 3y = 3x + 2 \Rightarrow x(7y-3) = 3y + 2 \Rightarrow x = \frac{3y+2}{7y-3}$..............(i)

$y = \frac{3}{7}$ হলে, $x =$ undetermined $\therefore$ রেঞ্জ $= R\setminus\left\{\frac{3}{7}\right\}$ (Ans.)

এখন, যেকোন, $x_1, x_2 \in A$ এর জন্য $f(x_1) = f(x_2)$ হবে যদি ও কেবল যদি, $\frac{3x_1+2}{7x_1-3} = \frac{3x_2+2}{7x_2-3}$ বা, $x_1 = x_2$ হয়

$\therefore$ ফাংশনটি এক-এক ও সার্বিক। যেহেতু প্রতিটি ডোমেনের জন্য একটি ভিন্ন রেঞ্জ আছে।

(i) হতে, $x = \frac{3y+2}{7y-3} \Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{3y+2}{7y-3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3x+2}{7x-3}$ (Ans.)

07. $f(x) = x^2 + 3x + 1$ এবং $g(x) = 2x - 3$ হলে $(gof)(2)$ এবং $(fog)(2)$ নির্ণয় কর।

[RUET'08-09,12-13, CUET'11-12]

সমাধান: $(gof)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 3x + 1) = 2x^2 + 6x - 1 \quad \therefore (gof)(2) = 19$

$(fog)(x) = f(g(x)) = f(2x-3) = (2x-3)^2 + 3(2x-3) + 1 \quad \therefore (fog)(2) = 1 + 3 + 1 = 5$

08. (a) একটি ফাংশন $f: R \to R$ এরূপভাবে সংজ্ঞায়িত হয়েছে যে, $f(x) = x^2 + 1$, $f^{-1}(5)$ এর মান নির্ণয় কর।

(b) প্রমাণ কর যে, $(A-B) \cap (A-C) = A - (B \cup C)$, যেখানে A, B ও C তিনটি সেট।

সমাধান: (a) ধরি, $f^{-1}(5) = x \Rightarrow f(x) = 5 \Rightarrow x^2 + 1 = 5 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \quad \therefore f^{-1}(5) = \{2, -2\}$

(b) ধরি, $x \in (A-B) \cap (A-C)$ [RUET'07-08,KUET'04-05]

$\Rightarrow x \in (A-B)$ এবং $x \in (A-C) \Rightarrow (x \in A$ এবং $x \notin B)$ এবং $(x \in A$ এবং $x \notin C)$

$\Rightarrow x \in A$ এবং $(x \notin B$ এবং $x \notin C) \Rightarrow x \in A$ এবং $x \notin (B \cup C) \Rightarrow x \in A - (B \cup C)$

$\therefore (A-B) \cap (A-C) \subset A - (B \cup C)$

আবার, ধরি, $x \in A - (B \cup C) \Rightarrow x \in A$ এবং $x \notin (B \cup C) \Rightarrow x \in A$ এবং $(x \notin B$ এবং $x \notin C)$

$\Rightarrow (x \in A$ এবং $x \notin B)$ এবং $(x \in A$ এবং $x \notin C) \Rightarrow x \in (A-B)$ এবং $x \in (A-C)$

$\Rightarrow x \in (A-B) \cap (A-C) \quad \therefore A - (B \cup C) \subset (A-B) \cap (A-C)$

$\therefore$ সমান সেটের সংজ্ঞা হতে, $(A-B) \cap (A-C) = A - (B \cup C)$ (Proved)

09. যদি $f(x) = x^2, g(x) = x^3 + 1, h(x) = x + 2, x = -3$ হয়, তবে hogof নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, $gof \neq fog$.

সমাধান: 1st Part: $hogof = h[g\{f(x)\}] = h[g\{x^2\}] = h[(x^2)^3 + 1] = h[x^6 + 1] = x^6 + 1 + 2 = x^6 + 3$

$\therefore hogof(-3) = (-3)^6 + 3 \quad [\because x = -3] = 729 + 3 = 732$ [BUTex'07-08]

2nd Part: $gof = g\{f(x)\} = g\{x^2\} = (x^2)^3 + 1 = x^6 + 1$

$fog = f\{g(x)\} = f\{x^3 + 1\} = (x^3 + 1)^2 = x^6 + 2x^3 + 1 \therefore gof \neq fog$ [দেখান হল]

10. R একটি বাস্তব সংখ্যার সেট এবং $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$; $f: A \to R$ ফাংশনটি $f(x) = x^2 - x + 1$ দ্বারা সজ্ঞায়িত হলে f(x) এর রেঞ্জ নির্ণয় কর। ইহা কি একটি এক-এক ফাংশন? [CUET'05-06]

সমাধান: এখানে, $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

$f(x) = x^2 - x + 1$; $f(-2) = 4 + 2 + 1 = 7$; $f(-1) = 1 + 1 + 1 = 3$

$f(0) = 0 - 0 + 1 = 1$; $f(1) = 1 - 1 + 1 = 1$; $f(2) = 4 - 2 + 1 = 3$

$\therefore$ রেঞ্জ $= \{7, 3, 1\}$ ফাংশনটি এক এক নহে কারণ ডোমেন এর ভিন্ন ভিন্ন মানের জন্য রেঞ্জ ভিন্ন ভিন্ন মান পাওয়া যায় না।

11. যদি $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ এবং $f(x) = x + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত $f: A \to B$ হয়, তবে f-এর ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর। **[KUET'05-06]**

সমাধান: $f(x) = x + 1$; $f(1) = 1 + 1 = 2$; $f(2) = 2 + 1 = 3$; $f(3) = 3 + 1 = 4$; $f(4) = 4 + 1 = 5$

সুতরাং ফাংশনটির ডোমেন $= \{1, 2, 3, 4\}$; রেঞ্জ $= \{2, 3, 4, 5\}$ (Ans.)

12. যদি $y = f(x) = \frac{4x-7}{2x-4}$ হয়, তাহলে দেখাও যে, $f(y) = x$. **[BUTex'05-06]**

সমাধান: $y = f(x) = \frac{4x-7}{2x-4} \Rightarrow f(y) = \frac{4y-7}{2y-4} = \frac{4.\frac{4x-7}{2x-4}-7}{2.\frac{4x-7}{2x-4}-4} = \frac{\frac{16x-28-14x+28}{2x-4}}{\frac{8x-14-8x+16}{2x-4}} = \frac{2x}{2} = x \therefore f(y) = x$

13. যদি $f(x) = \ell n\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ হয়, তবে দেখাও যে $f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = 2f(x)$. **[KUET'04-05]**

সমাধান: $L.H.S = \ln\left(\frac{1+\frac{2x}{1+x^2}}{1-\frac{2x}{1+x^2}}\right) = \ln\left(\frac{1+x^2+2x}{1+x^2-2x}\right) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 = 2\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

$= 2\,f(x) = R.H.S$ (Showed)

14. (a) যদি $f(x) = b.\frac{x-a}{b-a} + a.\frac{x-b}{a-b}$ হয়, দেখাও যে, $f(a) + f(b) = f\ (a+b)$. **[RUET'04-05]**

সমাধান: $f(a) = a;\ f(b) = b \quad \therefore f(a+b) = b.\frac{a+b-a}{b-a} + a.\frac{a+b-b}{a-b} = \frac{b^2}{(b-a)} + \frac{a^2}{a-b}$

$= \frac{a^2-b^2}{a-b} = a + b = f(a) + f(b)$ (Showed)

15. $f(x) = 2x^3 + 3$ এবং $g(x) = \sqrt[3]{\frac{x-3}{2}}$ হলে দেখাও যে, $(fog)(x) = (gof)(x)$ **[BUET'03-04]**

সমাধান: $L.H.S = (fog)(x) = f(g(x)) = f\left(\sqrt[3]{\frac{x-3}{2}}\right) = 2\times\frac{x-3}{2} + 3 = x$

$R.H.S = (gof)(x) = g(f(x)) = g(2x^3+3) = \sqrt[3]{\frac{2x^3+3-3}{2}} = x \quad \therefore L.H.S. = R.H.S$ (Proved)

MCQ

01. যদি $A = \{a, b, c\}$ এবং $B = \{1, 0\}$ হয়, তবে A থেকে B তে ভিন্ন ভিন্ন কতগুলো ফাংশন পাওয়া যাবে? **[Ans: a] [KUET'18-19]**

(a) 6 (b) 7 (c) 8 (d) 9 (e) 10

02. $\log_{(2-x)}(2x+1)(3-x) > 2$ এর ডোমেন কোনটি? **[SUST'18-19]**

(a) $(-\infty, 2)$ (b) $(-1/2, 2)$ (c) $(-1/2, 1)$ (d) $(-1/2, 3)$ (e) $(-1/2, 1) \cup (1, 2)$

সমাধান: (b); $\log_{(2-x)}(2x+1)(3-x) > 2$ .... (i)

এর base $(2-x) > 0 \ \therefore x < 2$ .... (ii)

আবার, (i) হতে, $(2x+1)(3-x) > (2-x) \Rightarrow \frac{(2x+1)(3-x)}{(2-x)^2} > 0$ .... (iii)

(ii) সত্য হবে যদি $(2x+1)$ ও $(3-x)$ যদি উভয়ে ধনাত্মক বা উভয়ে ঋণাত্মক।

$\therefore \left(-\frac{1}{2}, 3\right)$ হলে (iii) সত্য হবে। কিন্তু (ii) হতে $x < 2$ $\therefore$ সঠিক উত্তর $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$

03. $y = \cos(\sin^{-1}\sqrt{2\cos 2x})$ এর রেঞ্জ কত? **[SUST'18-19]**

(a) $(-1, 0)$ (b) $[-1, 0]$ (c) $(-0.5, 0)$ (d) $[0, 1]$ (e) $[-0.5, 0]$

সমাধান: (d); $y = \cos\left(\sin^{-1}\sqrt{2\cos 2x}\right) \therefore 2\cos x \geq 0$

আবার, $y = \cos\left(\cos^{-1}\sqrt{1 - 2\cos 2x}\right) = \sqrt{1 - 2\cos 2x}$

$\therefore 1 - 2\cos 2x \geq 0$ বা, $2\cos 2x \leq 1$

যখন $2\cos 2x = 1, y_{min} = 0$; $2\cos 2x = 0$, $y_{max} = 1$

04. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \tan^{-1} x$, $g(y) = \sin y$ এবং $h(z) = \frac{1-z}{1+z}$ হলে $g[foh\ (\tan 30°)]$ এর মান- **[KUET'17-18]**

(a) $30°$ (b) $45°$ (c) $\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ (d) $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ (e) $\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

সমাধান: (d); $foh(\tan 30°) = f(h\ (\tan 30°)) = f\left(\frac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right) = 15°$

$\therefore g\ [foh\ (\tan 30°)] = g(15°) = \sin 15° = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

05. $f(x) = \sqrt{100 - x^2} + \log_{(2-x)}\sqrt{x + 12}$ কোন সেটে সঙ্গায়িত? **[SUST'17-18]**

(a) $(0, 3)$ (b) $(-12, 0)$ (c) $(0, 10)$ (d) $(-10, 10)$ (e) $(-10, 2)$

সমাধান: (e); এখানে, $100 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -10 \leq x \leq 10$ এবং $2 - x > 0 \Rightarrow x < 2$

এবং $x + 12 > 0 \Rightarrow x > -12$ সুতরাং ডোমেন: $[-10, 10] \cap (-\infty, 2) \cap (-12, \infty) \equiv [-10, 2]$

06. যদি $e^y = x^x$ হয় তাহলে y এর ডোমেন কোনটি? **[SUST'17-18]**

(a) R (b) $R - \{0\}$ (c) $\{x: x \leq 0\}$ (d) $\{x: x \geq 0\}$ (e) $\{x: x > 0\}$

সমাধান: (e); $e^y = x^x \Rightarrow y = x\ln(x) \therefore$ ডোমেন $= \{x: x > 0\}$

07. যদি $f(x) = x^2 - 2|x|$ এবং $g(x) = x^2 + 1$ হয় তবে $(fog)(1)$ এর মান কত? **[KUET'16-17]**

(a) 2 (b) 0 (c) 4 (d) 8 (e) -1

সমাধান: (b); $(fog)(1) = f(g(1)) = f(2) = 2^2 - 2|2| = 0$

08. $f(x) = \log_{x+1}(2x + 1)$ হলে $f(x)$ এর ডোমেইন কোনটি? [Ans: a] **[KUET'16-17]**

(a) $\left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup (0, \infty)$ (b) $x > -1$ (c) $x \leq -\frac{1}{2}$ (d) $(0, \infty)$ (e) $\left(-\frac{1}{2}, -1\right) \cup (0, \infty)$

সমাধান: (a); $f(x) = \log_{x+1}(2x + 1)$

তাহলে, $x + 1 \neq 1$ এবং $x + 1 > 0 \Rightarrow x \neq 0, x > -1$ এবং $(2x + 1) > 0 \Rightarrow x > -\frac{1}{2} \therefore x \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup (0, \infty)$

09. $f(x) = \log_x |x|$ হলে $f(x)$ এর ডোমেইন D এর জন্য কোন শর্ত সঠিক? **[Ans: e] [KUET'16-17]**

(a) $D \subset R$ (b) $D = \{x|x \in Z\}$ (c) $D = \{x|x \in N\}$ (d) $D = \{x|x \geq 0\}$ (e) $D = \{x|x > 0\}$

10. $f: R \to R$ ফাংশনটি $f(x) = x^2 - 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হলে $f^{-1}(-8,8)$ এর মান কত হবে? [KUET'16-17]

(a) $\{-4,4\}$ (b) $\{-3,3\}$ (c) $\{-2,2\}$ (d) $\{-1,1\}$ (e) $\{-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\}$

সমাধান: (b); $f(x) = x^2 - 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1 + f(x)} \Rightarrow f^{-1}(y) = \pm\sqrt{1 + y}$

$\therefore f^{-1}(x) = \pm\sqrt{1 + x} \therefore f^{-1}(8) = \{3, -3\}$ [$f^{-1}(-8)$ অসংজ্ঞায়িত]

11. $2f(x) + 3f(-x) = x^2 - x + 1$ হলে $f(x)$ এর মান কত? **[BUTex'16-17]**

(a) $\frac{1}{5}x^2 + x + \frac{1}{5}$ (b) $\frac{1}{5}x^2 - x + \frac{1}{5}$ (c) $\frac{1}{13}x^2 - x + \frac{1}{13}$ (d) $\frac{1}{5}x^2 + x - \frac{1}{5}$

সমাধান: (a); $2f(x) + 3f(-x) = x^2 - x + 1$ ……… (i) $\therefore 2f(-x) + 3f(x) = x^2 + x + 1$ ……… (ii)

$\therefore$ (i) $\times 2 -$ (ii) $\times 3 \Rightarrow -5f(x) = -x^2 - 5x - 1 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{5}x^2 + x + \frac{1}{5}$

12. $f(x) = x^2 + 3x + 1$ এবং $g(x) = 2x - 3$ হলে, $gof(1)$ এর মান কত? **[BUTex'15-16]**

(a) 10 (b) 7 (c) 13 (d) 15

সমাধান: (b); $f(1) = (1)^2 + 3.1 + 1 = 5$; $g(5) = 2.5 - 3 = 10 - 3 = 7$; $gof(1) = g(f(1)) = g(5) = 7$

13. যদি $f: R^{+} \to R^{+}$ দ্বারা $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{if } -2 \le x \le 3 \\ 2x + 3 & \text{if } x < -2 \end{cases}$ সূচিত হলে $f(-3)$ এর মান কত? [KUET'15-16]

(a) -3 (b) -4 (c) -5 (d) 6 (e) 7

সমাধান: (a); $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{if } x > 3 \\ x^2 - 2 & \text{if } -2 \le x \le 3 \\ 2x + 3 & x < -2 \end{cases}$

এখানে, $-3 < -2 \therefore f(-3) = 2 \times (-3) + 3 = -3$

14. $f: R \to R$ কে $f(x) = 2x - 3$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলে $f^{-1}(x)$ এর মান কত? [KUET'13-14,BUTex'14-15]

(a) $\frac{1}{2x-3}$ (b) $\frac{1}{2x+3}$ (c) $\frac{x+3}{2}$ (d) $\frac{2x}{3}$ (e) $\frac{3}{2x}$

সমাধান: (c); ধরি, $y = f(x) = 2x - 3 \quad \therefore x = \frac{y+3}{2} \quad \therefore f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$

15. If $f(x) = \frac{2+3x}{3-2x}$ then the value of $f^{-1}(x)$ is- [BUTex'14-15]

(a) $\frac{2-3x}{2x-3}$ (b) $\frac{3x+2}{3-2x}$ (c) $\frac{3x-2}{2x+3}$ (d) $\frac{3x-2}{2x-3}$

সমাধান: (c); $y = \frac{2+3x}{3-2x} \Rightarrow 3y - 2xy = 2 + 3x \therefore x = \frac{3y-2}{3+2y} \therefore f^{-1}(x) = \frac{3x-2}{2x+3}$

16. $S = \{x \in R: 2x^2 - 7x + 3 \le 0\}$, হলে লঘিষ্ঠ উর্ধ্বসীমা (Sup S) কত? [BUTex'14-15]

(a) 3 (b) $\frac{1}{2}$ (c) 0 (d) 1

সমাধান: (a); $2x^2 - 7x + 3 \le 0 \Rightarrow (x-3)(2x-1) \le 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \le x \le 3 \Rightarrow$ লঘিষ্ঠ উর্ধ্বসীমা 3

17. $f(x) = \tan x$ হলে $f(x)$ এর ডোমেন কোনটি? [BUTex'14-15]

(a) R (b) $R - \left\{\frac{(2n+1)\pi}{2}; n \in z\right\}$ (c) $[0, \infty]$ (d) $(-\infty, \infty)$

সমাধান: (b); $R - \{(2n+1)\frac{\pi}{2}; n \in Z\}$

18. পাশের বাস্তব ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ কত? $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ [Ans: a] [RUET'14-15]

(a) $[-3,3], [0,3]$ (b) $[0,3], [3,-3]$ (c) $[3,-3], [0,-3]$ (d) $[-3,0], [3,0]$ (e) None

19. যদি $f(x) = x + 1$ এবং $g(x) = 2x$ হয় তবে $(fog^{-1})(2)$ এর মান কত? [BUET'13-14]

(a) 2 (b) 3 (c) $\frac{1}{2}$ (d) 1

সমাধান: (a) ; $(fog^{-1})(2) = f(g^{-1}(2)) = f\left(\frac{2}{2}\right) = f(1) = 1 + 1 = 2$

20. x -এর মান কত হলে $F(x) = \int_0^x \frac{t-4}{9-t^2} dt$ ফাংশনটির মান বৃহত্তম হবে? [BUET'13-14]

(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 25

সমাধান: (b) ; $F'(x) = 0 \therefore \frac{x-4}{9-x^2} = 0 \therefore x = 4$

21. $f(x) = \frac{x+3}{1-2x}$, (x বাস্তব) এর ডোমেন ও রেঞ্জ যথাক্রমে- [RUET'13-14]

(a) $\Re - \left\{\frac{1}{2}\right\}, \Re - \left\{-\frac{1}{3}\right\}$ (b) $\Re - \left\{-\frac{1}{2}\right\}, \Re - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

(c) $\Re - \left\{\frac{1}{2}\right\}, \Re - \left\{\frac{1}{2}\right\}$ (d) $\Re - \left\{-\frac{1}{2}\right\}, \Re - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ (e) None

সমাধান: (e); $f(x)=\frac{x+3}{1-2x}\in\Re$ যখন $1-2x\neq 0\Rightarrow x\neq\frac{1}{2}$.

$y=\frac{x+3}{1-2x}\ \therefore y-2xy=x+3\Rightarrow y-3=x(1+2y)\ \therefore x=\frac{y-3}{1+2y}$

$\therefore x\in\Re$ if $1+2y\neq 0\Rightarrow y\neq-\frac{1}{2}\quad \therefore$ Dom f $=\Re-\left\{\frac{1}{2}\right\}$. Range f $=\Re-\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

22. $f(x)=(1/x)+\sqrt{x}-1$ এর ডোমেন কত? **[SUST'12-13]**

(a) $(-\infty, 0)$ (b) $(0, \infty)$ (c) $(-\infty, 0)\cup(0, \infty)$ (d) $(1, \infty)$ (e) $(-\infty,\infty)$

সমাধান: $f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{x}-1$; এক্ষেত্রে, $\sqrt{x}$ থাকার দরুন অবশ্যই $x\geq 0$

আবার, $\frac{1}{x}$ থাকার জন্য $x\neq 0\ \therefore f(x)$ এর ডোমেন $=(0,\infty)$.

23. $f(x-2)=x^2-2x+8$ হলে $f(-4)$ এর মান কত? **[SUST'12-13]**

(a)8 (b)10 (c)12 (d)16 (e)32

সমাধান: $f(x-2)=x^2-2x+8.\ \therefore f(-4)$ এর ক্ষেত্রে $x-2=-4\ \therefore x=-2.$

$\therefore f(-4)=(-2)^2-2(-2)+8=4+4+8=16$

24. যদি $f(x)=x^2-2|x|$ এবং $g(x)=x^2+1$ হয় তবে $(f o g)(2)$ এর মান হবে- **[BUET'12-13]**

(a) 0 (b) 15 (c) 25 (d) 5

সমাধান: $f(x)=x^2-2|x|;\ g(x)=x^2+1$

$(fog)(2)=f(g(2))=f(2^2+1)=f(5)=5^2-2|5|=25-10=15$

25. যদি $A=R-\{3\}, B=R-\{1\}, f:A\rightarrow B,\ f(x)=\frac{x-2}{x-3}$, তবে $f\left(\frac{3}{2}\right)+f^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ এর মান কত? **[Ans: c]**

(a) 2/3 (b) 4/3 (c) 1/3 (d) None of these **[CUET'11-12]**

সমাধান: $f(x)=\frac{x-2}{x-3}\ \therefore f^{-1}(x)=\frac{3x-2}{x-1}\ \therefore f\left(\frac{3}{2}\right)+f^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{\frac{3}{2}-2}{\frac{3}{2}-3}+\frac{3\times\frac{2}{3}-2}{\frac{2}{3}-1}=\frac{\frac{-1}{2}}{\frac{-3}{2}}+0=\frac{-1}{2}\times\frac{2}{-3}=\frac{1}{3}$

26. যদি $f(x)=\sqrt{x-2}$ এবং $g(x)=x^2+1$ হয়, তাহলে fog এর ডোমেন হবে- **[BUET'10-11]**

(a) $(-\infty,-1)\cup(1,-\infty)$ (b) $[-1, 1]$

(c) $(-\infty, \infty)$ (d) $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$

সমাধান: (d); $fog=f(g(x))=f(x^2+1)=\sqrt{x^2+1-2}=\sqrt{x^2-1}\ \therefore$ Dom $f=(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$

27. যদি $f(x)=\begin{cases}x^2-3x, & x\geq 2\\ x+2, & x<2\end{cases}$, তবে $f(2)+f(-2)$ এর মান হবে- **[CUET'10-11]**

(a) 0 (b) -2 (c) 2 (d) None of these

সমাধান: $f(2)=2^2-3.2=4-6=-2;\ f(-2)=-2+2=0\ \therefore f(2)+f(-2)=-2+0=-2$

28. ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ $\{a, b, c, d\}$ হলে কোনটি 'এক-এক' ফাংশন? **[Ans: a] [SUST'10-11]**

(a) $f(a)=b, f(b)=c, f(c)=d, f(d)=a$ (b) $f(a)=b, f(b)=c, f(c)=b, f(d)=a$

(c) $f(a)=b, f(b)=c, f(c)=d$ (d) $f(a)=b, f(b)=c, f(c)=d, f(c)=a$