অধ্যায়- ০৯ : অন্তরীকরণ

Written

01. $\lim_{x\to 0}(1+7x)^{\frac{5x+3}{x}}$ এর মান নির্ণয় কর। **[BUET'18-19]**

সমাধান: $\lim_{x\to 0}(1+7x)^{\frac{5x+3}{x}} = \lim_{x\to 0}(1+7x)^5 \cdot (1+7x)^{\frac{3}{x}}$

$= \lim_{x\to 0}(1+7x)^{\frac{1}{7x}\times 3\times 7} = \left[\lim_{7x\to 0}(1+7x)^{\frac{1}{7x}}\right]^{21} = e^{21}$ (Ans.)

02. $\tan y = \frac{2t}{1-t^2}$ এবং $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ এর মান নির্ণয় কর। **[BUET'18-19]**

সমাধান: $y = \tan^{-1}\frac{2t}{1-t^2} = 2\tan^{-1}t$

$x = \sin^{-1}\frac{2t}{1+t^2} = 2\tan^{-1}t = y \ \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dy} = 1$ (Ans.)

03. দেখাও যে, $\sqrt{x}+\sqrt{y} = a$ বক্ররেখার যে কোন স্পর্শক দ্বারা অক্ষ দুইটি থেকে কর্তিত অংশদ্বয়ের যোগফল একটি ধ্রুবক।

সমাধান: $\sqrt{x}+\sqrt{y} = a \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{y}{x}}$ **[BUET'18-19]**

(x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শক $\Rightarrow (y-y_1) = -\sqrt{\frac{y_1}{x_1}}(x-x_1)$

x অক্ষকে ছেদ করলে, $y = 0$

$y_1 = \sqrt{\frac{y_1}{x_1}}(x-x_1) \Rightarrow \sqrt{x_1y_1} = x-x_1 \Rightarrow x = x_1+\sqrt{x_1y_1}$ ..... (i)

অনুরূপভাবে, y অক্ষকে ছেদ করলে, $x = 0$ এবং $y = y_1+\sqrt{x_1y_1}$ ..... (ii)

(i) + (ii) $\Rightarrow x+y = x_1+y_1+2\sqrt{x_1y_1} = \left(\sqrt{x_1}+\sqrt{y_1}\right)^2 = a^2$ যা একটি ধ্রুবক (Showed)

04. মান নির্ণয় কর: $\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln x}{\operatorname{cosec} x}$ **[RUET'18-19]**

সমাধান: $\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln x}{\operatorname{cosec} x} = \lim_{x\to 0^-}\sin x \ln x = \lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}x\ln x = 1\times\lim_{x\to 0^-}x\times\lim_{x\to 0^-}\ln x$

এখানে, $\lim_{x\to 0^-}x = 0$ কিন্তু x এর যেকোনো ঋণাত্মক মানের জন্য $\ln x$ অসংজ্ঞায়িত। [$\because \lim_{x\to 0^-}$ দ্বারা বাম দিকবর্তী লিমিট বোঝানো হয়েছে। তাই $\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln x}{\operatorname{cosec} x}$ অসংজ্ঞায়িত হবে।]

05. $y = 4e^x+9e^{-x}$ এর লঘুমান বের কর। **[BUTEX'18-19]**

সমাধান: $y = 4e^x+9e^{-x}; y_1 = 4e^x-9e^{-x}; y_2 = 4e^x+9e^{-x}$

$y_1 = 0$ হলে, $4e^x-9e^{-x} = 0 \Rightarrow 4e^x = 9e^{-x}$

$\Rightarrow e^{2x} = \frac{9}{4} \Rightarrow e^x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \ln\frac{3}{2}$

$x = \ln\frac{3}{2}$ হলে, $y_2 = 4e^{\ln\frac{3}{2}}+9e^{-\ln\frac{3}{2}}$

$\Rightarrow y_2 = 4\times\frac{3}{2}+9\times\frac{2}{3}$

$\Rightarrow y_2 = 6+6 = 12 > 0$

$\therefore$ লঘুমান, $y_1 = 4e^{\ln\frac{3}{2}}+9e^{-\ln\frac{3}{2}} = 4\times\frac{3}{2}+9\times\frac{2}{3} = 6+6 = 12$ [Ans.]

06. মান নির্ণয় কর: $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1-\frac{x}{4}\right)-(1-x)^{\frac{1}{4}}+1}{x^2}$ **[BUTEX'18-19]**

সমাধান: $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1-\frac{x}{4}\right)-(1-x)^{\frac{1}{4}}+1}{x^2}\left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1-\frac{x}{4}}\left(-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}(1-x)^{-\frac{3}{4}}(-1)}{2x}\left[\frac{0}{0}\right]$[L' Hospital]

$= \lim_{x\to 0}\frac{(-1)\frac{1}{\left(1-\frac{x}{4}\right)^2}\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}\times\left(-\frac{3}{4}\right)(1-x)^{-\frac{7}{4}}(-1)(-1)}{2}$ [L' Hospital] $= \frac{-\frac{\frac{1}{16}}{1}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times 1}{2} = \frac{1}{16}$ (Ans.)

07. $y = \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^m$ হলে প্রমাণ কর যে, $(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - m^2y = 0$। অতঃপর $x = 0$ বিন্দুতে $\frac{d^3y}{dx^3}$ এর মান বের কর।

[BUET'17-18]

সমাধান: দেওয়া আছে, $y = \left(x + \sqrt{1+x^2}\right)^m$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m\cdot\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^m}{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}\left\{1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right\}$$

$$\frac{dy}{dx} = m \cdot \frac{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^m}{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}\left\{\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\right\}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+x^2}\cdot\frac{dy}{dx} = m\cdot\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^m \ldots\ldots\ldots (i)$$

$$\Rightarrow (1+x^2)\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = m^2y^2 \text{ [বর্গ করে]}$$

$$\Rightarrow (1+x^2)\cdot 2\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\cdot 2x = m^2\cdot 2y\cdot\frac{dy}{dx} \text{ [x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে]}$$

$$\Rightarrow (1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + x\cdot\frac{dy}{dx} - m^2y = 0 \ldots\ldots\ldots (ii) \quad \left[2\frac{dy}{dx} \text{ দ্বারা উভয়পক্ষ ভাগ করে}\right]$$

(ii) নং কে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই,

$$(1+x^2)\cdot\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2}\cdot 2x + x\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - m^2\frac{dy}{dx} = 0 \ldots\ldots\ldots (iii)$$

$x = 0$ হলে $y = 1$

(i) নং সমীকরণে $x = 0$ বসিয়ে পাই, $1\cdot\frac{dy}{dx} = m \Rightarrow \frac{dy}{dx} = m$

(ii) নং সমীকরণে $x = 0, \frac{dy}{dx} = m, y = 1$ বসিয়ে পাই,

$$(1+0)\cdot\frac{d^2y}{dx^2} + 0\cdot m - m^2\times 1 = 0 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = m^2$$

(iii) নং সমীকরণে মান বসিয়ে পাই,

$$(1+0)\cdot\frac{d^3y}{dx^3} + m^2\times 2\times 0 + 0\times m^2 + m - m^2\times m = 0 \Rightarrow \frac{d^3y}{dx^3} = m^3 - m \text{ (Ans.)}$$

08. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$ এর মান নির্ণয় কর।

[BUET'17-18]

সমাধান: $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}\cdot 2x+\sin x}{2x}$ $\left[\frac{0}{0} \text{ আকার, L' Hospital Rule}\right]$

$$= \lim_{x\to 0}\left\{e^{x^2}\cdot\frac{2x}{2x} + \frac{\sin x}{2x}\right\} = \lim_{x\to 0} e^{x^2} + \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = e^0 + \frac{1}{2}\cdot 1 \left[\because \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1\right]$$

$$= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \text{ (Ans.)}$$

09. $e^y = x^{x-y}$ হলে dy/dx নির্ণয় কর।

[RUET'17-18]

সমাধান: $e^y = x^{x-y} \Rightarrow y\ln e = (x-y)\ln x \Rightarrow y = x\ln x - y\ln x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = x.\frac{1}{x} + \ln x - y.\frac{1}{x} - \ln x.\frac{dy}{dx} \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1+\ln x-\frac{y}{x}}{1+\ln x} = 1 - \frac{y}{x(1+\ln x)} \text{ (Ans.)}$$

10. মান নির্ণয় কর: $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}}{3x-6}$

[RUET'17-18]

সমাধান: $\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{h}\right)^2+2}}{3.\frac{1}{h}-6} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{\sqrt{1+2h^2}}{h}}{\frac{3-6h}{h}}$ [ধরি, $h = \frac{1}{x} \therefore x = \frac{1}{h}$; $x\to\infty$ হলে $h\to 0$]

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1+2h^2}}{3-6h} = \frac{\sqrt{1+2\times 0}}{3-6\times 0} = \frac{1}{3} \text{ (Ans.)}$$

11. বক্র পথে চলমান কোন কণার অবস্থান $\vec{S} = t^3\,i + t^2 j$ হলে, $t = 1$ সে. সময়ে কণার বেগ ও ত্বরণের মধ্যের কোণ নির্ণয় কর। **[RUET'17-18]**

সমাধান: $\vec{s} = t^3\hat{i} + t^2\hat{j}\,;\ \vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} = 3t^2\,\hat{i} + 2t\hat{j}$

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 6t\,\hat{i} + 2\hat{j}\,;\ t = 1$ সময়ে $\vec{v} = 3\hat{i} + 2\hat{j};\ \vec{a} = 6\hat{i} + 2\hat{j}$

মধ্যবর্তী কোণ: $\cos^{-1}\left(\frac{18+2\times2}{\sqrt{3^2+2^2}.\sqrt{6^2+2^2}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{22}{\sqrt{13}.2\sqrt{10}}\right) = 15.25°$ (Ans.)

12. $f(x) = \sin 3x$ হলে $\underset{h\to0}{Lt}\ \frac{f(x+3h)-f(x)}{3h}$ এর মান নির্ণয় কর। **[BUET'16-17]**

সমাধান: $\underset{h\to0}{Lt}\ \frac{f(x+3h)-f(x)}{3h} = \underset{h\to0}{Lt}\ \frac{\sin 3(x+3h)-\sin 3x}{3h} = \underset{h\to0}{Lt}\ \frac{\sin(3x+9h)-\sin 3x}{3h} = \underset{h\to0}{Lt}\ \frac{2\cos\frac{6x+9h}{2}\sin\frac{9h}{2}}{3h}$

$= \underset{h\to0}{Lt}\ \frac{3\sin\frac{9h}{2}\cos\frac{6x+9h}{2}}{\frac{9h}{2}} = 3.1.\cos\frac{6x+0}{2} = 3\cos 3x$

13. যদি $y = f(x)$ এবং $x = \frac{1}{z}$ হয়, তবে দেখাও যে, $\frac{d^2f}{dx^2} = z^4\frac{d^2y}{dz^2} + 2z^3\frac{dy}{dz}$. **[BUET'16-17]**

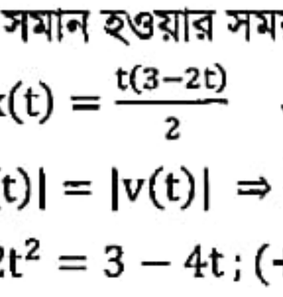
সমাধান: $x = \frac{1}{z} \Rightarrow 1 = -\frac{1}{z^2}\cdot\frac{dz}{dx} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -z^2$

এখন, $\frac{df}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = -z^2\frac{dy}{dz}\ \therefore \frac{d^2f}{dx^2} = -z^2\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\right) - \frac{dy}{dz}\cdot\frac{d}{dx}(z^2) = -z^2\frac{d^2y}{dz^2}\cdot\frac{dz}{dx} - 2z\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$

$\therefore \frac{d^2f}{dx^2} = z^4\frac{d^2y}{dz^2} + 2z^3\frac{dy}{dz}$ (showed)

14. একটি সমবৃত্তভূমিক কোণকের মধ্যে একটি খাড়া বৃত্তাকার সিলিন্ডার স্থাপন করা আছে। সিলিন্ডারের বক্রতল বৃহত্তম হতে হলে দেখাও যে, সিলিন্ডারের ব্যাসার্ধ কোণকের ভূমির ব্যাসার্ধের অর্ধেক। **[BUET'16-17]**

সমাধান:



ধরি, সিলিন্ডারের ব্যাসার্ধ x, কোণকের ভূমির ব্যাসার্ধ r এবং উচ্চতা h।

এখন, ΔABC ও ΔDEC সদৃশ। $\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EC} = \frac{DE}{BC-BE} \Rightarrow \frac{h}{r} = \frac{DE}{r-x}\ \therefore DE = \frac{h}{r}(r-x)$

সিলিন্ডারের বক্রতলের ক্ষেত্রফল $A = 2\pi x\cdot DE = 2\pi x\cdot\frac{h}{r}(r-x) = 2\pi xh - \frac{2\pi hx^2}{r}$

A বৃহওম হলে, $\frac{dA}{dx} = 0 \Rightarrow 2\pi h - \frac{4\pi h}{r}x = 0 \Rightarrow 1 - \frac{2x}{r} = 0 \Rightarrow \frac{2x}{r} = 1\ \therefore x = \frac{r}{2}$

আবার, $\frac{d^2A}{dx^2} = -\frac{4\pi h}{r} < 0\ \therefore x = \frac{r}{2}$ হলে সিলিন্ডারের বক্রতল বৃহওম হবে।

15. একটি বস্তু কণার সরণ $x(t) = \frac{t(3-2t)}{2}$। যে সময়ে বস্তুর বেগ ও সরণের সংখ্যামান সমান, তা নির্ণয় কর। বস্তুটির সময়, বেগ ও সরণের সংখ্যামান সমান হওয়ার সময়ও নির্ণয় কর। **[RUET'15-16]**

সমাধান: $x(t) = \frac{t(3-2t)}{2}\quad \therefore v(t) = \frac{1}{2}(3-4t)$

Now, $|x(t)| = |v(t)| \Rightarrow \frac{t(3-2t)}{2} = \pm\frac{1}{2}(3-4t)$

$\Rightarrow 3t - 2t^2 = 3 - 4t$; (+) নিয়ে — অথবা, $3t - 2t^2 = -3 + 4t$ (– নিয়ে)

$\Rightarrow 2t^2 - 7t + 3 = 0$ — $\Rightarrow 2t^2 + t - 3 = 0 \Rightarrow t = 1, -\frac{3}{2}$ $\left[-\frac{3}{2}\right.$ গ্রহণযোগ্য নয়$]$

$\Rightarrow t = 3, \frac{1}{2}$ (Ans.) — $\therefore t = 1$ (Ans.)

At $t = 3$, $x(3) = \frac{3(3-6)}{2} = -\frac{9}{2}$; $v(3) = \frac{1}{2}(3-4.3) = -\frac{9}{2}$

$t = 1$, $x(1) = \frac{1}{2}$; $v(1) = -\frac{1}{2}$

$t = \frac{1}{2}$; $x\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}(3-1)}{2} = \frac{1}{2}$

$v\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(3 - 4.\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$

So, the time at when, x(t), v(t) and t are equal is $t = \frac{1}{2}$ (Ans.)

16. $x^2 + 2ax + y^2 = 0$ বক্ররেখার উপর স্পর্শকের স্পর্শক বিন্দুগুলো নির্ণয় কর যেখানে স্পর্শকসমূহ x –অক্ষের উপর লম্ব। [RUET'15-16]

সমাধান: $x^2 + 2ax + y^2 = 0 \Rightarrow 2x + 2a + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow y\frac{dy}{dx} = -(x + a) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x+a}{y}$

x -অক্ষের উপর লম্ব রেখার জন্য $\frac{dx}{dy} = 0 \Rightarrow \frac{y}{x+a} = 0 \Rightarrow y = 0$

$\therefore x^2 + 2ax = 0 \Rightarrow x = 0, -2a$ $\therefore$ বিন্দুসমূহ $(0, 0)$ এবং $(-2a, 0)$ (Ans.)

17. মান নির্ণয় কর: $\lim_{x\to 0} \frac{\tan sx - \sin sx}{x^3}, s > 0$ [RUET'15-16]

সমাধান: $\lim_{x\to 0} \frac{\tan sx - \sin sx}{x^3}$; $\left[\frac{0}{0} \text{ Form}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{s(\sec^2 sx) - s(\cos sx)}{3x^2}$; [L'hospital law]

$= \lim_{x\to 0} \frac{s^2(2\sec^2 sx \tan sx) + s^2 \sin sx}{6x}$; $\left[\frac{0}{0} \text{ Form}\right]$

$= \lim_{x\to 0} \frac{s^2(2s\sec^4 sx + 4s\sec^2 sx \tan^2 sx + s\cos sx)}{6} = \frac{s^2(2s+s)}{6} = \frac{s^3}{2}$ (Ans.)

Alternate: $\lim_{x\to 0} \frac{\tan sx - \sin sx}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan sx(1 - \cos sx)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{(\tan sx) 2\sin^2 \frac{sx}{2}}{x^3}$

$= \left(\frac{\lim_{x\to 0} \tan sx}{sx}\right) \times s\left(\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin sx}{\frac{sx}{2}}\right)^2\right) \times \frac{s^2}{2} = 1 \times s \times 1 \times \frac{s^2}{2} = \frac{s^3}{2}$

18. $y = \sqrt{x}$ গ্রাফে (x, y) বিন্দুটির মান নির্ণয় কর যা $(4,0)$ বিন্দুর নিকটতম। [RUET'15-16]

সমাধান: $y = \sqrt{x}$

(x, y) হতে, $(4,0)$ এর দূরত্ব $D = \sqrt{(4 - x)^2 + y^2} = \sqrt{(4 - x)^2 + x}$

$\therefore \frac{dD}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{(4-x)^2+x}} \cdot (2(4 - x).(-1) + 1) = \frac{-8+2x+1}{2\sqrt{(4-x)^2+x}} = \frac{2x-7}{2\sqrt{(4-x)^2+x}}$

$\therefore$ সর্বনিম্ন দূরত্বের জন্য, $\frac{dD}{dx} = 0 \Rightarrow 2x - 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{2}$

এখন, $\frac{d^2D}{dx^2} = \frac{1}{\sqrt{(4-x)^2+x}} + (2x - 7).\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)((4 - x)^2 + x)^{-\frac{3}{2}} . (2(4 - x)(-1) + 1)$

$= \frac{1}{\sqrt{(4-x)^2+x}} - \frac{2(x-7)}{4}((4 - x)^2 + x)^{-\frac{3}{2}}(2x - 7)$

$\therefore x = \frac{7}{2}$ বসিয়ে, $\frac{d^2D}{dx^2} = \frac{2\sqrt{15}}{15} > 0$; অতএব, $x = \frac{7}{2}$ এর জন্য দূরত্ব সর্বনিম্ন। $\therefore$ নির্ণেয় বিন্দু, $\left(\frac{7}{2}, \sqrt{\frac{7}{2}}\right)$ (Ans.)

19. If $y = (x + \sqrt{1 + x^2})^m + (x + \sqrt{1 + x^2})^{-m}$, find the value of $(1 + x^2)y_2 + xy_1 - m^2y$. [BUET'14-15]

সমাধান: $y = \left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)^m + \left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)^{-m}$

$\Rightarrow y_1 = m\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)^{m-1} \times \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) - m\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)^{-m-1} \times \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

$= \frac{m}{\sqrt{1+x^2}}\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)^m - \frac{m}{\sqrt{1+x^2}}\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)^{-m}$

$\Rightarrow (1 + x^2)y_1^2 = m^2\left\{\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)^m - \left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)^{-m}\right\}^2$; [বর্গ করে]

$\Rightarrow (1 + x^2)y_1^2 = m^2\left[\left\{\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)^m + \left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)^{-m}\right\}^2 - 4\right]$ $\therefore [(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab]$

$\Rightarrow (1 + x^2)y_1^2 = m^2(y^2 - 4) \Rightarrow (1 + x^2)2y_1y_2 + 2xy_1^2 = m^2 \cdot 2yy_1 \Rightarrow (1 + x^2)y_2 + xy_1 - m^2y = 0$ (Ans.)

20. 1 লিটার (1000 ঘন সে.মি.) তরল ধারণ ক্ষমতা সম্পন্ন দুই প্রান্তে আবদ্ধ একটি খাড়া বৃত্তাকার সিলিন্ডার প্রয়োজন। সিলিন্ডারটির উচ্চতা ও ব্যাসার্ধ কিরূপ হলে সর্বাপেক্ষা কম ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট টিন দিয়ে তা তৈরী করা সম্ভব? **[BUET'06-07,14-15]**

সমাধান: ধরি, সিলিন্ডারের উচ্চতা h ডেসিমি. এবং ব্যাসার্ধ r ডেসিমি, তাহলে $\pi r^2 h = 1 \Rightarrow h = \frac{1}{\pi r^2}$

সিলিন্ডারের ক্ষেত্রফল, $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r(r+h) = 2\pi r\left(r + \frac{1}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{2}{r}$

$\therefore \frac{dA}{dr} = 4\pi r - \frac{2}{r^2}$ $\quad \therefore \frac{d^2A}{dr^2} = 4\pi + \frac{4}{r^3}$

A সর্বনিম্ন হলে, $4\pi r - \frac{2}{r^2} = 0 \Rightarrow 4\pi r - 2\pi h = 0$ | $\Rightarrow 4\pi r - 2\pi h = 0$

$\therefore \pi r^2 \times 2r = 1 \Rightarrow 2\pi r^3 = 1$ | $\Rightarrow 2r - h = 0$

$\therefore r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}} = 0.542$ dm $= 5.42$cm এবং $h = 2r = 10.84$cm | $\Rightarrow r = \frac{h}{2}$

21. শূন্য ব্যতীত k এর এমন একটি মান নির্ণয় কর যা উল্লেখিত ফাংশনকে $x = 0$ বিন্দুতে অবিচ্ছিন্ন করবে। তোমার উত্তরের যৌক্তিকতা ব্যাখ্যা কর। $f(x) = \begin{cases} \frac{\tan kx}{x}, & x < 0 \\ 3x + 2k^2, & x \geq 0 \end{cases}$ **[BUET'14-15]**

সমাধান: Given, $f(x) = \begin{cases} \frac{\tan kx}{x}, & x < 0 \\ 3x + 2k^2, & x \geq 0 \end{cases}$

1st part: L.H.L $= \lim_{x \to 0^-} \frac{\tan kx}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\tan kx}{kx} \times k = k$

R.H.L $= \lim_{x \to 0^+} (3x + 2k^2) = 2k^2$; Again, $f(0) = 3 \times 0 + 2k^2 = 0 + 2k^2 = 2k^2$

For continuity of $f(x)$ at $x = 0$, $2k^2 = k$ $\therefore k = 0, \frac{1}{2}$; So, $k = \frac{1}{2}$ As k is nonzero.

2nd part: if $k = \frac{1}{2}$; $f(x) = \begin{cases} \frac{\tan\frac{x}{2}}{x} & x < 0 \\ 3x + \frac{1}{2}, & x \geq 0 \end{cases}$

Now, $\lim_{x \to 0^-} \frac{\tan\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; $\lim_{x \to 0^+} \left(3x + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ and, $f(0) = \frac{1}{2}$

$\therefore \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$.

So, $f(x)$ is continuous at $x = 0$ when $k = \frac{1}{2}$

22. $\lim_{x \to 0} \frac{1-e^{2x}}{\ln(1-x)}$ এর মান বের কর। **[BUET'14-15]**

সমাধান: $\lim_{x \to 0} \frac{1-e^{2x}}{\ln(1-x)} \left[\frac{0}{0} \text{form}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{-2e^{2x}}{\frac{1}{1-x}(-1)} = \lim_{x \to 0} \{2e^{2x}(1-x)\} = 2$ (Ans.)

23. $(\cos x)^y = (\sin y)^x$ হলে $\frac{dy}{dx}$ এর মান নির্ণয় কর। **[BUET'13-14]**

সমাধান: $(\cos x)^y = (\sin y)^x$; $y \ln \cos x = x \ln \sin y$

$\therefore y_1 \ln \cos x + y\frac{1}{\cos x}(-\sin x) = x\frac{1}{\sin y}\cos y \cdot y_1 + \ln \sin y$

$\therefore y_1(\ln \cos x - x \cot y) = \ln \sin y + y \tan x$

$\therefore y_1 = \frac{\ln \sin y + y \tan x}{\ln \cos x - x \cot y}$ $\therefore \frac{dy}{dx} = \boxed{\frac{\ln \sin y + y \tan x}{\ln \cos x - x \cot y}}$

24. If, $y = a\cos\ln(x) + b\sin(\ln x)$, then prove, $x^2y_2 + xy_1 + y = 0$ **[BUTex'06-07, CUET'13-14]**

সমাধান: $y_1 = -a\sin\ln x.\frac{1}{x} + b\cos\ln x.\frac{1}{x} \Rightarrow xy_1 = -a\sin\ln x + b\cos\ln x$

$\Rightarrow xy_2 + y_1 = -a\cos\ln x.\frac{1}{x} - b\sin\ln x.\frac{1}{x} \Rightarrow x^2y_2 + xy_1 = -y \Rightarrow x^2y_2 + xy_1 + y = 0$ (Proved)

25. যদি $y = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx}$ এর মান বের কর। **[CUET'13-14]**

সমাধান: $y = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

let, $x = \tan\theta \quad \therefore \theta = \tan^{-1}x$

$\therefore y = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}-1}{\tan\theta} = \tan^{-1}\frac{\sec\theta-1}{\tan\theta} = \tan^{-1}\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \tan^{-1}\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2}$

$\therefore y = \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\tan^{-1}x \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}.\frac{1}{1+x^2}$ [Ans. $\frac{1}{2}.\frac{1}{1+x^2}$]

26. $x(12-2x)^2$ এর বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম মান নির্ণয় কর। **[RUET'12-13]**

সমাধান: Let, $f(x) = x(12-2x)^2 = x(4x^2-48x+144) = 4x^3-48x^2+144x$

$f'(x) = 12x^2-96x+144$; $f''(x) = 24x-96$

for minimum & maximum value

$f'(x) = 12x^2-96x+144 = 0 \quad \therefore x = 6,2$

f" (2) = -48 < 0; maximum value will be obtained. $\therefore$ maximum value f(2) = 128

f" (6) = 48 > 0; minimum value obtained. $\therefore$ minimum value f(6) = 0

27. দেখাও যে, $f(x) = x^{1/x}$ এর মান বৃহত্তম হবে যদি $x = e.$ হয়। **[BUET'12-13]**

সমাধান: $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{x}}\right) = x^{\frac{1}{x}}\left[\frac{1}{x}.\frac{dx}{dx} + \ln x\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)\right]\left[\frac{d}{dx}(u^v) = u^v\left(\frac{v}{u}\frac{du}{dx} + \ln u.\frac{dv}{dx}\right)\right] = x^{\frac{1}{x}}\left[\frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}\right]$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{x}}\right)\left[\frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}\right] + x^{\frac{1}{x}}\left[-\frac{2}{x^3} - \frac{x^2.\frac{1}{x} - \ln x.2x}{x^4}\right]$$

$$= \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{x}}\right)\left[\frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}\right] + x^{\frac{1}{x}}\left[-\frac{2}{x^3} - \frac{x-2x\ln x}{x^4}\right] = \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{x}}\right)\left[\frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}\right] + x^{\frac{1}{x}}\left[-\frac{2}{x^3} - \frac{1-2\ln x}{x^3}\right]$$

গুরুমান, লঘুমানের জন্য $f'(x) = 0 \quad \therefore x^{\frac{1}{x}}\left[\frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}\right] = 0 \Rightarrow x^{\frac{1}{x}-2}[1-\ln x] = 0$ $\therefore$ হয় $x^{\frac{1}{x}-2} = 0$

অথবা, $1-\ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1 = \ln e$

$\Rightarrow x = e$ এবং $f''(x)$এ $x = e$ হলে [অথবা প্রচলিত পদ্ধতিতে ℓn নিয়ে করা যাবে।]

$$f''(e)=\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{x}}\right)_{(x=e)}\left[\frac{1}{e^2}-\frac{\ln e}{e^2}\right]+e^{\frac{1}{e}}\left[-\frac{2}{e^3}-\frac{1-2\ln e}{e^3}\right]$$

$$=0+e^{\frac{1}{e}}\left[\frac{-2-1+2}{e^3}\right] x=e \text{ হলে } \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{x}}\right)=0$$

$=e^{\frac{1}{e}}\times\left(\frac{-1}{e^3}\right)$ যা ঋনাত্মক $\therefore x=e$ হলে $f(x)$ বৃহত্তম হয়। (Showed)

28. অন্তরক নির্ণয় করঃ $e^{x^2}+x^{x^2}$ **[RUET'12-13,08-09]**

সমাধান: $\frac{d}{dx}\left(e^{x^2}+x^{x^2}\right)=\frac{d}{dx}\left(e^{x^2}\right)+\frac{d}{dx}\left(x^{x^2}\right)=2xe^{x^2}+x^{x^2}(2x\ln x+x)$

Let, $y_1=e^{x^2} \Rightarrow \ln y_1=x^2 \Rightarrow \frac{1}{y_1}\frac{dy}{dx}=2x \Rightarrow \frac{dy}{dx}=2x.e^{x^2}$

$y_2=x^{x^2} \Rightarrow \ln y_2=x^2\ln x \Rightarrow \frac{1}{y_2}.\frac{dy}{dx}=2x\ln x+x \Rightarrow \frac{dy}{dx}=x^{x^2}(2x\ln x+x)$

29. সীমান্থ মান নির্ণয় করঃ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2(b-\sqrt{b^2+x^2})}{x^2}$ **[RUET'12-13]**

সমাধান: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\left(b-\sqrt{b^2+x^2}\right)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2(b^2-b^2-x^2)}{x^2(b+\sqrt{b^2+x^2})}=\frac{-2}{(b+\sqrt{b^2+0})}=-\frac{1}{b}$

30. যদি কোন সমবাহু ত্রিভূজের বাহু প্রতি সেকেন্ডে $\sqrt{3}$ সে.মি. এবং ক্ষেত্রফল প্রতি সেকেন্ডে 12 বর্গ সে.মি. বৃদ্ধি পায়, তবে সমবাহু ত্রিভূজটির বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। **[BUET'11-12]**

সমাধান: ধরি, বাহুর দৈর্ঘ্য a

ক্ষেত্রফল, $A=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$; এখন, $\frac{da}{dt}=\sqrt{3}$; $\frac{dA}{dt}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2a\times\frac{da}{dt} \Rightarrow 12=\frac{\sqrt{3}}{2}\times a\times\sqrt{3} \Rightarrow a=8\text{cm}$

31. (a) মান নির্ণয় কর ঃ dy/dx, যখন $y=\cot^{-1}(\sqrt{1+x^2}-x)$ **[RUET'11-12]**

সমাধান: $y=\cot^{-1}(\sqrt{1+x^2}-x)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-1}{1+(\sqrt{1+x^2}-x)^2}.\left(\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}.2x-1\right)=\frac{(\sqrt{1+x^2}-x)}{[1+(\sqrt{1+x^2}-x)^2][\sqrt{1+x^2}]}$$

(b) মান নির্ণয় কর ঃ dy/dx, যখন $x^a y^b=(x-y)^{a+b}$

সমাধান: $x^a y^b=(x-y)^{a+b} \Rightarrow \ln(x^a.y^b)=\ln(x-y)^{a+b}$

$$\Rightarrow \ln x^a+\ln y^b=(a+b)\ln(x-y) \Rightarrow a\ln x+b\ln y=(a+b)\ln(x-y)$$

$$\Rightarrow \frac{a}{x}+\frac{b}{y}.\frac{dy}{dx}=\frac{a+b}{x-y}\left(1-\frac{dy}{dx}\right) \Rightarrow \frac{a}{x}+\frac{b}{y}.\frac{dy}{dx}=\frac{a+b}{x-y}-\frac{a+b}{x-y}.\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{y}.\frac{dy}{dx}+\frac{a+b}{x-y}.\frac{dy}{dx}=\frac{a+b}{x-y}-\frac{a}{x} \Rightarrow \left(\frac{b}{y}+\frac{a+b}{x-y}\right)\frac{dy}{dx}=\frac{ax+bx-ax+ay}{x(x-y)}$$

$$\Rightarrow \left\{\frac{bx-by+ay+by}{y(x-y)}\right\}\frac{dy}{dx}=\frac{bx+ay}{x(x-y)} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}.\frac{bx+ay}{bx+ay}\ [x\neq y] \ \therefore \frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$$

32. যদি $\cos^{-1}\left(\frac{y}{b}\right)=\ln\left(\frac{x}{n}\right)^n$ হয়, প্রমাণ কর যে, $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+n^2y=0$ **[BUET'10-11]**

সমাধান: $\cos^{-1}\left(\frac{y}{b}\right)=n\ln\left(\frac{x}{n}\right) \Rightarrow \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}.\frac{1}{b}.\frac{dy}{dx}=n.\frac{n}{x}.\frac{1}{n}$ [x এর সাপেক্ষে ব্যবকলন]

$\Rightarrow \frac{-b}{\sqrt{b^2-y^2}}.\frac{1}{b}.\frac{dy}{dx}=\frac{n}{x} \Rightarrow \frac{-dy}{dx}=\frac{n}{x}\sqrt{b^2-y^2} \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{n^2}{x^2}(b^2-y^2)$ [বর্গ করে]

$\Rightarrow x^2.\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=n^2(b^2-y^2) \Rightarrow$ পুনরায় differentiate করে

$\Rightarrow x^2.2.\frac{dy}{dx}.\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2.2x=-n^2.2yy_1 \Rightarrow x^2.2y_1.\frac{d^2y}{dx^2}+y_1{}^2 2x=-n^2.2yy_1$

উভয়পক্ষকে $2y_1$ দ্বারা ভাগ করে, $x^2.y_2+xy_1+n^2y=0 \Rightarrow x^2.\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+n^2y=0$ [Proved]

33. $e^x+e^y=e^{x+y}$ হলে dy/dx এর মান নির্ণয় কর। **[RUET'10-11]**

সমাধান: $e^x+e^y=e^{x+y} \Rightarrow \frac{d}{dx}(e^x+e^y)=\frac{d}{dx}(e^{x+y}) \Rightarrow e^x+e^y.\frac{dy}{dx}=e^{x+y}\left(1+\frac{dy}{dx}\right)$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(e^y-e^{x+y})=e^{x+y}-e^x \quad \therefore \frac{dy}{dx}=\frac{e^{x+y}-e^x}{e^y-e^{x+y}}$ (Ans.)

34. $f(x)=\sin x$ হলে, মান নির্ণয় কর ঃ $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+nh)-f(x)}{nh}$ **[RUET'11-11]**

সমাধান: $\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+nh)-\sin x}{nh}$ When, $h\to 0$ then $nh\to 0$

$=\lim_{nh\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{nh}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{nh} = \lim_{nh\to 0}\cos\left(x+\frac{nh}{2}\right).\frac{\sin\frac{nh}{2}}{\frac{nh}{2}} = \lim_{nh\to 0}\cos\left(x+\frac{nh}{2}\right).\lim_{nh\to 0}\frac{\sin\frac{nh}{2}}{\frac{nh}{2}}$

$=\cos x.1 = \cos x$

35. $\frac{d}{dx}(a^x)=?$ **[BUTex'10-11]**

সমাধান: $\frac{d}{dx}(a^x)=a^x\ln a$

36. (a) মান নির্ণয় করঃ $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+3}$ **[RUET'10-11]**

সমাধান: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+3} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}.\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3}=e.1^3 = e$ (Ans.)

(b) মান নির্ণয় কর ঃ $\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{1+x-e^x}$

সমাধান: $\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{1+x-e^x} = \lim_{x\to 0}\frac{x-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}-.....}{1+x-1-\frac{x}{1!}-\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}-\frac{x^4}{4!}-.....}$ [By expanding]

$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}-.....}{\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}-\frac{x^4}{4!}-.....} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}-\frac{x}{3}+\frac{x^2}{4}-.....}{\frac{1}{2}-\frac{x}{3!}-\frac{x^2}{4!}-.....} = -1$ (Ans.)

37. যদি $x = f(t)$ এবং $y = g(t)$ হলে প্রমাণ কর যে, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x_1y_2 - y_1x_2}{x_1^3}$ **[RUET'09-10]**

সমাধান: ধরি, $\frac{dx}{dt} = x_1$; $\frac{dy}{dt} = y_1$; $\frac{dx_1}{dt} = x_2$ ও $\frac{dy_1}{dt} = y_2$ $\therefore \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dx} = \frac{y_1}{x_1}$

আবার, $\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{y_1}{x_1}\right) = \frac{x_1y_2 - y_1x_2}{x_1^2}$; এবং $\frac{dx}{dt} = x_1$

তাহলে, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{x_1y_2 - y_1x_2}{x_1^2.x_1} = \frac{x_1y_2 - y_1x_2}{x_1^3}$ (Proved)

38. $y = x^{n-1}\ln x$ হলে প্রমাণ কর যে, $x^2y_2 + (3-2n)xy_1 + (n-1)^2y = 0$ **[BUET'09-10]**

সমাধান: $y = x^{n-1}\ln x$; $y_1 = x^{n-2} + (n-1)\ln x.x^{n-2}$

$xy_1 = x^{n-1} + (n-1)\,x^{n-1}.\ln x = x^{n-1} + (n-1)y$

$y_2 = (n-2)\,x^{n-3} + (n-1)\{(n-2)\,x^{n-3}.\ln x + x^{n-3}\}$

$x^2y_2 = (n-2)\,x^{n-1} + (n-1)\,(n-2)\,x^{n-1}\ln x + (n-1)\,x^{n-1} = (2n-3)\,x^{n-1} + (n-1)\,(n-2)\,y$

$x^2y_2 + (3-2n)\,xy_1 + (n-1)^2y = (2n-3)\,x^{n-1} + (n-1)\,(n-2)y + (3-2n)\,x^{n-1} + (n-1)\,(3-2n)y + (n-1)^2y$

$= (n-1)\,(1-n)y + (n-1)^2y = -(n-1)^2y + (n-1)^2y = 0$ (Proved)

39. $x^2 + 2ax + y^2 = 0$ বক্ররেখার উপর স্পর্শকের স্পর্শবিন্দুগুলো নির্ণয় কর, যেখানে স্পর্শকসমূহ x অক্ষের উপর লম্ব।

সমাধান: $x^2 + 2ax + y^2 = 0$.....(i) **[CUET'09-10]**

$\Rightarrow 2x + 2a + 2y\frac{dy}{dx} = 0$ [x এর সাপেক্ষে ব্যবকলন করে]

$\frac{dy}{dx} = \frac{-(x+a)}{y}$; x অক্ষের উপর লম্ব বলে, $\frac{dx}{dy} = 0$ $\therefore \frac{-y}{(x+a)} = 0$ $\therefore y = 0$

(i)-এ $y = 0$ বসিয়ে, $x^2 + 2ax = 0$ $\therefore x = 0, -2a$ $\therefore$ বিন্দুগুলো (0, 0), (–2a, 0) (Ans.)

40. যদি (If) $y=\sin\left\{2\tan^{-1}\sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)}\right\}$ হয় তবে (find) $\frac{dy}{dx}=?$ **[CUET'09-10]**

সমাধান: ধরি, $x=\cos\theta$

$\therefore\ y=\sin\left\{2\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}\right\}=\sin\left\{2\tan^{-1}\tan\frac{\theta}{2}\right\}=\sin\left(2\times\frac{\theta}{2}\right)=\sin\theta$

$=\sin(\cos^{-1}x)=\sin\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-x^2}\ \therefore\ \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\sqrt{1-x^2}\right)=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ (Ans.)

41. $y=\frac{2}{x}$ বক্ররেখার যে বিন্দুতে $x=\frac{1}{2}$, সেই বিন্দুতে উহার ঢাল কত? **[BUTex'09-10]**

সমাধান: $\frac{dy}{dx}=-2x^{-2}\ \therefore\frac{dy}{dx}=-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=-8$

42. $\left(\sqrt{x}\right)^{\sqrt{x}}$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। **[BUET'05-06, CUET'09-10]**

সমাধান: $y=\left(\sqrt{x}\right)^{\sqrt{x}}\Rightarrow\ln y=\sqrt{x}.\ln\sqrt{x}\ \therefore\frac{dy}{dx}=\left(\sqrt{x}\right)^{\sqrt{x}}.\left\{\frac{1}{2\sqrt{x}}.\ln\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}.\frac{1}{2\sqrt{x}}.\sqrt{x}\right\}$

$=\frac{\left(\sqrt{x}\right)^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}(\ln\sqrt{x}+1)=\frac{1}{2}.(\sqrt{x})^{\sqrt{x}-1}(\ln\sqrt{x}+1)=\frac{1}{2}.(\sqrt{x})^{\sqrt{x}-1}(\frac{1}{2}\ln x+1)$ (Ans.)

43. $x-$ এর সাপেক্ষে অন্তরক সহগ নির্ণয় কর ঃ $\sin^4\left(\cot^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)$ **[BUET'09-10]**

সমাধান: ধরি, $x=\cos2\theta\ \therefore\frac{1+x}{1-x}=\frac{1+\cos2\theta}{1-\cos2\theta}=\frac{2\cos^2\theta}{2\sin^2\theta}=\cot^2\theta\ \therefore\theta=\cot^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

$\therefore\sin^4\left(\cot^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)=\sin^4\theta=(\sin^2\theta)^2=\left\{\frac{1}{2}(1-\cos2\theta)\right\}^2=\frac{1}{4}(1-x)^2$

$\therefore\frac{d}{dx}\left\{\sin^4\left(\cot^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)\right\}=\frac{1}{4}\frac{d}{dx}(1-x)^2=\frac{1}{4}\times2(x-1)=\frac{x-1}{2}$ (Ans.)

44. মান নির্ণয় কর ঃ $\lim_{x\to0}\frac{\tan^{-1}x}{x}$ **[RUET'09-10]**

সমাধান: ধরি, $\tan^{-1}x=\theta$ বা, $\tan\theta=x$ যেহেতু $x\to0$ তাই $\theta\to0$

$\therefore\lim_{x\to0}\frac{\tan^{-1}x}{x}=\lim_{\theta\to0}\frac{\theta}{\tan\theta}=\lim_{\theta\to0}\frac{1}{\frac{\tan\theta}{\theta}}=\frac{1}{1}=1$ (Ans.)

45. দেখাও যে, $y=\sin(m\sin^{-1}x)$ সমীকরণ $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+m^2y=0$ কে সিদ্ধ করে।

সমাধান: $y=\sin(m\sin^{-1}x)\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{m\cos(m\sin^{-1}x)}{\sqrt{1-x^2}}$ [x এর সাপেক্ষে ব্যবকলন করে]

$\Rightarrow(1-x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=m^2\cos^2(m\sin^{-1}x)=m^2(1-y^2)$ **[RUET'00-01,07-08,08-09]**

$\Rightarrow2\left(\frac{dy}{dx}\right)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)(1-x^2)+(-2x)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=-2y\left(\frac{dy}{dx}\right)\times m^2\Rightarrow(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+m^2y=0$

46. মান নির্ণয় কর : $\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x-\sin 3x}{x^3}$ **[RUET'08-09]**

সমাধান: $\lim_{x\to0}\frac{3\sin x-\sin 3x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{3\sin x-(3\sin x-4\sin^3 x)}{x^3}=\lim_{x\to0}4\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3$

$=4\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3=4.1=4$ [Ans.]

47. $x^{y^n}=y^{x^n}$ হলে দেখাও যে, $\frac{dy}{dx}=\frac{y^{n+1}(n\log x-1)}{x^{n+1}(n\log y-1)}$, যেখানে n একটি ধ্রুবক। **[BUET'08-09]**

সমাধান: $y^n\ln(x)=x^n\ln(y)\Rightarrow ny^{n-1}.\frac{dy}{dx}.\ln(x)+y^n\frac{1}{x}=nx^{n-1}\ln y+x^n\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow\frac{dy}{dx}\left(ny^{n-1}.\ln(x)-\frac{x^n}{y}\right)=nx^{n-1}\ln y-\frac{y^n}{x}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}.\frac{nx^n\ln y-y^n}{ny^n\ln x-x^n}$

$\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}.\frac{ny^n\ln x-y^n}{nx^n\ln y-x^n}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{y^{n+1}}{x^{n+1}}\frac{(n\ln x-1)}{(n\ln y-1)}$

48. (a) প্রমাণ কর যে,: $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$ (b) মান নির্ণয় কর: $\lim_{x\to0}\frac{3\sin x-\sin 3x}{x^3}$

সমাধান: (a) Proof : $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}$ **[RUET'08-09, KUET'08-09]**

$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left[1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+.....\alpha-1\right]$ [e^x কে অসীম ধারায় বিস্তৃত করিয়া]

$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left[x+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^3}{\lfloor 3}+.....\infty\right]=\lim_{x\to0}\left[1+\frac{x}{\lfloor 2}+\frac{x^2}{\lfloor 3}+.....\infty\right]=1\therefore\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$

Alternate: $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}$ [% indeterminant form] $=\lim_{x\to0}\frac{e^x}{1}$ [L'Hospital] $=1$ (Ans.)

সমাধান: (b) $\lim_{x\to0}\frac{3\sin x-\sin 3x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{3\sin x-(3\sin x-4\sin^3 x)}{x^3}=\lim_{x\to0}4\left(\frac{\sin x}{x}\right)^3$

$=4\left(\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\right)^3=4.1=4$ [Ans.]

49. (a) $y=\sec x$ হলে, দেখাও যে, $y_2=y(2y^2-1)$ **[CUET'07-08]**

সমাধান: $y=\sec x\ \therefore y_1=\sec x\tan x;\ y_2=\sec x.\sec^2 x+\tan x(\sec x.\tan x)$

$=\sec x(\sec^2 x+\tan^2 x)=\sec x(2\sec^2 x-1)=y(2y^2-1)$ (Showed)

(b) $x^y-y^x=0$ সমীকরণ হতে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।

সমাধান: $x^y-y^x=0\ \therefore x^y=y^x\Rightarrow y\ln x=x\ln y\Rightarrow y\frac{1}{x}+\ln x\frac{dy}{dx}=x\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}+\ln y$

$\frac{dy}{dx}\left(\ln x-\frac{x}{y}\right)=\ln y-\frac{y}{x}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{x\ln y-y}{x}}{\frac{y\ln x-x}{y}}=\frac{y(x\ln y-y)}{x(y\ln x-x)}$ (Ans.)

50. $y=\frac{1}{3}x^3+2$ বক্ররেখাটির উপরস্থ এমন কিছু বিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় কর যেসব বিন্দুগামি স্পর্শকগুলো x -অক্ষের সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে। **[CUET'07-08]**

সমাধান: $y=\frac{1}{3}x^3+2;\ \frac{dy}{dx}=x^2$

আবার, $\frac{dy}{dx}=x^2=\tan 45°=1\ \therefore x=\pm 1\ \ \therefore y=\frac{1}{3}+2;\ y=\frac{-1}{3}+2=\frac{7}{3}=\frac{5}{3}\ \ \therefore\left(1,\frac{7}{3}\right),\left(-1,\frac{5}{3}\right)$

51. $y^3=x^2(2a-x)$ বক্ররেখার যেসব বিন্দুতে স্পর্শক x – অক্ষের সমান্তরাল, সেগুলি নির্ণয় কর। **[RUET'07-08]**

সমাধান: $y^3=x^2(2a-x)=2ax^2-x^3$

Differentiating both sides we get, $3y^2\frac{dy}{dx}=4ax-3x^2\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{4ax-3x^2}{3y^2}$

স্পশর্ক x -অক্ষের সমান্তরাল হলে,

$\frac{dy}{dx}=0\ \ \Rightarrow\frac{4ax-3x^2}{3y^2}=0\ \ \Rightarrow 4ax-3x^2=0\ \ \Rightarrow x(4a-3x)=0\ \ \Rightarrow x=0,\frac{4a}{3}$

$x=0$ হলে $y^3=2a\times 0^2-0^3=0\ \ \Rightarrow y=0$

$x=\frac{4a}{3}$ হলে, $y^3=2a\times\frac{16a^2}{9}-\frac{64a^3}{27}=\frac{96a^3-64a^3}{27}=\frac{32a^3}{27}\ \Rightarrow y=\frac{a}{3}\sqrt[3]{32}=\frac{a}{3}\sqrt[3]{2^3\times 4}=\frac{2a}{3}\sqrt[3]{4}$

∴ নির্ণেয় বিন্দু সমূহের স্থানাংক $(0,\ 0),\left(\frac{4a}{3},\frac{2a}{3}\sqrt[3]{4}\right)$ (Ans.)

52. $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর, যেখানে $y=e^{\frac{1}{2}\ln(\tan 2\sqrt{x})}$ **[BUTex'07-08]**

সমাধান: $y=e^{\frac{1}{2}\ln(\tan 2\sqrt{x})}=e^{\ln(\tan 2\sqrt{x})^{\frac{1}{2}}}=\left\{\tan\left(2\sqrt{x}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\frac{1}{\left\{\tan(2\sqrt{x})\right\}^{\frac{1}{2}}}.\sec^2\left(2\sqrt{x}\right)\frac{2}{2\sqrt{x}}=\frac{\sec^2(2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}\left\{\tan(2\sqrt{x})\right\}^{\frac{1}{2}}}$

53. মূল নিয়মে $\log_a x$ এর অন্তরীকরণ কর। **[BUTex'07-08]**

সমাধান: ধরি, $f(x)=\log_a x=\log_a e\times\log_e x;\ \ f(x+h)=\log_a e\times\log_e(x+h)$

$\therefore\frac{d}{dx}f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h};\ \ \frac{d}{dx}\log_a x=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a e\times\ln(x+h)-\log_a e\ln x}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a e\{\ln(x+h)-\ln x\}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a e\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}=\log_a e\lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{h}{x}-\frac{1}{2}\frac{h^2}{x^2}+\frac{1}{3}\frac{h^3}{x^3}------\right)}{h}$

$=\log_a e\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\frac{h}{x^2}+\frac{1}{3}\frac{h^2}{x^3}------\right)=(\log_a e)\frac{1}{x}$ (Ans.)

54. (a) প্রমাণ কর যে, : $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$ (b) মান নির্ণয় কর ঃ $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 7x-\cos 9x}{\cos 3x-\cos 5x}$ **[RUET'07-08]**

সমাধান: (a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}=\lim_{\frac{x}{2}\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\times\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}x \quad [\because x\to 0 \text{ তাই } \frac{x}{2}\to 0]$$

$$=1\times\frac{1}{2}\times 0=0 \quad \text{(Proved)}$$

(b) $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 7x-\cos 9x}{\cos 3x-\cos 5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{9x+7x}{2}\sin\frac{9x-7x}{2}}{2\sin\frac{5x+3x}{2}\sin\frac{5x-3x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 8x\sin x}{2\sin 4x\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 8x}{8x}}{\frac{\sin 4x}{4x}}.\frac{8}{4}=\frac{\lim_{8x\to 0}\frac{\sin 8x}{8x}}{\lim_{4x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}}.\frac{8}{4}=\frac{1}{1}.\frac{8}{4}=2 \quad \text{(Ans.)}$$

55. $y = 3$ সরল রেখার সমান্তরাল যে রেখা $y = (x-3)^2(x-2)$ বক্র রেখার যে সমস্ত বিন্দুতে স্পর্শক সেই বিন্দুগুলির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। **[KUET'06-07]**

সমাধান: $y = (x-3)^2(x-2)$

x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $\frac{dy}{dx}=2(x-3)(x-2)+(x-3)^2$

স্পর্শক $y = 3$ সরল রেখার সমান্তরাল হলে তার ঢাল $\frac{dy}{dx}=0$

$\therefore 2(x-3)(x-2)+(x-3)^2=0$

$\Rightarrow 2(x^2-5x+6)+x^2-6x+9=0$

$\Rightarrow 3x^2-16x+21=0 \Rightarrow 3x^2-9x-7x+21=0$

$\Rightarrow 3x(x-3)-7(x-3)=0 \Rightarrow (3x-7)(x-3)=0$

$\therefore x = 3, {}^7/_3$

যখন $x = 3$

then $y = 0$

when $x = {}^7/_3$

then $y=\left(-\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow y=\frac{4}{27}$.

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্দু $(3, 0)$ ও $\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{27}\right)$ (Ans.)

56. অন্তরক নির্ণয় করঃ $\tan^{-1}\frac{a+bx}{b-ax}$ **[RUET'06-07,KUET'06-07]**

সমাধান: $\tan^{-1}\frac{a+bx}{b-ax}=\tan^{-1}\frac{\frac{a}{b}+x}{1-\frac{a}{b}x}=\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)+\tan^{-1}x \quad \therefore \frac{d}{dx}\left\{\tan^{-1}\frac{a}{b}+\tan^{-1}x\right\}=\frac{1}{1+x^2}$

57. (a) মান নির্ণয় কর ঃ $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-a^{-x}}{x}$ **[RUET'06-07]**

সমাধান: $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[\left\{1+x\ln a+\frac{x^2(\ln a)^2}{2!}+\frac{x^3(\ln a)^3}{3!}+.....\right\}-\left\{1-x\ln a+\frac{x^2(\ln a)^2}{2!}-\frac{x^3(\ln a)^3}{3!}+...\right\}\right]$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}[2x\ln a+\frac{2x^3}{3!}(\ln a)^3+.....]=\lim_{x\to 0}[2\ln a+\frac{2x^2}{3!}(\ln a)^3+...]=2\ln a \quad \text{(Ans.)}$$

Alternate: $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-a^x}{x}$ [$\frac{0}{0}$ indeterminant form]

$= \lim_{x\to 0}\frac{(\ln a)a^x+(\ln a)a^{-x}}{1}$ [L'Hospitals rule]

$= \ln a - 1 + \ln a - 1 = 2\ln a$ (Ans.)

(b) যদি $x^2 = 5y^2 + \sin y$ হয়, তাহলে $\frac{dy}{dx}$ কত হবে?

সমাধান: given. $x^2 = 5y^2 + \sin y \quad \therefore \frac{d}{dx}(x^2) = \frac{d}{dx}\{5y^2 + \sin y\}$

$$\Rightarrow 2x = 10y\frac{dy}{dx} + \cos y.\frac{dy}{dx} = (10y + \cos y)\frac{dy}{dx} \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{10y + \cos y} \quad \text{(Ans.)}$$

58. যদি $y = \cos(2\sin^{-1}x)$ হয়, তবে দেখাও যে, $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + 4y = 0$ **[BUET'04-05,05-06]**

সমাধান: $y = \cos(2\sin^{-1}x)$

x-এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে

$$\frac{dy}{dx} = -\sin(2\sin^{-1}x)\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow (1-x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4\sin^2(2\sin^{-1}x) \text{ [বর্গকরে]}$$

$$\Rightarrow (1-x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4\{1-\cos^2(2\sin^{-1}x)\}$$

$$\Rightarrow (1-x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4(1-y^2)$$

$$2(1-x^2)\frac{dy}{dx}.\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2(-2x) = 4(-2y)\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x.\frac{dy}{dx} = -4y$$

[উভয় পক্ষকে $2.\frac{dy}{dx}$ দ্বার ভাগ করে]

$$\Rightarrow (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x.\frac{dy}{dx} + 4y = 0$$

59. যদি $y = \frac{1}{2}(\sin^{-1}x)^2$ হয়, তবে প্রমাণ কর $(1-x^2)y_2 - xy_1 = 1$ **[CUET'05-06]**

সমাধান: $y_1 = \frac{1}{2}.2(\sin^{-1}x)\frac{d}{dx}.(\sin^{-1}x) = \sin^{-1}x.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ বা, $\left(\sqrt{1-x^2}\right)y_1 = \sin^{-1}x$

বা, $\left(\sqrt{1-x^2}\right)y_2 + y_1.\frac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \therefore (1-x^2)y_2 - xy_1 = 1$ (Proved)

60. $y = x^2 - 3x + 2$ বক্র রেখাটির যে সমস্ত বিন্দুতে স্পর্শকগুলো x-অক্ষের সমান্তরাল তাদের স্থানাংক নির্ণয় কর।

সমাধান: $y = x^2 - 3x + 2 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = 2x - 3$ **[CUET'05-06]**

যেহেতু স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল $\therefore \frac{dy}{dx} = 0 \quad \therefore 2x - 3 = 0 \quad \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

$\therefore y = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3.\frac{3}{2} + 2 = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 2 = \frac{9-18+8}{4} = \frac{-1}{4}$ বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ (Ans.)

61. দেখাও যে, x-এর সাপেক্ষে $\ell n \sqrt[3]{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ এর অন্তরক সহগ $\frac{2}{3}$ cosecx। **[CUET'05-06]**

সমাধান: ধরি, $y = \ell n \sqrt[3]{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \ell n \sqrt[3]{\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}} = \ell n\left(\tan\frac{x}{2}\right)^{2/3}$

$y = \frac{2}{3}\ell n \tan\frac{x}{2} \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}.\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\sec^2\frac{x}{2}.\frac{1}{2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{2}{3}\frac{1}{\sin x} = \frac{2}{3}\operatorname{cosec} x$ (Proved)

62. অন্তরক সহগ নির্ণয় করঃ $\frac{x\log x}{\sqrt{1+x^2}}$ **[KUET'05-06]**

সমাধান: $y = \frac{x\log x}{\sqrt{1+x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1+x^2}\,(\log x+1) - x\log x\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)}{1+x^2}$

$= \frac{(1+x^2)(\log x+1)-x^2\log x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\log x+1+x^2\log x+x^2-x^2\log x}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3} = \frac{1+x^2+\log x}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3}$ (Ans.)

63. অন্তরক সহগ নির্ণয় কর: $\cot^{-1}\left(\frac{x^2}{e^x}\right)+\cot^{-1}\left(\frac{e^x}{x^2}\right)$ **[RUET'05-06]**

সমাধান: Let, $y = \cot^{-1}\left(\frac{x^2}{e^x}\right)+\cot^{-1}\left(\frac{e^x}{x^2}\right) = \cot^{-1}\left(\frac{x^2}{e^x}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{x^2}{e^x}\right) = \frac{\pi}{2}$

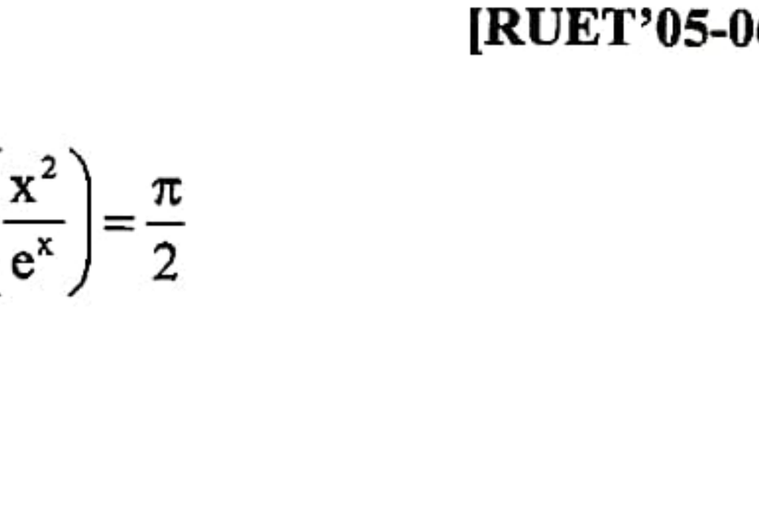
$\left[\tan^{-1}\theta+\cot^{-1}\theta = \frac{\pi}{2}\right] \therefore \frac{dy}{dx} = 0$ (Ans.)

64. (a) প্রমাণ কর যে, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ **[RUET'05-06]**

সমাধান: O কেন্দ্র এবং OA = OD = 1 ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ আঁকি। DB লম্ব আঁকি যা OA -এর বর্ধিতাংশকে B বিন্দুতে ছেদ করে। এমন, OD -এর উপর AC লম্ব আঁকি। মনে করি $\angle AOC = x$ রেডিয়ান

চিত্র থেকে $\Delta OAC < \Delta OAD < \Delta OBD \Rightarrow \frac{1}{2}\sin x\ \cos x < 1/2.(1)^2.x < \frac{1}{2}\tan x$

$\Rightarrow \cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}$



যখন, $x \to 0$, $\cos x \to 1$, তখন, আমরা পাই।

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ (Proved)

(b) মান নির্ণয় কর (Evaluate) : $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$

সমাধান: $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$ Let, $\pi/2 - x = \theta$ $\because x \to \frac{\pi}{2}$ $\therefore \theta \to 0$

$$= \lim_{\theta \to 0} \frac{1-\sin(\pi/2-\theta)}{\theta^2} = \lim_{\theta \to 0} \frac{1-\cos\theta}{\theta^2} = \lim_{\theta \to 0} \frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{\theta^2} = \lim_{\theta \to 0} \times \left(\frac{\sin\theta/2}{\theta/2}\right)^2 \times \frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{2}$$

65. $y = kx(1+x)$ বক্ররেখাটির (3, 0) বিন্দুতে স্পর্শক X-অক্ষের সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করলে k-এর মান বের কর।

সমাধান: $y = kx(1+x) = k(x+x^2)$ $\therefore \frac{dy}{dx} = k(1+2x)$ **[CUET'04-05]**

(3, 0) বিন্দুতে, $\frac{dy}{dx} = k(1+2\times3) = 7k \Rightarrow \tan 30° = 7k \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = 7k$ $\therefore k = \frac{1}{7\sqrt{3}}$ (Ans.)

66. $\tan y = \frac{2t}{1-t^2}$ এবং $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ এর মান নির্ণয় কর। **[KUET'04-05]**

সমাধান: $\tan y = \frac{2t}{1-t^2} = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ $[\text{Let}, t = \tan\theta] = \tan 2\theta$ $\therefore y = 2\theta = 2\tan^{-1}t$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2}{1+t^2};\ x = \sin^{-1}\frac{2t}{1+t^2} = 2\tan^{-1}t \ \therefore \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2} \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = 1 \quad \text{(Ans.)}$$

67. (a) মান নির্ণয় কর ঃ $\frac{dy}{dx}$, যখন $x^y = y^x$ **[RUET'04-05]**

সমাধান: $x \ln y = y \ln(x) \Rightarrow x\frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} + 1 \ln y = y.\frac{1}{x} + \ln(x).\frac{dy}{dx}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\left\{\frac{x}{y} - \ln(x)\right\} = \frac{y}{x} - \ln(y) \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\left\{\frac{y - x\ln(y)}{x - y\ln(x)}\right\}. \quad \text{(Ans.)}$$

(b) যদি $y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ হয় তবে দেখাও যে, $2xy_1 + y = 2\sqrt{x}$.

$\Rightarrow y\sqrt{x} = x + 1 \text{----------(1)} \Rightarrow y\frac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}.\ y_1 = 1 \Rightarrow 2xy_1 + y = 2\sqrt{x}$. (Showed)

68. অন্তরক নির্ণয় কর ঃ $\log(\sin^{-1}x)\cos^{-1}x$. **[RUET'04-05]**

সমাধান: Let, $y = \log(\sin^{-1}x)\cos^{-1}x$ $\therefore \frac{dy}{dx} = \log(\sin^{-1}x).\left\{-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right\} + \cos^{-1}x\frac{1}{\sin^{-1}x}.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left\{\frac{\cos^{-1}x}{\sin^{-1}x} - \log(\sin^{-1}x)\right\}$ (Ans.)

69. অন্তরক নির্ণয় কর ঃ (i) $y = \ln\left\{e^x\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}$ (ii) $y = \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ **[BUTex'04-05]**

সমাধান: (i) $y = \ln\left\{e^x\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{3}{2}}\right\} = x + \frac{3}{2}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

$= x + \frac{3}{2}\ln(x-1) - \frac{3}{2}\ln(x+1)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{3}{2}\frac{1}{(x-1)} - \frac{3}{2}\frac{1}{(x+1)}$ (Ans.)

(ii) $y = \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

$= \tan^{-1}\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}} = \tan^{-1}\left(\tan\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$ (Ans.)

70. মান নির্ণয় কর ঃ $\lim_{x \to y} \frac{\sin x - \sin y}{x - y}$. **[KUET'04-05]**

সমাধান: $\lim_{x \to y} \frac{2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}}{x-y} = \lim_{x \to y} \cos\frac{x+y}{2} \times \lim_{x-y \to 0} \frac{\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}{\left(\frac{x-y}{2}\right)} = \cos y$

71. মান নির্ণয় করঃ $\lim_{x \to \infty} \{\ln(2x-1)\} - \ln(x+5)\}$ **[KUET'04-05]**

সমাধান: $\lim_{x \to \infty} \ln\frac{2x-1}{x+5} = \lim_{x \to \infty} \ln\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{5}{x}} = \ln 2$ (Ans.)

72. $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর। $(\cos x)^y = (\sin y)^x$ **[BUET'03-04]**

সমাধান: $(\cos x)^y = (\sin y)^x \Rightarrow y\ln\cos x = x\ln\sin y \Rightarrow y.\frac{-\sin x}{\cos x} + \ln(\cos x)\frac{dy}{dx} = \ln\sin y + \frac{x\cos y}{\sin y}\frac{dy}{dx}$.

$\Rightarrow y(-\tan x) + \ln(\cos x)\frac{dy}{dx} = \ln\sin y + x\frac{\cos y}{\sin y}\frac{dy}{dx}$. $\Rightarrow \frac{dy}{dx}\left(\ln\cos x - x\frac{\cos y}{\sin y}\right) = y\tan x + \ln\sin y$.

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\left(\frac{\sin y\ln\cos x - x\cos y}{\sin y}\right) = y\tan x + \ln\sin y \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\sin y\{y\tan x + \ln(\sin y)\}}{\sin y\ln(\cos x) - x\cos y}$. (Ans.)

73. $y = (x+1)(x-1)(x-3)$ বক্ররেখাটি যে সব বিন্দুতে x -অক্ষকে ছেদ করে, ঐ বিন্দুগুলিতে অঙ্কিত স্পর্শকসমূহের ঢাল নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রদত্ত রেখাটি x অক্ষকে ছেদ করে। সেক্ষেত্রে $y = 0$ $\therefore$ ছেদবিন্দুসমূহ (–1,0), (1, 0), (3, 0) **[BUET'03-04]**

প্রদত্ত সমীকরণ হবে, $\ln y = \ln(x+1) + \ln(x-1) + \ln(x-3)$

$\therefore \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-3} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = (x-1)(x-3) + (x+1)(x-3) + (x+1)(x-1)$

প্রদত্ত সমীকরণে বিন্দুগুলোর স্থানাংকের মান বসিয়ে পাই, নির্ণেয় ঢাল = 8, -4, 8 (Ans.)

Another Process : ছেদবিন্দু (–1, 0), (1, 0), (3, 0)

$y = (x+1)(x-1)(x-3) = (x^2-1)(x-3) = x^3 - 3x^2 - x + 3 \quad \therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x - 1$

$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1} = -4;\ \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=-1} = 8;\ \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=3} = 8$ (Ans.)

74. যদি $y = e^{\tan^{-1}x}$ হয় তবে $\frac{(dy/dx)}{(d^2y/dx^2)}$ এর মান কত? **[CUET'03-04]**

সমাধান: $y = e^{\tan^{-1}x} \quad \therefore \frac{dy}{dx} = e^{\tan^{-1}x}\frac{1}{1+x^2} = \frac{y}{1+x^2} \quad \therefore (1+x^2)\frac{dy}{dx} = y$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(1+x^2)\frac{dy}{dx} - 2xy}{(1+x^2)^2} = \frac{y-2xy}{(1+x^2)^2} = \frac{y(1-2x)}{(1+x^2)^2} \quad \therefore \frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{\frac{y}{1+x^2}}{\frac{y(1-2x)}{(1+x^2)^2}} = \frac{1+x^2}{1-2x} \quad \text{(Ans.)}$$

75. x কে পরিবর্তনশীল ধরে নীচের ফাংশনগুলোর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। **[KUET'03-04]**

ক) $5e^x \ln x$ খ) $\tan^{-1}\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$

সমাধান: ক) $5e^x \ln x \ \therefore \frac{d}{dx}(5e^x \ln x) = 5\left\{e^x.\frac{1}{x} + \ln x.e^x\right\} = 5e^x\left(\frac{1}{x} + \ln x\right)$ (Ans.)

খ) $\tan^{-1}\frac{3x-x^3}{1-3x^2} = 3\tan^{-1}x \quad \therefore \frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}\frac{3x-x^3}{1-3x^2}\right) = 3\frac{d}{dx}\tan^{-1}x = \frac{3}{1+x^2}$ (Ans.)

76. যদি $y = e^{ax}\cos bx$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $y_2 - 2ay_1 + (a^2+b^2)y = 0$. **[KUET'03-04]**

সমাধান: $y = e^{ax}\cos bx$ .....(i) $\therefore y_1 = e^{ax}(a\cos bx - b\sin bx) = ay - be^{ax}\sin bx$

$\therefore y_2 = ay_1 - b(ae^{ax}\sin bx + e^{ax}b\cos bx) \Rightarrow y_2 = ay_1 - abe^{ax}\sin bx - b^2e^{ax}\cos bx$

$\Rightarrow y_2 = ay_1 - a(ay - y_1) - b^2y \Rightarrow y_2 = ay_1 - a^2y + ay_1 - b^2y \Rightarrow y_2 - 2ay_1 + (a^2+b^2)y = 0$

77. (a) অন্তরক নির্ণয় কর ঃ $a^{\sin^{-1}x}$ **[RUET'03-04]**

(b) দেখাও যে একটি গোলাকার সাবানের বুদবুদের আয়তনের বৃদ্ধি হার তার ব্যাসার্ধের বৃদ্ধি হারের $4\pi x^2$ গুণ।

সমাধান: (a) $\frac{d}{dx}\left(a^{\sin^{-1}x}\right) = a^{\sin^{-1}x}.\ln a\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (Ans.)

(b) Let, ব্যাসার্ধ = x, ব্যাসার্ধ বৃদ্ধির হার = $\frac{dx}{dt}$ আয়তন, $v = \frac{4}{3}\pi x^3$ আয়তন বৃদ্ধির হার, $\frac{dv}{dt} = 4\pi x^2\frac{dx}{dt}$

$\therefore \frac{dv}{dt} = 4\pi x^2 \times \frac{dx}{dt}$ $\therefore$ আয়তন বৃদ্ধির হার = ব্যাসার্ধ বৃদ্ধির হার $\times 4\pi r^2$ (Proved)

78. মান নির্ণয় কর ঃ $\frac{dy}{dx}$, যখন $y = \frac{(x-1)^2}{\sqrt[3]{x}}$ **[RUET'03-04]**

সমাধান: $y = \frac{(x-1)^2}{\sqrt[3]{x}} = \frac{x^2-2x+1}{x^{1/3}} = x^{5/3} - 2x^{2/3} + x^{-1/3} \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{5}{3}x^{2/3} - \frac{4}{3}x^{-1/3} - \frac{1}{3}x^{-4/3}$ (Ans.)

79. $y = (\tan x)^x + x^{\tan x}$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর। **[BUTex'03-04]**

সমাধান: $y = (\tan x)^x + x^{\tan x}, \quad y = (\tan x)^x + x^{\tan x} \Rightarrow y = e^{x\ln(\tan x)} + e^{\tan x \ln x}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (\tan x)^x\left\{\ln(\tan x) + x.\frac{1}{\tan x}.\sec^2 x\right\} + x^{\tan x}\left\{\frac{\tan x}{x} + \ln x.\sec^2 x\right\}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (\tan x)^x\left\{\ln(\tan x) + \frac{x}{\sin x.\cos x}\right\} + x^{\tan x}\left\{\frac{\tan x}{x} + \ln x.\sec^2 x\right\} \quad \text{Ans.}$$

80. মান নির্ণয় কর ঃ $\underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\text{Lt}}\ \{\sec x(\sec x-\tan x)\}$ **[RUET'03-04]**

সমাধান: $\underset{x\to\pi/2}{\text{Lt}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)=\underset{x\to\pi/2}{\text{Lt}}\left(\frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}\right)=\underset{x\to\pi/2}{\text{Lt}}\frac{1}{1+\sin x}=\frac{1}{2}$ (Ans.)

81. মান নির্ণয় কর ঃ $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\tan x}\right) \Rightarrow \underset{x\to 0}{\text{Lt}}\left(\frac{1-\cos x}{\sin x}\right)$ **[RUET'03-04]**

$$=\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}}=\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}.\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\frac{\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=0 \quad \text{(Ans.)}$$

82. যদি $x^y.y^x=a^2$ তবে $\frac{dy}{dx}$ এর মান বাহির কর। **[BUET'02-03]**

সমাধান: $x^y.y^x=a^2 \Rightarrow y\ln x+x\ln y=\ln a^2 \Rightarrow y.\frac{1}{x}+\ln x.\frac{dy}{dx}+\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}+\ln y=0$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\left(\ln x+\frac{x}{y}\right)=-\left(\ln y+\frac{y}{x}\right) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}.\frac{y+x\ln y}{x+y\ln x} \text{ (Ans.)}$$

83. যদি $x\sqrt{1+y}+y\sqrt{1+x}=0$ এবং $y\neq x$ হয় তবে প্রমাণ কর যে, $\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{(1+x)^2}$ **[BUET'02-03]**

সমাধান: $x\sqrt{1+y}+y\sqrt{1+x}=0 \Rightarrow x\sqrt{1+y}=-y\sqrt{1+x} \Rightarrow x^2(1+y)=y^2(1+x)$

$\Rightarrow x^2+x^2y=y^2+xy^2 \Rightarrow x^2-y^2=xy^2-x^2y \Rightarrow (x+y)(x-y)=xy(y-x)$

$\Rightarrow (x+y)=-xy \Rightarrow xy+y=-x \Rightarrow y=\frac{-x}{1+x}=-1+\frac{1}{1+x} \Rightarrow y=\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{(1+x)^2}$

84. $y=\tan^{-1}\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$. **[BUTex'02-03]**

সমাধান: $y=\tan^{-1}\frac{3x-x^3}{1-3x^2}=\tan^{-1}\frac{3\tan\theta-\tan^3\theta}{1-3\tan^2\theta}$ [Let $x=\tan\theta$, $\theta=\tan^{-1}x$]

$=\tan^{-1}\tan 3\theta=3\theta=3\tan^{-1}x \quad \therefore \frac{dy}{dx}=\frac{3}{1+x^2}$ (Ans.)

85. $e^{3x}\sin^2 x$ এর nth derivative নির্ণয় কর। **[BUET'01-02]**

সমাধান: $y=e^{3x}\sin^2 x=\frac{1}{2}e^{3x}2\sin^2 x=\frac{1}{2}e^{3x}(1-\cos 2x)=\frac{1}{2}e^{3x}-\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x$

$p=e^{3x}\cos 2x.$; $p_1=3e^{3x}\cos 2x-2e^{3x}\sin 2x.=e^{3x}[3\cos 2x-2\sin 2x]$

ধরি, $r\cos\theta=3$; $r\sin\theta=2$

$\therefore r=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$

$p_1=e^{3x}[r\cos\theta\cos 2x-r\sin\theta\sin 2x]=re^{3x}\cos(2x+\theta)$

$p_2=r[3e^{3x}\cos(2x+\theta)-2e^{3x}\sin(2x+\theta)]=re^{3x}[r\cos\theta\cos(2x+\theta)-r\sin\theta\sin(2x+\theta)]$

$=r^2e^{3x}\cos(2x+2\theta) \therefore p_n=r^ne^{3x}\cos(2x+n\theta)$

$\therefore y=\frac{1}{2}[3^ne^{3x}-r^ne^{3x}\cos(2x+n\theta)]$ এখানে, $r=\sqrt{13}$ $\theta=\tan^{-1}\frac{2}{3}$

86. ফাংশটির গুরু বা লঘু মানের পরীক্ষা কর এবং সে মান নির্ণয় কর ঃ $f(x)=\frac{x}{\ln x}$ **[BUTex'01-02]**

সমাধান: ধরি, $x=e^z \Rightarrow z=\ln x \ \therefore f(x)=\frac{x}{\ln x}, f(z)=\frac{e^z}{z}$

$$f'(z)=\frac{e^z}{z}-\frac{e^z}{z^2}$$

লঘুমান ও গুরু মানের জন্য, $f'(z)=\frac{e^z}{z}-\frac{e^z}{z^2}=0$

$$\Rightarrow \frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}=0 \ [e^z\neq 0] \Rightarrow \frac{1}{z}=\frac{1}{z^2} \Rightarrow z=1 \ [\because z\neq 0] \Rightarrow \ln x=1 \ \therefore x=e$$

$f''(z)=\frac{e^z}{z}-\frac{e^z}{z^2}-\frac{e^z}{z^2}+2\frac{e^z}{z^3}$ এখন, $z=1$ হলে, $f''(z)=e-e-e+2e=e>0$

∴ ফাংশনটির লঘুমান থাকবে যখন, $z=1$ অর্থাৎ $x=e$ এবং লঘুমান $=\frac{e}{\ln e}=e$

87. যদি $f(x)=\sin x$ হয় তবে $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+nh)-f(x)}{h}$ এর মান নির্ণয় কর। **[BUET'00-01]**

সমাধান: $f(x)=\sin x \Rightarrow f(x+nh)=\sin(x+nh)$

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(x+nh)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+nh)-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2\sin\frac{nh}{2}\cos\left(x+\frac{nh}{2}\right)}{h}$$

$$=2\times\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{nh}{2}}{h}\times\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{nh}{2}\right)=2\times\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{nh}{2}}{\frac{nh}{2}}\times\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{nh}{2}\right)\times\frac{n}{2}$$

$$=2\times 1\times\cos x\times\frac{n}{2}=n\cos x \ \text{(Ans.)}$$

88. ক) $\log_e(xy)=x^2+y^2$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ এর মান নির্ণয় কর। **[BUTex'00-01]**

খ) $y=(\cos^{-1}x)^2$ হলে দেখাও যে, $(1-x^2)y_2-xy_1=2$

সমাধান: ক) $\log_e(xy)=x^2+y^2 \Rightarrow \log_e x+\log_e y=x^2+y^2 \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=2x+2y\frac{dy}{dx}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\left(\frac{1-2y^2}{y}\right)=\left(\frac{2x^2-1}{x}\right) \ \therefore \ \frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\left(\frac{2x^2-1}{1-2y^2}\right) \ \text{(Ans.)}$$

সমাধান: খ) $y=(\cos^{-1}x)^2 \Rightarrow y_1=-2\cos^{-1}x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow (1-x^2)\ y_1^2=4\ (\cos^{-1}x)^2=4y$

$$\Rightarrow 2y_1y_2(1-x^2)-2x\,y_1^2=4y_1 \ \therefore \ (1-x^2)\,y_2-xy_1=2 \ \text{(Showed)}$$

MCQ

01. $\lim_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{(3x+2)}{x}}$ এর মান কোনটি? **[KUET'18-19]**

(a) e (b) e^5 (c) e^7 (d) e^{10} (e) e^3

সমাধানঃ (d); $\lim_{x\to 0}(1+5x)^{3+\frac{2}{x}}=1-\lim_{5x\to 0}\left[(1+5x)^{\frac{1}{5x}}\right]^{10}=e^{10}$

02. যদি $y = \frac{\ln x}{x}$ হয়, তবে $\frac{d^2y}{dx^2}$ এর মান কোনটি? **[KUET'18-19]**

(a) $\frac{2\ln x+3}{x^3}$ (b) $\frac{2\ln x-3}{x^3}$ (c) $\frac{2\ln x+5}{x^3}$ (d) $\frac{2\ln x-3}{x^2}$ (e) $\frac{2\ln x+3}{x^2}$

সমাধান: (b); $\frac{dy}{dx} = \frac{x.\frac{1}{x}-\ln x}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$; $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x^2\left(-\frac{1}{x}\right)-(1-\ln x)\times 2x}{x^4} = \frac{-x-2x+2x\ln x}{x^4} = \frac{-3x+2x\ln x}{x^4} = \frac{2\ln x-3}{x^3}$

03. $\tan^{-1}\frac{4\sqrt{x}}{1-4x}$ এর অন্তরক সহগ কোনটি? **[KUET'18-19]**

(a) $\frac{2}{x(1+4x)}$ (b) $\frac{2}{x(1+4\sqrt{x})}$ (c) $\frac{2}{\sqrt{x}(1+4x)}$ (d) $\frac{4}{\sqrt{x}(1+4x)}$ (e) $\frac{3}{\sqrt{x}(1+4x)}$

সমাধান: (c); Let, $2\sqrt{x} = \tan\alpha \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}2\sqrt{x}$

$y = \tan^{-1}\frac{4\sqrt{x}}{1-4x} = \tan^{-1}\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \tan^{-1}\tan 2\alpha = 2\alpha = 2\tan^{-1}2\sqrt{x}$ $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{x}(1+4x)}$

04. $u = \frac{4}{x} + \frac{36}{2-x}$ এর সর্বোচ্চ মান কোনটি? **[KUET'18-19]**

(a) 10 (b) 15 (c) 8 (d) 12 (e) 20

সমাধান: (c); $\frac{du}{dx} = \frac{-4}{x^2} + \frac{36}{(2-x)^2} = 0 \Rightarrow x = -1, \frac{1}{2} \therefore u = 8$

05. কোন বক্ররেখাটি (1, 2) বিন্দু দিয়ে যায় এবং উক্ত বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল 5? **[SUST'18-19]**

(a) $y = 2x^2 - 3x + 2$ (b) $y = 2x^2 + x - 1$ (c) $y = 2x^2 - 2x + 1$

(d) $y = 2x^2 - x + 1$ (e) $y = 3x^2 + x - 2$

সমাধান: (b); সবগুলো option এর বক্ররেখার সমীকরণই $y = ax^2 + bx + c$

$\therefore y_1 = 2ax + b \therefore (y_1)_{(1,2)} = 2a + b$

$\therefore 2a + b = 5$ ... (i) এবং বক্ররেখাটি (1, 2) বিন্দু দিয়ে যায় বলে, $a + b + c = 2$ .... (ii)

(i) ও (ii) সিদ্ধ হয় শুধু option (b) এর জন্য।

06. একটি ধাতব গোলককে গলায়ে সমব্যাসার্ধের সিলিন্ডারে রূপ দিলে তার দৈর্ঘ্য ও ব্যাসার্ধের অনুপাত কত হবে? **[SUST'18-19]**

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{4}{3}$ (c) $\frac{4\pi}{3}$ (d) $\frac{\pi}{3}$ (e) π

সমাধান: (b); $\frac{4}{3}\pi r^3 = \pi r^2 h \Rightarrow \frac{h}{r} = \frac{4}{3}$

07. (1, 2) বিন্দুগামী y বক্ররেখার অন্তরক সহগ $e^{\ln(\ln x)}$ হলে বক্ররেখাটির সমীকরণ- **[SUST'18-19]**

(a) $y = \ln x(x-1) + 3$ (b) $y = x\ln x + 3$ (c) $y = x(\ln x - 1) - 3$

(d) $y = x\ln x - 3$ (e) $y = x(\ln x - 1) + 3$

সমাধান: (e); $y_1 = e^{\ln(\ln x)} = \ln x$ [$\because {}_a\log_a b = b$]

$\therefore y = \int \ln x\, dx = x\ln x - x + c$

(1, 2) বিন্দুতে, $2 = -1 + c \therefore c = 3 \therefore y = x(\ln x - 1) + 3$

08. $x = \tan\sqrt{y}$ হলে, $x = 1$ এর জন্য $\frac{dy}{dx}$ এর মান কত? **[SUST'18-19]**

(a) $\frac{4}{\pi}$ (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $\frac{2}{\pi}$ (d) $\frac{\pi}{2}$ (e) π

সমাধান: (b); $x = \tan\sqrt{y} \Rightarrow \sqrt{y} = \tan^{-1}x \Rightarrow y = (\tan^{-1}x)^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2\tan^{-1}x \cdot \frac{1}{1+x^2}$

$x = 1$ হলে, $\frac{dy}{dx} = 2.\frac{\pi}{4}.\frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$

09. $\log_{\sin x}\sin^2 x$ এর অন্তরক সহগ কোনটি? **[KUET'17-18]**

(a) 2 (b) $(\sin x)^{\sin^2 x-1}$ (c) $2(\sin x)^{\cos^2 x-1}$ (d) 0 (e) $\cot x$

সমাধান: (d); $\frac{d}{dx}(\log_{\sin x}\sin^2 x) = \frac{d}{dx}(2) = 0$

10. $y = 2\left(x + \frac{1}{x}\right)$ এর সর্বোচ্চ মান হলো- **[KUET'17-18]**

(a) ∞ (b) 0 (c) 2 (d) -2 (e) -4

সমাধান: (a); $x \to \infty$ হলে, $y = 2\left(x + \frac{1}{x}\right) \Rightarrow 2\left(\infty + \frac{1}{\infty}\right) = \infty$

11. $y = \sin^3 x$ হলে, y_n এর মান কোনটি? **[KUET'17-18]**

(a) $\frac{1}{4}[3\sin(n\pi/2 + x) - 3^n \sin(n\pi/2 + 3x)]$ (b) $\sin(n\pi/2 + x)$

(c) $\cos(\pi/2 + x)$ (d) $3^n \sin(n\pi/2 + 3x)$ (e) $3^n \sin(n\pi/2 + 3x) + \cos nx$

সমাধান: (a); $y = \sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$

$\Rightarrow y_1 = \frac{1}{4}(3\cos x - 3\cos 3x) = \frac{1}{4}\left\{3\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 3^1 \sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)\right\}$

$\therefore y_n = \frac{1}{4}\left\{3\sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right) - 3^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} + 3x\right)\right.$

12. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \ln(e^x \cos x)}{x\sin x}$ এর মান কোনটি? **[KUET'17-18]**

(a) $\frac{1}{3}$ (b) 3 (c) $\frac{1}{5}$ (d) 2 (e) $\frac{1}{2}$

সমাধান: (e); $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \ln(e^x \cos x)}{x\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \ln e^x - \ln\cos x}{x\sin x}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x - \ln(\cos x)}{x\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{\sin x}{\cos x}}{x\cos x + \sin x}$ [L. Hospital]

$= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x - 0 + \sec^2 x}{-x\sin x + \cos x + \cos x} = \frac{-0+1}{-0+1+1} = \frac{1}{2}$ [L. Hospital]

13. যদি $0 < x < \frac{1}{a}$ হয় তাহলে $\lim_{x\to 0}(1 + ax)^{\frac{(bx+c)}{x}}$ এর মান কত? **[SUST'17-18]**

(a) e^b (b) e^c (c) e^a (d) e^{ac} (e) e^{ab}

সমাধান: (d); $\lim_{x\to 0}(1 + ax)^{\frac{bx+c}{x}} = \lim_{ax\to 0}(1 + ax)^{\left(b + \frac{c}{x}\right)} = \lim_{ax\to 0}(1 + ax)^b \cdot \lim_{ax\to 0}(1 + ax)^{\frac{ca}{ax}}$

$= (1 + 0)^b \cdot \left\{\lim_{ax\to 0}(1 + ax)^{\frac{1}{ax}}\right\}^{ca} = 1 \cdot e^{ca} = e^{ac}$

14. $y = x\ln x$ বক্ররেখার যে বিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষের সমান্তরাল সে বিন্দুর স্থানাঙ্ক- **[SUST'17-18]**

(a) $(e, -e)$ (b) $\left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right)$ (c) $\left(e, -\frac{1}{e}\right)$ (d) $\left(e, \frac{1}{e}\right)$ (e) $\left(\frac{1}{e}, e\right)$

সমাধান: (b); $\frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{1}{x} + \ln(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{e}$ $\therefore y = \frac{1}{e} \cdot \ln\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$ $\therefore$ বিন্দুটি $\left(\frac{1}{e}, \frac{-1}{e}\right)$

15. $\frac{d}{dx}(\log_{10} x)$ এর মান কত? **[Ans: d] [SUST'17-18]**

(a) $\frac{1}{x}$ (b) $\frac{1}{|x|}$ (c) $\frac{\ln 10}{x}$ (d) $\frac{1}{|x|\ln 10}$ (e) $\frac{\ln 10}{|x|}$

16. যদি $y = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}}\right)$ হয় তাহলে $\frac{dy}{dx} = ?$ **[KUET'16-17]**

(a) 1 (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{4}$ (d) 2 (e) 4

সমাধান: (b); $y = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x} + \sqrt{1-\sin x}}$

$\left[\because \sqrt{1 \pm \sin x} = \sqrt{\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} \pm 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \sqrt{\left(\cos\frac{x}{2} \pm \sin\frac{x}{2}\right)^2} = \cos\frac{x}{2} \pm \sin\frac{x}{2}\right]$

$\therefore y = \tan^{-1}\frac{2\sin\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}} = \tan^{-1}\tan\frac{x}{2} = \frac{x}{2}$ $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$

17. a এবং b এর মান যথাক্রমে কত হলে $\lim_{x\to 0} \frac{ae^x - b\cos x + e^{-x}}{\sin x} = 2$ হয়? **[KUET'16-17]**

(a) 3,3 (b) 3,4 (c) 4,3 (d) $-3,4$ (e) $-3,-4$

সমাধান: (b); $\lim_{x\to 0}\frac{ae^x-b\cos x+e^{-x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{a\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)-b\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\right)+\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\cdots\right)}{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{(a-b+1)+(a-1)x+x\text{ এর উচ্চতর ঘাত যুক্ত পদ}}{x\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{5!}-\cdots\right)}$

তাহলে, $a-b+1=0\Rightarrow b=a+1$; option গুলোতে এরূপ অপশন $(a,b)=(3,4)$

18. কোন বিন্দুতে $y=2x^2+x+1$ বক্ররেখার স্পর্শক $5x-y+5=0$ রেখার সমান্তরাল হবে? **[KUET'16-17]**

(a) (0,1) (b) (1,4) (c) (2,11) (d) (−1,2) (e) (−2,7)

সমাধান: (b); $5x-y+5=0$; $m=5$

$\frac{dy}{dx}=4x+1=5\,;x=1$

$y=2x^2+x+1=2.1+1+1=4\ \therefore (x,y)=(1,4)$

19. $\lim_{x\to\infty}2^x\sin\frac{a}{2^x}$ এর মান কোনটি? **[KUET'16-17]**

(a) ∞ (b) 0 (c) 1 (d) a (e) −a

সমাধান: (d); $\lim_{x\to\infty}2^x\sin\frac{a}{2^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{a}{2^x}\right)}{\frac{a}{2^x}}\cdot a=a$

20. $\frac{x}{\log x}$ এর লঘুমান কত? **[KUET'16-17]**

(a) $-e$ (b) $\frac{1}{e}$ (c) e (d) $e^{\frac{1}{e}}$ (e) $-e^{\frac{1}{e}}$

সমাধান: (c); $\frac{x}{\log x}=\frac{x}{\ln x}$; $\frac{dy}{dx}=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}=0\ \therefore \ln x=1\ \therefore x=e$

$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{(\ln x)^2}\cdot\frac{1}{x}+\frac{2}{(\ln x)^3}\cdot\frac{1}{x}\ \therefore x=e$ হলে $\frac{d^2y}{dx^2}>0\ \therefore x=e$ এর জন্য লঘুমান পাওয়া যায়। $\therefore y=\frac{e}{\ln e}=e$

21. $4(x-2)^2+5(y+3)^2=20$ বক্ররেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত একক? **[KUET'16-17]**

(a) $2\sqrt{5}\pi$ (b) $5\sqrt{2}\pi$ (c) 20π (d) 10π (e) 9π

সমাধান: (a); $\frac{(x-2)^2}{5}+\frac{(y+3)^2}{4}=1$ উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল $=\pi ab=\pi.\sqrt{5}.2$

22. $y^x=e^{x+y}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ এর মান কোনটি? **[KUET'16-17]**

(a) $\frac{y}{x+y}(1+\ln y)$ (b) $\frac{y}{x+y}(1-\ln y)$ (c) $\frac{y}{x-y}(1+\ln y)$ (d) $\frac{y}{x-y}(1-\ln y)$ (e) $\frac{y}{x-y}(\ln y-1)$

সমাধান: (d); $y^x=e^{x+y}\Rightarrow x\ln y=x+y\ \therefore \frac{x}{y}\frac{dy}{dx}+\ln y=1+\frac{dy}{dx}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{1-\ln y}{\frac{x}{y}-1}=\frac{y}{x-y}(1-\ln y)$

23. $\sin x=\frac{1}{4}$ এর জন্য $y=\sin x+\cos 2x$ ফাংশনটির গুরুমান কোনটি? **[KUET'16-17]**

(a) −2 (b) 0 (c) 1 (d) $\frac{9}{8}$ (e) $\frac{11}{8}$

সমাধান: (d); $y=\sin x+\cos 2x=\frac{1}{4}+1-2\sin^2 x=\frac{1}{4}+1-2\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{9}{8}$

24. যদি $y=\frac{\ln x}{x}$ হয়, তবে x^3y_2-2xy এর মান কোনটি? **[KUET'16-17]**

(a) −3 (b) −2 (c) −1 (d) 0 (e) 3

সমাধান: (a); $xy=\ln x\ \therefore xy_1+y=\frac{1}{x}\ldots\ldots\ldots$ (i)

$\Rightarrow x^2y_1+xy=1\ \therefore x^2y_2+2xy_1+xy_1+y=0\Rightarrow x^2y_2+3xy_1+y=0$

$\Rightarrow x^2y_2+3\left(\frac{1}{x}-y\right)+y=0$ [from (i)] $\Rightarrow x^3y_2-2xy=-3$

25. মান নির্ণয় কর- $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$ **[KUET'16-17]**

(a) −3 (b) 3 (c) −2 (d) 2 (e) 1

সমাধান: (e); ধরি, $y=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}\Rightarrow\ln y=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\tan x)\ln(\sin x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{\tan x}}$

$\Rightarrow\ln y=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)}{\cot x}\left[\frac{0}{0}\text{ আকারে}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\sin x}.\cos x}{-\text{cosec}^2x}=0\ \therefore y=1$

26. যদি $y = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots \infty$ এবং $z = -y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \ldots \infty$ হয়। তাহলে x এর মান কত? **[KUET'16-17]**

(a) $(1 + e^z)$ (b) $(1 + e^{-z})$ (c) $\ln(1 + 3z)$ (d) $\ln\left(\frac{1}{1+5z}\right)$ (e) $\ln\left(\frac{1}{1-e^z}\right)$

সমাধান:(e);$y = e^{-x} \Rightarrow 1 - e^z = e^{-x} \Rightarrow e^x = \frac{1}{1-e^z}$

$\therefore x = \ln\left(\frac{1}{1-e^z}\right)$ $[z = \ln(1-y) \Rightarrow e^z = 1 - y \Rightarrow y = 1 - e^z]$

27. $x + \frac{1}{x}$ এর গুরু মান কোনটি? **[BUTex'16-17]**

(a) 2 (b) 1 (c) -2 (d) -1

সমাধান: (c); $f(x) = x + \frac{1}{x}$; $\frac{df(x)}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow x = \pm 1$

$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{2}{x^3}$ $\therefore x = -1$ হলে $\frac{d^2f(x)}{dx^2} < 0$ $\therefore f(x)$ এর গুরুমান$= -2$

28. $y = x^2 \ln x$ হলে $xy_3 = ?$ **[BUTex'16-17]**

(a) -2 (b) 3 (c) 2 (d) -3

সমাধান: (c); $y = x^2 \ln x \Rightarrow y_1 = 2x \ln x + x \Rightarrow y_2 = 2 \ln x + 2 + 1 \Rightarrow y_3 = \frac{2}{x} \Rightarrow xy_3 = 2$

29. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin 3x - \sin 2x}$ এর মান– **[BUTex'16-17]**

(a) 3 (b) 0 (c) 2 (d) 1

সমাধান: (c); $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin 3x - \sin 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{5\cos 5x - 3\cos 3x}{3\cos 3x - 2\cos 2x}$ [Using La Hospital] $= \frac{5-3}{3-2} = 2$

30. $y = \frac{2}{x}$ বক্ররেখার যে বিন্দুতে $x = \frac{1}{2}$ সেই বিন্দুতে উহার ঢাল কত? **[BUTex'15-16]**

(a) 4 (b) -8 (c) 8 (d) -2

সমাধান: (b); $= \frac{2}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x^2}$; $x = \frac{1}{2}$ বিন্দুতে ঢাল $= \frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -8$

31. $\left(x + \frac{1}{x}\right)$ এর গুরু মান কোনটি? **[BUTex'15-16]**

(a) 2 (b) 1 (c) -2 (d) -1

সমাধান: (c); $f(x) = x + \frac{1}{x}$; $f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 1$; $f''(x) = \frac{2}{x^3}$

$\therefore f''(1) = 2 > 0$; $f''(-1) = -2 < 0$ $\therefore$ গুরুমান $f(-1) = -1 - 1 = -2$

32. যদি $x^p y^q = (x + y)^{p+q}$ হয় তাহলে $\frac{dy}{dx} = ?$ **[RUET'10-11, BUTex'15-16]**

(a) $\frac{x}{y}$ (b) $\frac{y}{x}$ (c) $\frac{y^2}{x}$ (d) $\frac{y}{x^2}$

সমাধান: (b); $x^p y^q = (x + y)^{p+q} \Rightarrow px^{p-1}y^q + qy^{q-1}\frac{dy}{dx}.x^p = (x + y)^{p+q-1}.(p + q).\left(1 + \frac{dy}{dx}\right)$

$\Rightarrow p.\frac{x^p y^q}{x} + q.\frac{y^q x^p}{y}.\frac{dy}{dx} = (p + q)\frac{(x+y)^{p+q}}{x+y} + (p + q)\frac{(x+y)^{p+q}}{x+y}.\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{p}{x} + \frac{q}{y}.\frac{dy}{dx} = \frac{p+q}{x+y} + \frac{p+q}{x+y}.\frac{dy}{dx}$

$\Rightarrow \left(\frac{q}{y} - \frac{p+q}{x+y}\right)\frac{dy}{dx} = \frac{p+q}{x+y} - \frac{p}{x} \Rightarrow \frac{qx-py}{y(x+y)}.\frac{dy}{dx} = \frac{qx-py}{x(x+y)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$

33. দুটি সংখ্যার যোগফল 7 হলে সংখ্যা দুটির গুণফলের সর্বোচ্চ মান হলো- **[KUET'15-16]**

(a) 6 (b) 10 (c) 12 (d) ∞ (e) কোনটিই নয়

সমাধান: (e); সংখ্যাদ্বয় x ও $(7 - x)$ হলে,

গুণফল $P = x(7 - x) = 7x - x^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 2.x.\frac{7}{2} - (x)^2 = \frac{49}{4} - \left(x - \frac{7}{2}\right)^2$

$\therefore P \leq \frac{49}{4}$; যেহেতু $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2$ এর সর্বনিম্ন মান 0। $\therefore$ সর্বোচ্চ মান $\frac{49}{4}$ ।

34. যদি $y = \sin^3 x$ হয়, তবে y_n এর মান কত? **[KUET'15-16]**

(a) $\frac{1}{4}\sin\left(\frac{n\pi}{2} + 3\right)$ (b) $\frac{1}{4}\sin\left(\frac{n\pi}{2} + 4\right)$ (c) $\frac{1}{4}\sin\left(\frac{n\pi}{2} + 5\right)$ (d) $\frac{1}{4}\sin\left(\frac{n\pi}{2} + 6\right)$

(e) $\frac{1}{4}\left[3\sin\left(\frac{n\pi}{2} + x\right) - 3^n \sin\left(\frac{n\পি}{2} + 3x\right)\right]$

সমাধান: (e); $y = \sin^3 x = \frac{1}{4}(4\sin^3 x) = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$

$\therefore y_1 = \frac{1}{4}\left(3\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) - 3\sin\left(\frac{\pi}{2}+3x\right)\right)$; $y_2 = \frac{1}{4}\left(3\sin\left(2.\frac{\pi}{2}+x\right) - 3^2\sin\left(2.\frac{\pi}{2}+3x\right)\right)$

... ...

... ...

$\therefore y_n = \frac{1}{4}\left\{3\sin\left(\frac{n\pi}{2}+x\right) - 3^n\sin\left(\frac{n\pi}{2}+3x\right)\right\}$

35. যদি $y = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{x}}\right)^{\frac{1}{x}}$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx}$ এর মান কোনটি? **[KUET'15-16]**

(a) $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{nx}}\log_e x$ (b) $\frac{1}{nx}(\log_e x - 1)$ (c) $\frac{1}{nx}(\log_e x - 2)$

(d) $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{nx}}\left[\frac{1}{n}\left(\frac{\log_e x - 1}{x^2}\right)\right]$ (e) $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{nx}}\left[\frac{1}{n}\left(\frac{(\log_e x - 3)}{x^2}\right)\right]$

সমাধান: (d); $y = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{x}}\right)^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \ln y = -\frac{1}{nx}\ln x \Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}\right)$ $\therefore \frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{nx}}\left[\frac{1}{n}\left(\frac{\ln x - 1}{x^2}\right)\right]$

36. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \log_e(e^x\cos x)}{x\sin x}$ এর মান কোনটি? **[KUET'15-16]**

(a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{7}$ (e) $-\frac{1}{2}$

সমাধান: (c); $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \log_e(e^x\cos x)}{x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x - \log_e(\cos x)}{x\sin x}$

Using L'Hospital's law, $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1 + \tan x}{\sin x + x\cos x}$; $\left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x + \sec^2 x}{\cos x + \cos x - x\sin x} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

37. মান নির্ণয় করঃ $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 7x}{3x^2}$ **[CUET'15-16, BUTex'07-08,15-16]**

(a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{7}{3}$ (c) $\frac{49}{6}$ (d) $\frac{6}{49}$

সমাধান: (c); $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 7x}{3x^2}$ [$\frac{0}{0}$ আকৃতি] $= \lim_{x\to 0}\frac{7\sin 7x}{6x}$ [$\frac{0}{0}$ আকৃতি] $= \lim_{x\to 0}\frac{49\cos 7x}{6} = \frac{49}{6}$

38. $xy + x^2y^2 = C$ সমীকরণটির $\frac{dy}{dx}$ এর মান কত হবে? **[CUET'15-16]**

(a) None of them (b) $\frac{x}{y}$ (c) $\frac{y}{x}$ (d) $-\frac{y}{x}$

সমাধান: (d); $xy + x^2y^2 = C \Rightarrow x\frac{dy}{dx} + y + 2xy^2 + 2x^2y\frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow (x + 2x^2y)\frac{dy}{dx} + y + 2xy^2 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y(1+2xy)}{x(1+2xy)} = -\frac{y}{x}$

39. যদি $y = x^2\log x$ তবে y_3 এর মান হলো– **[KUET'05-06,06-07,12-13, BUTex'14-15,15-16]**

(a) $7x$ (b) $9x$ (c) $2x+3$ (d) $3x+5$ (e) $2/x$

সমাধান: (e) ; $y = x^2\log x$; $y_1 = 2x\log x + \frac{x^2}{x} = 2x\log x + x$

$y_2 = 2x.\frac{1}{x} + 2\log x + 1 \Rightarrow y_2 = 2 + 2\log x + 1 \Rightarrow y_3 = \frac{2}{x}$

40. $f(x) = -(x-5)^4$ ফাংশনের গুরুমান কত? **[SUST'15-16]**

(a) -5 (b) -1 (c) 0 (d) 5 (e) 625

সমাধান: (c); লক্ষ করি, $(x-5)^4 \geq 0$ $\therefore -(x-5)^4 \leq 0$ [সর্বদাই]

অর্থাৎ দেখা যাচ্ছে যে, $f(x) = -(x-5)^4$ ফাংশনের মান সর্বোচ্চ শূন্য হতে পারে।

সুতরাং ফাংশনটির গুরুমান = শূন্য (0)।

41. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{m\tan x}-1}{m(\tan x + \sin x)}$ এর মান কত? **[SUST'15-16]**

(a) 0 (b) m (c) 1 (d) $\frac{1}{2}$ (e) $\frac{1}{m}$

সমাধান: (d); $\lim_{x\to 0}\frac{e^{m\tan x}-1}{m(\tan x+\sin x)}$ এর লব ও হরে লিমিট প্রয়োগ করলে ∞ আকার আসে,

ফলে L' Hospital's rule প্রয়োগ করে পাই, $\lim_{x\to 0}\frac{me^{m\tan x}.\sec^2 x}{m(\sec^2 x+\cos x)}$

এবার, লব ও হরের লিমিট প্রয়োগ করে অর্থাৎ, $x = 0$ বসিয়ে পাই, , $\lim_{x\to 0}\frac{me^{m\tan x}.\sec^2 x}{m(\sec^2 x+\cos x)}=\frac{m}{2m}=\frac{1}{2}$

42. যদি $x=\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$ এবং $y=\tan^{-1}\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$ হয় তাহলে $\frac{dy}{dx}$ এর মান কত? **[CUET'14-15]**

(a) –1 (b) 1 (c) ± 1 (d) 0

সমাধান: (a); $x=\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}=\tan^{-1}\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}}=\tan^{-1}\left(\tan\frac{\theta}{2}\right)=\frac{\theta}{2}$

$y=\tan^{-1}\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}=\tan^{-1}\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}+2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}=\tan^{-1}\frac{\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}+\sin\frac{\theta}{2}}=\tan^{-1}\frac{1-\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan\frac{\theta}{2}}=\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{4}-x$

$\therefore \frac{dy}{dx}=-1$

43. যদি $y=\sin^{-1}x$ হয়, তবে $\frac{y_1}{y_2}$ এর মান কোনটি? **[RUET'14-15]**

(a) $\frac{1}{1-x^2}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (c) $\frac{x}{1-x^2}$ (d) $\frac{x}{2\sqrt{1-x^2}}$ (e) $\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$

সমাধান: (No answer); $y=\sin^{-1}x$; $y_1=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $y_2=\frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$; $\frac{y_1}{y_2}=\frac{1-x^2}{x}$

44. যদি $S=4t-t^2+10$ হয় তবে 4 সে. পরে ত্বরণ কত হবে? **[BUTex'14-15]**

(a) $-8m/sec^2$ (b) $8m/sec^2$ (c) $2m/sec^2$ (d) $-2m/sec^2$

সমাধান: (d); $s=4t-t^2+10\Rightarrow v=\frac{ds}{dt}=4-2t\Rightarrow a=\frac{dv}{dt}=-2ms^{-2}$

45. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\tan x$ এর সীমাস্থ মান কত? **[BUTex'14-15]**

(a) 1 (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) π

সমাধান: (a); $x=\frac{\pi}{2}+h\Rightarrow\lim_{x\to\pi/2}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\tan x=\lim_{h\to o}(-h)(-\coth)=\lim_{h\to o}\frac{h}{\tanh}=1$

46. $x^2-2x+5=0$ এর ন্যূনতম মান- **[BUTex'14-15]**

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

সমাধান: (d); $f(x)=x^2-2x+5\Rightarrow f'(x)=2x-2; f''(x)=2>0\Rightarrow$ ন্যূনতম মান বিদ্যমান।

$\therefore 2x-2=0\Rightarrow x=1\Rightarrow f(1)=4$

47. $\lim_{x\to\pi}\left(\frac{1+\cos x}{\sin x}\right)$ এর মান হল- **[CUET'14-15]**

(a) 0 (b) 1 (c) –1 (d) None of them

সমাধান: (a); $\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to\pi}\frac{2\cos^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\lim_{x\to\pi}\cot\frac{x}{2}=\cot\frac{\pi}{2}=0$

48. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)=?$ **[RUET'14-15]**

(a) ∞ (b) 0 (c) e (d) 0.5 (e) None

সমাধান: (d); $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x}=\sqrt{x\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}-\sqrt{x}=\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{x}$

$=\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}+\cdots\right)-\sqrt{x}=\frac{1}{2}$ [higher terms are zero, as $x\to\infty$]

49. $\frac{d}{dx}[\tan^{-1}(\cot x)+\cot^{-1}(\tan x)]=?$ **[RUET'14-15]**

(a) 0 (b) -1 (c) 1 (d) 2 (e) -2

সমাধান: (e); $\tan^{-1}(\cot x)+\cot^{-1}(\tan x)=\tan^{-1}\left\{\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right\}+\cot^{-1}\left\{\cot\left(\frac{x}{2}-x\right)\right\}$ $\therefore\frac{d}{dx}(\pi-2x)=-2$

50. $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$ এর মান কোনটি? **[RUET'14-15]**

(a) 1 (b) 0 (c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{1}{2}$ (e) $\frac{1}{6}$

সমাধান: (e); Performing La Hospital three times.

51. যদি $\sin y = x\sin(a+y)$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx}$ এর মান কোনটি? **[KUET'14-15]**

(a) $\frac{\sin^2(a+y)}{\tan a}$ (b) $\frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$ (c) $\frac{\sin^2(a+y)}{\cos a}$ (d) $\frac{\sin^2(a+y)}{\sec a}$ (e) $\frac{\sin^2(a+y)}{\cos y}$

সমাধান: (b); $\frac{dy}{dx}=\frac{-\sin(a+y)}{x\cos(a+y)-\cos y}=\frac{-\sin(a+y)}{\frac{\sin y}{\sin(a+y)}\cdot\cos(a+y)-\cos y}=\frac{\sin^2(a+y)}{\sin(a+y)\cos y-\sin y\cos(a+y)}=\frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$

52. "a" এর যে মানের জন্য $\lim_{x\to 0}\frac{a\sin x-3x}{5x}$ এর মান 0 হবে তা হলো- **[KUET'14-15]**

(a) $\frac{3}{5}$ (b) 5 (c) 3 (d) 2 (e) 8

সমাধান: (c); $\lim_{x\to 0}\frac{a\sin x-3x}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{a\cos x-3}{5}$; [L'A'haspital rule] $\frac{a\cos 0-3}{5}=0\Rightarrow a=3$

53. $y = \sin 2x$ এর 99 –তম অন্তরকসহগ কত? **[SUST'14-15]**

(a) $2^{99}\cos 2x$ (b) $2^{99}\sin 2x$ (c) $-2^{99}\cos 2x$ (d) $-2^{99}\sin 2x$ (e) $2^{99}\sin 2x\cos 2x$

সমাধান: (c); $y_{99}=2^{99}\sin\left(\frac{99\pi}{2}+2x\right)=-2^{99}\cos 2x$

54. k এর মান কত হলে $y=k(x-1)(x+2)$ বক্ররেখার $x=1$ বিন্দুতে স্পর্শক x -অক্ষের সাথে 60° কোণ উৎপন্ন করবে? **[CUET'13-14,11-12,BUET'13-14]**

(a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (b) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $\sqrt{3}$

সমাধান: (a) ; $k(x^2+x-2)=y$; $y_1=k(2x+1)$ $\tan 60^\circ=k\times 3$ $\therefore k=\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

55. $y=(\sin^{-1}x)^2$ হলে $(1-x^2)y_2-xy_1$ এর মান হবে- **[BUET'13-14]**

(a) 0 (b) 2 (c) 4 (d) 1

সমাধান: (b) ; $\sqrt{y}=\sin^{-1}x$; $\frac{1}{2\sqrt{y}}y_1=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(1-x^2)y_1^2=4y$; $2y_1y_2-2xy_1^2-x^2.2y_1y_2=4y_1$ $\therefore(1-x^2)y_2-xy_1=2$

56. $\sin\theta$ এর যে মানের জন্য $7\sec\theta-3\tan\theta$ এর মান ন্যূনতম হয় তা কত হবে? **[BUET'13-14]**

(a) $\frac{7}{3}$ (b) $\frac{7}{10}$ (c) $\frac{7}{10}$ (d) $\frac{3}{7}$

সমাধান: (d) ; $y=7\sec\theta-2\tan\theta$; $y_1=7\sec\theta\tan\theta-3\sec^2\theta=0$

$\therefore 7\tan\theta=3\sec\theta$ $\therefore\tan\theta\times\cos\theta=\frac{3}{7}$ $\therefore\sin\theta=\frac{3}{7}$

57. $f(x)=x+\frac{1}{x}$ ফাংশনটির জন্য যে সমস্ত বিন্দুতে স্পর্শক x - অক্ষের সমান্তরাল তা হল- **[BUET'13-14]**

(a) (1, 2), (–1, –2) (b) (–1, 2), (1, 0) (c) (2, –1), (0, 1) (d) (–1, 2), (1, –2)

সমাধান: (a) ; $y=x+\frac{1}{x}$; $y_1=0\Rightarrow 1-\frac{1}{x^2}=0$ $\therefore x=\pm 1$, $y=2,-2$; Points : (1, 2),(–1, –2).

58. একটি গোলকের ব্যাসার্ধের বৃদ্ধিহার এবং পৃষ্ঠদেশের ক্ষেত্রফলের বৃদ্ধিহার সংখ্যাসূচক ভাবে সমান হলে, গোলকটির ব্যাসার্ধের মান কত হবে? **[BUET'13-14]**

(a) $\frac{1}{4\pi}$ (b) 8π (c) 4π (d) $\frac{1}{8\pi}$

সমাধান: (d) ; $\frac{dA}{dt}=\frac{dr}{dt}\ \therefore \frac{d}{dt}\left(4\pi r^2\right)=\frac{dr}{dt} \Rightarrow 4\pi\times 2r\frac{dr}{dt}=\frac{dr}{dt}\ \therefore 8\pi r=1\ \therefore r=\frac{1}{8\pi}$

59. C -এর মান কত হলে $y=Cx(1+x)$ বক্ররেখার মূল বিন্দুতে তার স্পর্শক অক্ষের সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করবে?

(a) $\sqrt{3}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (c) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

সমাধান: $y=Cx(1+x)=Cx+Cx^2\ ;\ \frac{dy}{dx}=C+2Cx$ **[BUET'11-12,CUET'11-12,13-14]**

মূলবিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x=0)}=C\quad \therefore C=\tan 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$

60. $y=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ এর মান - **[BUTex'13-14]**

(a) $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ (b) $\frac{-1}{\sqrt{x^2+1}}$ (c) $\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}$ (d) $\frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$

সমাধান: (d) ; $y_1=\frac{\sqrt{x^2+1}-x\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$

61. $\tan^{-1}(\sec x+\tan x)$ ফাংশনটির অন্তরক কত? **[BUTex'13-14]**

(a) $\frac{1}{2}$ (b) -1 (c) $-2\sin x$ (d) $\frac{x^2}{x^2-1}$

সমাধান: (a) ; $y=\tan^{-1}\left(\frac{\sin x+1}{\cos x}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}\right)$

$=\tan^{-1}\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=\tan^{-1}\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\ ;\ y=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\ ;\ y_1=\frac{1}{2}$

62. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x}=?$ **[BUTex'13-14]**

(a) 1 (b) 0 (c) -1 (d) $\frac{1}{2}$

সমাধান: (b) ; use LH; $y=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x^2.2x}{1}=(\cos 0)^2\,2\times 0=0$

63. যদি $y=\tan^{-1}\frac{5+6x}{6-5x}$ হয়, $\frac{dy}{dx}$ এর মান কত ? **[CUET'13-14]**

(a) $\frac{1}{1+x^2}$ (b) $-\frac{1}{1+x^2}$ (c) $\frac{5}{6(1+x^2)}$ (d) None of these

সমাধান:(a); $y=\tan^{-1}\frac{5+6x}{6-5x}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+\left(\frac{5+6x}{6-5x}\right)^2}\cdot\frac{6(6-5x)+5(5+6x)}{(6-5x)^2}=\frac{61}{(6-5x)^2+(5+6x)^2}=\frac{1}{1+x^2}$

64. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$ এর মান কত ? **[CUET'13-14]**

(a) $\pi/2$ (b) $\pi/4$ (c) 1 (d) None of these

সমাধান:(d); $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{(\pi/2-x)^2} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-2(\pi/2-x)}$[la Hospitals rule] $= \lim_{x\to\pi/2} \frac{\sin x}{2} = \frac{1}{2}$

65. $\lim_{x\to 0} \frac{x(\cos 2x+\cos 3x)}{2\sin x}$ এর মান কোনটি- **[RUET'13-14]**

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3 (e) None

সমাধান: (b) ; $\lim_{x\to 0} \frac{x(\cos 2x+\cos 3x)}{2\sin x}$; $x=0$ এর জন্য $\frac{x(\cos 2x+\cos 3x)}{2\sin x}=\frac{0}{0}$.

$\therefore$ L.Hospital অনুযায়ী, $\lim_{x\to 0} \frac{-2x\sin 2x+\cos 2x+\cos 3x-3x\sin 3x}{2\cos x}=\frac{1+1}{2\times 1}=1.$

66. $f(x)=x(2a-x)$ এর সর্বোচ্চ মান- **[RUET'13-14]**

(a) a (b) 2a (c) $2a^2$ (d) a^2 (e) None

সমাধান: (d) ; $f(x)=x(2a-x)=2ax-x^2$ $\therefore f'(x)=2a-2x$ $f'(x)=0$ হলে, $x=a$.

$f''(x)=-2<0$ $\therefore x=a$ এর জন্য সর্বোচ্চ মান এবং সে ক্ষেত্রে, $f(a)=a(2a-a)=a^2$.

67. একটি ট্রেন t সেকেন্ডে $5t+\frac{1}{2}t^2$ ফুট দূরত্ব অতিক্রম করে। 2 সেকেন্ড পর ট্রেনটির বেগ কত হবে? **[RUET'13-14]**

(a) 12 ft/sec (b) 10 ft/sec (c) 8 ft/sec (d) 7 ft/sec (e) None

সমাধান: (d) ; $S=5t+\frac{1}{2}t^2$ $\therefore v=\frac{ds}{dt}=5+\frac{1}{2}\times 2\times t=5+t$ $\therefore (v)_2=5+2=7$ ft/sec.

68. $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর : $y=\sqrt{\sec x}$ **[RUET'13-14]**

(a) $\frac{y\tan x}{2}$ (b) $\frac{\tan x}{2}$ (c) $\cot x$ (d) $\frac{\cot x}{2}$ (e) None

সমাধান: (a) ; $y=\sqrt{\sec x}$. $y^2=\sec x$; $2y\frac{dy}{dx}=\sec x\tan x$; $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\sqrt{\sec x}\tan x=\frac{y\tan x}{2}$

69. একটি গোলাকার বুদবুদের ব্যাসার্ধ বৃদ্ধির হার 0.2mm/sec যখন ব্যাসার্ধ 7mm তখন ঐ গোলাকার আয়তন বৃদ্ধির হার হলো-

(a) 0.0123cc/sec (b) 12.23cc/sec (c) 1.232cc/sec
(d) 12.324cm/sec (e) 0.1232cm/sec

সমাধান:(e); $\frac{dr}{dt}=0.2, r=7$; $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ **[KUET'13-14]**

$\therefore \frac{dV}{dt}=\frac{4}{3}\pi\times 3r^2\frac{dr}{dt}=4\pi r^2\frac{dr}{dt}=4\pi\times 7^2\times 0.2=123.15\text{mm}^3/\text{sec}=0.123\text{cm}^3/\text{s}$

70. $x=\cos\sqrt{y}$ হলে $(1-x^2)y_2-xy_1$ এর মান কত? **[KUET'13-14]**

(a) 4 (b) 0 (c) -2 (d) 2 (e) -4

সমাধান: (d); $x=\cos\sqrt{y}\Rightarrow y=\left(\cos^{-1}x\right)^2$ $\therefore y_1=2\cos^{-1}x\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

$\Rightarrow\sqrt{1-x^2}\,y_2+y_1\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)+2\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)=0$ $\Rightarrow\left(1-x^2\right)y_2-xy_1-2=0$ $\therefore\left(1-x^2\right)y_2-xy_1=2$

71. $y=\sin^2 2x+e^{2\log\cos 2x}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ এর মান কোনটি? **[KUET'13-14]**

(a) 0 (b) -1 (c) 1 (d) -2 (e) 2

সমাধান: (a); $y=\sin^2 2x+e^{2\log\cos 2x}=\sin^2 2x+e^{\log\cos^2 2x}=\sin^2 2x+\cos^2 2x=1 \quad \therefore \frac{dy}{dx}=0$

72. 'k' এর কোন মানের জন্য $\lim_{x\to 0}\frac{2e^x-2e^{-4x}+kx}{x^2}$ এর মান -15 হবে? **[KUET'13-14]**

(a) 0 (b) -3 (c) -20 (d) 8 (e) -10

সমাধান:(e); $\lim_{x\to 0}\frac{2e^x-2e^{-4x}+kx}{x^2}$ $[\frac{0}{0}$ আকারের$]$ $=\lim_{x\to 0}\frac{2e^x+8e^{-4x}+k}{2x}$ [L.Hospitalপ্রয়োগ করে]

$k=-10$ হলেই কেবল এটি $\frac{0}{0}$ আকারের হবে এবং L.Hospital প্রয়োগ করা যাবে।

$\therefore$ সেক্ষেত্রে $\lim_{x\to 0}\frac{2e^x-32e^{-4x}}{2}=-15$ হয়। $\therefore K=-10$

73. যদি $y=px^2+qx^{-1/2}$ হয়, তাহলে $2x^2y''-xy'$ হবে- **[BUET'12-13]**

(a) $2y$ (b) 0 (c) y (d) $2y^2$

সমাধান: $y=px^2+qx^{-\frac{1}{2}}$; $y'=2px-\frac{1}{2}qx^{-\frac{3}{2}}$; $y''=2p+\frac{3}{4}qx^{-\frac{5}{2}}$

$$2x^2y''-xy'=2x^2\left(2p+\frac{3}{4}qx^{-\frac{5}{2}}\right)-x\left(2px-\frac{1}{2}qx^{-\frac{3}{2}}\right)$$

$$=4px^2+\frac{3}{2}qx^{-\frac{1}{2}}-2px^2+\frac{1}{2}qx^{-\frac{1}{2}}=2px^2+2qx^{-\frac{1}{2}}=2\left(px^2+qx^{-\frac{1}{2}}\right)=2y$$

74. x এর মান কত হলে ফাংশন $f(x)=\frac{x}{\ln x}$ এর মান ক্ষুদ্রতম হবে? **[BUET'12-13]**

(a) $-\frac{1}{e}$ (b) e (c) $\frac{1}{e}$ (d) $-e$

সমাধান: $f(x)=\frac{x}{\ln x}$; $f'(x)=\frac{\ln x.1-x.\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$; $f''(x)=\frac{(\ln x)^2\left(\frac{1}{x}-0\right)-(\ln x-1)\left(2\ln x.\frac{1}{x}\right)}{(\ln x)^4}$

For maximum or minimum $f'(x)=0$

$\therefore \frac{\ln x-1}{(\ln x)^2}=0 \Rightarrow \ln x-1=0 \Rightarrow \ln x=1=\ln e \Rightarrow x=e$

$f''(x)$এ $x=e$ হলে $f''(e)=\frac{1^2\left(\frac{1}{e}-0\right)-(1-1)\left(2.\frac{1}{e}\right)}{1}=\frac{1}{e}>0 \therefore x=e$ হলে ক্ষুদ্রতম হবে

75. যদি $y=x^{\ln x}$ হয় তবে $\frac{x}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)$হবে **[BUET'12-13]**

(a) $\frac{2\ln x}{x}$ (b) $\frac{y}{x}(2\ln x)$ (c) $2\ln x$ (d) $2y\ln x$

সমাধান: $y = x^{\ln x}$; $\frac{dy}{dx} = x^{\ln x}\left[\frac{\ln x}{x}.1 + \ln x.\frac{1}{x}\right]$; $\left[\because \frac{d}{dx}(u^v) = u^v\left(\frac{v}{u}\frac{du}{dx} + \ln x.\frac{dv}{dx}\right)\right]$

$\therefore \frac{x}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{x}{x^{\ln x}}\left[x^{\ln x}\left(\frac{2\ln x}{x}\right)\right]$ [মান বসিয়ে] $= 2\ln x$

[ref. Lutfuzzaman Sir] [অথবা প্রচলিত পদ্ধতিতে ℓn নিয়ে করা যাবে।] $= x^{\ln x}\left[\frac{\ln x}{x} + \frac{\ln x}{x}\right] = x^{\ln x}\left[\frac{2\ln x}{x}\right]$

76. $\lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1} + 7^{n+1}}{5^n - 7^n}$ এর মান হল- **[BUET'12-13]**

(a) $\frac{1}{5}$ (b) -5 (c) $\frac{1}{7}$ (d) -7

সমাধান: $\lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1} + 7^{n+1}}{5^n - 7^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{7^{n+1}\left[\left(\frac{5}{7}\right)^{n+1} + \left(\frac{7}{7}\right)^{n+1}\right]}{7^{n+1}\left[\left(\frac{5}{7}\right)^n.\frac{1}{7} - \frac{7^n}{7^n}.\frac{1}{7}\right]} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left[\left(\frac{5}{7}\right)^{n+1} + 1\right]}{\left[\left(\frac{5}{7}\right)^n.\frac{1}{7} - \frac{1}{7}\right]}$

$= \frac{0+1}{0.\frac{1}{7} - \frac{1}{7}}[\because |r| < 1 \text{ হলে } \lim_{n\to\infty} r^n = 0] = -7$

77. যদি $y_1 = 3\sin 8x, y_1 = 4\cos 8x$ ও $y = y_1 + y_2$ হয়, তবে y এর বিস্তার হলো– **[Ans: c] [KUET'12-13]**

(a) 3 (b) 8 (c) 5 (d) 4 (e) 9

সমাধান: $y = y_1 + y_2 = 3\sin 8x + 4\cos 8x = \sqrt{3^2+4^2}\left[\frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}\sin 8x + \frac{4}{\sqrt{4^2+3^2}}\cos 8x\right]$

$= 5[\sin\theta\sin 8x + \cos\theta\cos 8x][\sin\theta = \frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}$ ধরলে $\cos\theta = \frac{4}{\sqrt{4^2+3^2}}] = 5\cos(8x-\theta)$

$\therefore$ বিস্তার $= 5$

78. যদি $x = a(\theta + \sin\theta), y = a(1-\cos\theta)$ হয়, তবে $\frac{d^2y}{dx^2}$ এর মান হলো– **[Ans: d] [KUET'12-13]**

(a) $\frac{a}{(1+\cos\theta)^2}$ (b) $\frac{a}{(1-\cos\theta)^2}$ (c) $\frac{1}{a(1-\cos\theta)^2}$ (d) $\frac{1}{a(1+\cos\theta)^2}$ (e) $\frac{1}{(1+\cos\theta)^2}$

সমাধান: $x = a(\theta+\sin\theta)$; $\frac{dx}{d\theta} = a(1+\cos\theta)$; $y = a(1-\cos\theta)$; $\frac{dy}{d\theta} = a\sin\theta$

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{a\sin\theta}{a(1+\cos\theta)} = \frac{\sin\theta}{(1+\cos\theta)}$; $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dy}{dx}\right)\times\frac{d\theta}{dx} = \frac{\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{d\theta}}$

$= \frac{\frac{(1+\cos\theta)\cos\theta - \sin\theta(-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)^2}}{a(1+\cos\theta)} = \frac{\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta}{a(1+\cos\theta)^3} = \frac{1+\cos\theta}{a(1+\cos\theta)^3} = \frac{1}{a(1+\cos\theta)^2}$

79. $y = x^2(1-x)$ এর সর্বোচ্চ মান- **[RUET'12-13]**

(a) $\frac{1}{27}$ (b) $\frac{2}{27}$ (c) $\frac{4}{27}$ (d) $\frac{1}{8}$ (e) None

সমাধান: (c) ; $y = x^2(1-x)$

Now, $2x - 3x^2 = 0$; $y_1 = 2x - 3x^2$ $\therefore x = 0, \frac{2}{3}$

$y_2 = 2 - 6x$ for, $\frac{2}{3} = x$; $y_2 < 0$ সর্বোচ্চ মান, $y = \left(\frac{2}{3}\right)^2\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{27}$

80. $y = \frac{2}{x}$ বক্ররেখার যে বিন্দুতে $x = \frac{1}{3}$ ঐ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের ঢাল কত? **[BUTex'12-13]**

(a) –16 (b) 16 (c) –18 (d) 18

সমাধান: (c) ; $y = \frac{2}{x}$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x^2}$ এখন , $x = \frac{1}{3}$ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের ঢাল $= \frac{-2}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = -18$

81. $y=3x^2$ যদি $2x^2y''+5xy'+ky=0$ সমীকরণের সমাধান হয়, তবে k এর মান কত? **[SUST'12-13]**

(a) –10 (b) 10 (c) 5/2 (d) – 14 (e) 14

সমাধান: $y = 3x^2$ $\therefore$ $y' = 6x$ $\therefore$ $y'' = 6$.

$\therefore 2x^2y'' + 5xy' + ky = 0$ $\therefore$ $2x^2 \times 6 + 5x \times (6x) + k \times 3x^2 = 0$

$\Rightarrow 12x^2 + 30x^2 + 3kx^2 = 0$ $\therefore k = \frac{-42}{3} = -14$.

82. x এর কোন মানের জন্য $y = (2x-3)e^x$ এর গুরু বা লঘু মান পাওয়া যাবে? **[SUST'12-13]**

(a) 3/2 (b) 1/5 (c) 1/2 (d) 1 (e) –1/2

সমাধান: $y = (2x - 3)e^x$ $\therefore$ $\frac{dy}{dx} = (2x-3)e^x + e^x \times 2$ গুরুমান বা লঘুমানের জন্য $\frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore (2x-3)e^x = -2e^x$ $\therefore$ $2x-3 = -2$ $\mid \because e^x \neq 0$ $\therefore$ $x = \frac{1}{2}$.

83. $f(x) = x + \sin x$ হলে x এর কোন মানের জন্য $f'(x) = 0$ হবে– **[BUTex'12-13]**

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) π (c) $\frac{\pi}{5}$ (d) $\frac{\pi}{2}$

সমাধান: (b) ; $f(x) = x + \sin x$ $\Rightarrow f'(x) = 1 + \cos x$

$f'(x) = 0$ হলে $1 + \cos x = 0$ $\Rightarrow \cos x = -1 = \cos \pi$ $\Rightarrow x = \pi$

84. $y = |2x|$ হলে (–2, 4) বিন্দুতে dy/dx এর মান কত? **[SUST'12-13]**

(a) –1 (b) 1 (c) –2 (d) 2 (e) 4

সমাধান: আমরা জানি, $|x| = \begin{cases} -x\ ;\ x < 0 \\ x\ ;\ x \geq 0 \end{cases}$

$y = |2x|$; এক্ষেত্রে, (–2,4) বিন্দুতে x ঋণাত্মক। $\therefore$ $y = |2x| = -2x$ $\therefore$ $\frac{dy}{dx} = -2$.

85. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3^x - 3^{-x} - 2x\log_e 3}{x - \sin x}$ এর মান হলো– **[KUET'12-13]**

(a) $2(\log_e 3)^3$ (b) $2(\log_e 3)^2$ (c) $2(\log_3 e)^3$ (d) $2(\log_3 e)^2$ (e) $6\log_e 3$

সমাধান: (a) ; $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\dfrac{3^x-3^{-x}-2x\log_e 3}{x-\sin x}$

$$=\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\dfrac{\left[1+\dfrac{x\ln 3}{1!}+\dfrac{(x\ln 3)^2}{2!}+\dfrac{(x\ln 3)^3}{3!}+....\infty\right]-\left[1-\dfrac{x\ln 3}{1!}+\dfrac{(x\ln 3)^2}{2!}-...\infty\right]-2x\ln 3}{x-\left[x-\dfrac{x^2}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-...\infty\right]}$$

$$=\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\dfrac{2\left[\dfrac{x\ln 3}{1!}+\dfrac{(x\ln 3)^3}{3!}+....\infty\right]-2(x\ln 3)}{\dfrac{x^3}{3!}-\dfrac{x^5}{5!}+\dfrac{x^7}{7!}-...\infty}=\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\dfrac{2\left[\dfrac{x^3(\ln 3)^3}{3!}+\dfrac{x^5(\ln 3)^5}{5!}+....\infty\right]}{\dfrac{x^3}{3!}-\dfrac{x^5}{5!}+\dfrac{x^7}{7!}-...\infty}$$

$$=\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\dfrac{2x^3\left[\dfrac{(\ln 3)^3}{3!}+\dfrac{x^2(\ln 3)^5}{5!}+....\infty\right]}{x^3\left[\dfrac{1}{3!}-\dfrac{x^2}{5!}+\dfrac{x^4}{7!}-...\infty\right]}=\dfrac{2.\left[\dfrac{(\ln 3)^3}{3!}+0\right]}{\left[\dfrac{1}{3!}+0\right]}=2(\ln 3)^3\approx 2(\log_e 3)^3$$

Shortcut: La Hospital; $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\dfrac{3^x-3^{-x}-2x\ln 3}{x-\sin x}=\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\dfrac{3^x\ln 3+3^{-x}\ln 3-2\ln 3}{1-\cos x}$

$$=\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\dfrac{3^x(\ln 3)^2-3^{-x}(\ln 3)^2}{\sin x}=\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\dfrac{3^x(\ln 3)^3+3^{-x}(\ln 3)^2}{\cos x}=\dfrac{(\ln 3)^3+(\ln 3)^3}{1}=2(\ln 3)^3$$

86. যদি $\varphi(z)=y\sin z+v$ এবং $\psi(w)=\sin^{-1}\left(yw^2+y^2\right)^{-1}$ হয়, তবে $\varphi\left(\psi\left(u^2\right)\right)$ এর মান হলো–

(a) $\left(u^4+y\right)^{-1}+v$ (b) $y\sin^{-1}\left(u^2+y\right)+v$ (c) $y\sin y\left(u^2+y\right)+v$

(d) $\left(u^4+y\right)^{-2}+v$ (e) $\left(u^2+y\right)^{-1}+v$ **[KUET'12-13]**

সমাধান: (a) ; $\phi\left(\psi(u^2)\right)=\phi\left(\sin^{-1}(yu^4+y^2)^{-1}\right)=y\sin\sin^{-1}\left(yu^4+y^2\right)^{-1}+v$

$$=y\times\dfrac{1}{yu^4+y^2}+v=\dfrac{1}{u^4+y}+v=\left(u^4+y\right)^{-1}+v$$

87. $f(x)=\ln(\sin x)$ হলে $e^{2f(x)}$ এর মান কোনটি? **[RUET'12-13]**

(a) $\frac{1}{2}(1-\sin 2x)$ (b) $(1-\sin 2x)$ (c) $\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ (d) $\frac{1}{2}(1-\tan 2x)$ (e) $(1-\cos 2x)$

সমাধান: (c) ; $f(x)=\text{In}(\sin x)$

$$\therefore e^{2f(x)}=e^{2\text{In}(\sin x)}=e^{\text{In}(\sin^2 x)}=\sin^2 x=\frac{1}{2}\left(2\sin^2 x\right)=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

88. $f(\theta)=\cos\theta-\sin\theta$ হলে, θ এর কোন মানের জন্য $f(\theta)=0$ হবে? **[RUET'12-13]**

(a) 1 (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) 0 (e) -1

সমাধান: (b) ; $f(\theta)=\cos\theta-\sin\theta$; $f(\theta)=0$ $\therefore\cos\theta-\sin\theta=0$ or, $\tan\theta=1$ or, $\theta=\dfrac{\pi}{4}$

89. $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}(1+kx)^{\frac{1}{x}}$ এর মান- **[RUET'12-13,BUTex'12-13]**

(a) $\log_k x$ (b) $\ln(kx)$ (c) $\ln(k+k)$ (d) a^k (e) e^k

সমাধান: (e) ; $\underset{x\to 0}{\text{Lt}}(1+kx)^{\frac{1}{x}}=\underset{x\to 0}{\text{Lt}}(1+kx)^{\frac{1}{kx}.k}=\underset{x\to 0}{\text{Lt}}\left\{(1+kx)^{\frac{1}{kx}}\right\}^k=e^k$

90. $\lim_{x\to\infty} a^x \sin(b/a^x),\ a>0$ এর মান কত? **[SUST'12-13]**

(a) b (b) 1/b (c) ab (d) 0 (e) 1

সমাধান: $\lim_{x\to\infty} a^x \sin\left(\frac{b}{a^x}\right);\ a>0. \ \therefore \lim_{\frac{b}{a^x}\to 0} \frac{\sin\left(\frac{b}{a^x}\right)}{\left(\frac{b}{a^x}\right)} \times b = 1 \times b = b.$

91. $y(x-2)(x-3)-x+7=0$ বক্ররেখাটি যে বিন্দুতে x -অক্ষকে ছেদ করে, ঐ বিন্দুতে বক্র রেখাটির অভিলম্বের সমীকরণ হল-

(a) $x+20y-7=0$ (b) $20x+y-140=0$

(c) $20x+y+140=0$ (d) $x-20y-7=0$

সমাধান: $y(x-2)(x-3)-(x-7)=0 \Rightarrow y=\frac{x-7}{(x-2)(x-3)}$ **[BUET'11-12]**

$\Rightarrow \ln y = \ln(x-7)-\ln(x-2)-\ln(x-3) \Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x-7}-\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{(x-2)(x-3)}-\frac{(x-7)}{(x-2)^2(x-3)}-\frac{x-7}{(x-2)(x-3)^2}$

x অক্ষকে ছেদ করলে $y=0 \quad \therefore x=7 \quad \therefore$ x অক্ষের ছেদ বিন্দুর স্থানাঙ্ক (7, 0)

ঐ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল $=\frac{1}{20} \quad \therefore$ অভিলম্বের ঢাল $=-20$

$\therefore$ অভিলম্বের সমীকরণ ঃ $y-0=-20(x-7)=0 \Rightarrow y=-20x+140 \Rightarrow 20x+y-140=0$

92. x এর কোন্ মানের জন্য $f(x)=x+\frac{1}{x}$ ফাংশনটি সর্বোচ্চ মান সম্পন্ন হবে- **[BUET'11-12]**

(a) 1 (b) −1 (c) 0 (d) 2

সমাধান: (b); $f(x)=x+\frac{1}{x};\ f'(x)=1-\frac{1}{x^2};\ f''(x)=\frac{2}{x^3}$

গুরুমান ও লঘুমান থাকার প্রয়োজনীয় শর্ত,

$f'(x)=0 \Rightarrow 1-\frac{1}{x^2}=0 \Rightarrow (x+1)(x-1)=0 \Rightarrow x=1 \text{ or, } -1$

এখন $x=1$ হলে, $f''(x)=2>0 \ \therefore x=1$ বিন্দুতে লঘুমান থাকবে।

$x=-1$ হলে, $f''(x)=-2<0 \ \therefore x=-1$ বিন্দুতে গুরুমান থাকবে।

$\therefore$ x এর মান -1 হলে ফাংশনটি সর্বোচ্চ মান সম্পন্ন হবে।

93. যদি $f(x)=2^{-4x}$ হয়, তবে $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ এর মান হবে- **[BUET'11-12]**

(a) $-4\times 2^{-4x}\log_e 2$ (b) $4\times 2^{-4x}\log_e 2$ (c) $2^{-4x}\log_e 2$ (d) $-4\times 2^{-4x-1}$

সমাধান: $f(x)=2^{-4x}$; $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{d}{dx}f(x)=2^{-4x}\log_e 2(-4)=-4\times 2^{-4x}\log_e 2$

94. যদি $f(x)=\begin{cases}3x-1, & x>3\\ x^2-2, & -2\le x\le 3,\\ 2x+3, & x<-2\end{cases}$ হয়, তবে $f(x)$ এর y -অক্ষের খন্ডিতাংশ হবে- **[BUET'11-12]**

(a) −2 (b) 3 (c) −1 (d) 0

সমাধান: y অক্ষের সমীকরণ $x=0$; $x=0$ হলে, $f(x)=x^2-2=-2$

95. $\lim_{x\to\pi/2}\frac{1-\sin x}{\cos x}$ এর মান হল- **[BUET'11-12]**

(a) $\frac{1}{2}$ (b) 0 (c) 2 (d) 1

সমাধান: ধরি, $x = h+\frac{\pi}{2}$; $x\to\frac{\pi}{2}$ হলে $h\to 0$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x} =\lim_{h\to 0}\frac{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}+h\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+h\right)} =\lim_{h\to 0}\frac{1-\cosh}{-\sinh} =\lim_{h\to 0}\frac{2\sin^2\frac{h}{2}}{-2\sin\frac{h}{2}\cos\frac{h}{2}} =\lim_{h\to 0}-\tan\frac{h}{2}=0$$

96. যদি $y=\log(ax+b)$ হয়, তবে y_n এর মান কত? **[CUET'11-12]**

(a) $\frac{(-1)n!a^{n-1}}{(ax+b)^n}$ (b) $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!a^n}{(ax+b)^n}$ (c) $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!a^{n-1}}{(ax+b)^n}$ (d) None of these

সমাধান: $y=\log(ax+b)$; $y_1=(ax+b)^{-1}.a$; $y_2=(ax+b)^{-2}.(-1).1.a^2$

$y_3=(ax+b)^{-3}.(-1)^2.1.2.a^3$ $\therefore y_n=(-1)^{n-1}(ax+b)^{-n}(n-1)!.a^n$; $\frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\cdot a^n}{(ax+b)^n}$

97. $f(x)=2x^3-9ax^2+12a^2x+1,\ (a>0)$ এর $x=p$ ও $x=q$ বিন্দুতে যথাক্রমে স্থানীয় গরিষ্ঠ ও লঘিষ্ঠ মান আছে। $p^2=q$ হলে a এর মান কত? **[SUST'08-09, KUET'11-12]**

(a) 2 (b) 3 (c) -2 (d) 4 (e) -3

সমাধান: $f(x)=2x^3-9ax^2+12a^2x+1$

$f'(x)=6x^2-18ax+12a^2$

গরিষ্ঠ ও লঘিষ্ঠ মানের জন্য $f'(x)=0$

$6x^2-18ax+12a^2=0$

$x^2-3ax+2a^2=0$

$$x=\frac{3a\pm\sqrt{9a^2-8a^2}}{2}=\frac{3a\pm a}{2}=2a,\ a$$

তাহলে, $q=2a$ এবং $p=a$ নিয়ে পাই, [কারণ তা না হলে a এর ভগ্নাংশিক মান আসবে]

$p^2=q$

$a^2=2a$

$a=2$

98. $x=a(t+\sin t),\ y=a(1-\cos t)$ হলে, $\frac{d^2y}{dx^2}$ এর মান কোনটি? **[KUET'11-12]**

(a) $\frac{a}{(2a-y)^2}$ (b) $-\frac{a}{(a+2y)^2}$ (c) $\frac{3a}{a+5y}$ (d) $\frac{2a}{7t}$ (e) $\frac{a}{5t}$

সমাধান: $x=a(t+\sin t)$; $\frac{dx}{dt}=a(1+\cos t)$.....(i)

$y=a(1-\cos t)$ $\Rightarrow\cos t=1-\frac{y}{a}$; $\frac{dy}{dt}=a\sin t$.....(ii)

$$(i)\div(ii)\ \Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{a\sin t}{a(1+\cos t)}=\frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\cos^2\frac{t}{2}}=\tan\frac{t}{2}\quad\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{2}\sec^2\frac{t}{2}.\frac{dt}{dx}$$

$$=\frac{1}{2\cos^2\frac{t}{2}}.\frac{1}{a(1+\cos t)}=\frac{1}{(1+\cos t)}.\frac{1}{a(1+\cos t)}=\frac{1}{a(1+\cos t)^2}=\frac{1}{a\left(1+1-\frac{y}{a}\right)^2}=\frac{a}{(2a-y)^2}$$

99. যদি $x\sin y + y\cos x = \pi$ হয়, তবে $y''(0)$ এর মান কত? **[RUET'11-12]**

(a) π (b) $-\pi$ (c) 1 (d) 0 (e) 2

সমাধান: (a); $y_2 = \dfrac{(\cos x + x\cos y)\,(y\cos x + \sin x.y_1 - \cos y.y_1) - (y\sin x - \sin y)(-\sin x + \cos y - x\sin y y_1)}{(\cos x + x\cos y)2}$

$= \dfrac{1[y + 0 + \cos y.\sin y] + \sin y\cos y}{1}[y = \pi]$; $= \dfrac{\pi + 2\cos\pi\sin\pi}{1} = \pi$

100. যদি $y = x^{30}$ হয়, $d^{40}y/dx^{40}$ এর মান কত? **[Ans: a] [SUST'11-12]**

(a) 0 (b) 1 (c) 30! (d) 30×10^{-10} (e) 30

101. যদি $y = 10^{\log(\sin x)}$ হয়, তবে $\dfrac{dy}{dx}$ এর মান কত? **[CUET'11-12]**

(a) $10^{\log(\sin x)}\log_e^{10(\cot x)}$ (b) $10^{\log(\sin x)}\log_e{}^{10/\sin x}$ (c) $10^{\log(\sin x)}\log_e^{10}$ (d) None of these

সমাধান: (d) ; $y = 10^{\log(\sin x)}$ $\therefore \dfrac{dy}{dx} = 10^{\log(\sin x)}\log_e{}^{10}\dfrac{d}{dx}(\log\sin x)\dfrac{d}{dx}(\sin x)$ [$\because a^x = a^x \ln a = a^x \log e^a$]

$= 10^{\log(\sin x)}\log_e{}^{10}\dfrac{1}{\sin x}\times\cos x = 10^{\log(\sin x)}\log_e{}^{10}\cot x$

102. $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$ হলে $\dfrac{dy}{dx}$ এর মান কোনটি? **[KUET'11-12]**

(a) $-\dfrac{1}{(1+x)^2}$ (b) $\dfrac{2}{(1+2x)^2}$ (c) $\dfrac{7}{1+5x}$ (d) $\dfrac{2}{1-9x}$ (e) $\dfrac{11}{1-5x}$

সমাধান: $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0 \Rightarrow x^2(1+y) = y^2(1+x) \Rightarrow x^2 + x^2y - y^2 - xy^2 = 0$

$\Rightarrow x^2 - y^2 + xy(x-y) = 0 \Rightarrow (x-y)(x+y+xy) = 0 \Rightarrow x + y + xy = 0[\because x \neq y]$

$\Rightarrow y = -\dfrac{x}{1+x}$ $\therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-(1+x)+x}{(1+x)^2} = \dfrac{-1}{(1+x)^2}$

103. যদি $y = \sin\left\{2\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right\}$ হয়, তবে $\dfrac{dy}{dx}$ কোনটি? **[KUET'11-12]**

(a) $\dfrac{7x}{(x^2-1)}$ (b) $\dfrac{3x}{\sqrt{(x^2+1)}}$ (c) $\dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$ (d) $\dfrac{5x}{\sqrt{(1-x^2)}}$ (e) $\dfrac{-x}{\sqrt{(1-x^2)}}$

সমাধান: $y = \sin\left\{2\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right\} = \sin\left\{2\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}\right\}$ [$x = \cos\theta$]

$= \sin\left\{2\tan^{-1}\tan\dfrac{\theta}{2}\right\}$ $= \sin\theta$ $= \sin(\cos^{-1}x)$; $\dfrac{dy}{dx} = \cos(\cos^{-1}x).\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

104. যদি $y = \tan^{-1}\dfrac{p+qx}{q-px}$ হয়, তবে $\dfrac{dy}{dx}$ এর মান কত? **[KUET'11-12]**

(a) $1+7x$ (b) $2+5x$ (c) $\dfrac{1}{1+x^2}$ (d) $\dfrac{2}{1-x^2}$ (e) $\dfrac{7}{1+x^2}$

সমাধান: $y = \tan^{-1}\dfrac{p+qx}{q-px} = \tan^{-1}\dfrac{\frac{p}{q}+x}{1-\frac{p}{q}x} = \tan^{-1}\dfrac{p}{q} + \tan^{-1}x$ $\therefore \dfrac{dy}{dx} = 0 + \dfrac{1}{1+x^2}$

105. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$ এর মান নির্ণয় কর। **[CUET'11-12]**

(a) 1 (b) -1 (c) $+2$ (d) None of these

সমাধান: $\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{2x}$ (La' Hospital Rule)

$= \lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ (La' Hospital Rule) $= \frac{1+1}{2} = 1$

106. $\underset{x\longrightarrow 1}{Lt}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\log x}\right)$ এর মান কত? **[KUET'11-12]**

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $-\frac{1}{3}$ (c) 3 (d) $-\frac{1}{2}$ (e) $\frac{1}{2}$

সমাধান: $\underset{x\longrightarrow 1}{Lt}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\log x}\right) = \underset{x\longrightarrow 1}{Lt}\frac{x\log x-x+1}{x\log x-\log x} = \underset{x\longrightarrow 1}{Lt}\frac{x.\frac{1}{x}+\log x-1}{x.\frac{1}{x}-\frac{1}{x}+\log x}$ [La Hospital's rule]

$= \underset{x\longrightarrow 1}{Lt}\frac{\log x}{1-\frac{1}{x}+\log x} = \underset{x\longrightarrow 1}{Lt}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}}$ [La Hospital's rule] $= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

107. $\varphi(x) = \log_e \cos x$ হলে $e^{2\varphi(x)}$ এর মান কোনটি? **[KUET'11-12]**

(a) $\frac{1}{3}(5+\cos x)$ (b) $\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$ (c) $(7+\cos 3x)$ (d) $\frac{1}{3}(1+\cos 3x)$ (e) $\frac{1}{3}(1+\sin 3x)$

সমাধান: $\varphi(x) = \ln(\cos x) \therefore e^{2\phi(x)} = e^{2\ln(\cos x)} = e^{\ln(\cos x)^2} = \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$

108. $\lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{x+4}}{\sin 2x} = ?$ **[RUET'11-12]**

(a) $-\frac{1}{8}$ (b) $-\frac{1}{4}$ (c) $-\frac{1}{2}$ (d) $\frac{4}{3}$ (e) None

সমাধান: (a) ; $\lim_{x\to 0}\frac{2-\sqrt{x+4}}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x+4}}}{2\cos 2x}$ [La hospital] $= \frac{-1}{2\sqrt{4}\times 2\cos 0} = \frac{-1}{2\times 2\times 2} = \frac{-1}{8}$

109. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 7x}$ এর মান? **[BUTex'11-12]**

(a) $\frac{5}{7}$ (b) $\frac{7}{5}$ (c) 0 (d) $\frac{25}{7}$

সমাধান: $;\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 7x} = \left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\right)\times\left(\lim_{x\to 0}\frac{7x}{\sin 7x}\right)\times\frac{5}{7} = 1\times 1\times\frac{5}{7} = \frac{5}{7}$

110. $\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{1}{N}\right)^N = ?$ **[Ans: d] [SUST'11-12]**

(a) 1 (b) 0 (c) ∞ (d) e (e) π

111. সাবানের একটি গোলাকার বুদবুদের আয়তন বৃদ্ধির হার ও তার ব্যাসার্ধের বৃদ্ধির হারের অনুপাত কত? **[BUET'10-11]**

(a) πr^2 (b) $\frac{4}{3}\pi r^2$ (c) $\frac{4}{3}\pi$ (d) $4\pi r^2$

সমাধান: $v = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{4}{3}\pi \times 3r^2 \times \frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{dr}{dt}} = 4\pi r^2$

112. x এর যে মানের জন্য $f(x) = \sin^3 x \cos x, (0 < x < \pi)$ এর মান বৃহত্তম হবে তা হচ্ছে- **[BUET'10-11]**

(a) $\frac{\pi}{6}$ (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $\frac{\pi}{3}$ (d) $\frac{\pi}{12}$

সমাধান: 4 টি option বসিয়ে check কর। $f'(x) = -\sin^4 x + 3\sin^2 x \cos^2 x$

$\therefore f'(x) = 0; \Rightarrow 3\cos^2 x = \sin^2 x \Rightarrow \tan^2 x = 3 \Rightarrow (\tan x = \pm\sqrt{3})$ [only + ve] $\therefore x = \frac{\pi}{3}$ and $f''(x) < 0$

113. $y^2 = 2x^3$ বক্ররেখার কোন্ বিন্দুতে স্পর্শকটি $4x - 3y + 1 = 0$ সরলরেখার সাথে লম্ব হবে? **[BUET'10-11]**

(a) $\left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{16}\right)$ (b) $\left(\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}\right)$ (c) $\left(-\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}\right)$ (d) $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{16}\right)$

সমাধান: (b); $y^2 = 2x^3 \Rightarrow 2y\frac{dy}{dx} = 2.3x^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{y}$

স্পর্শকের ঢাল $= -\frac{3}{4} = \frac{3x^2}{y}$

অর্থাৎ, বুঝা যায় নির্ণেয় বিন্দুর y স্থানাঙ্ক অবশ্যই ঋণাত্মক।

আবার, $y^2 = x^3$ সমীকরণের বামপক্ষ অঋণাত্মক। ডানপক্ষকেও তাই অঋণাত্মক হতে হলে x এর কোন মন ঋণাত্মক হতে পারবে না। ∴ নির্ণেয় বিন্দুর x স্থানাংক ধনাত্মক এবং y স্থানাংক ঋণাত্মক।

114. যদি $y = \sin^{-1}\left[\frac{4\sqrt{x}}{1+4x}\right]$ হয়, তাহলে $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(4,2)}$ এর মান হচ্ছে- **[BUET'10-11]**

(a) 4 (b) $\frac{1}{17}$ (c) $\frac{1}{9}$ (d) None of the above

সমাধান: $y = \sin^{-1}\left[\frac{4\sqrt{x}}{1+4x}\right] \Rightarrow y = 2\tan^{-1} 2\sqrt{x}\,;\ \frac{dy}{dx} = 2.\frac{1}{1+4x}.2.\frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(4,2)} = \frac{1}{17}$

115. যদি $y^x = x^y$ হয়, তাহলে $\frac{dy}{dx}$ এর মান হচ্ছে- **[BUET'10-11]**

(a) $\frac{\ln y + \frac{y}{x}}{\ln x + \frac{x}{y}}$ (b) $\frac{\ln y - \frac{x}{y}}{\ln x - \frac{y}{x}}$ (c) $\frac{\ln y - \frac{y}{x}}{\ln x - \frac{x}{y}}$ (d) $\frac{\ln x - \frac{y}{x}}{\ln y - \frac{x}{y}}$

সমাধান: $y^x = x^y \Rightarrow x \ln y = y \ln x$

$$\Rightarrow x.\frac{1}{y}.y_1 + \ln y = \frac{y}{x} + \ln x.y_1 \Rightarrow y_1\left(\frac{x}{y} - \ln x\right) = \frac{y}{x} - \ln y \Rightarrow y_1 = \frac{\ln y - \frac{y}{x}}{\ln x - \frac{x}{y}}$$

116. মান নির্ণয় করঃ $\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-2x}}{\log(1+x)}, [0<x<1]$ **[BUET'10-11]**

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) $\frac{1}{3}$

সমাধান: $\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-2x}}{\log(1+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1-1+2x-\frac{4x^2}{2!}+.....}{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-.....} = \lim_{x\to 0}\frac{2-\frac{4x}{2!}+.....}{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-.....} = \frac{2}{1} = 2$

117. যদি $y=1/x$ হয়, তবে y এর 20 তম অন্তরীকরণ কত? **[CUET'10-11]**

(a) $\frac{20!}{x^{20}}$ (b) $\frac{20!}{x^{21}}$ (c) $\frac{21!}{x^{21}}$ (d) None of these

সমাধান: $y=\frac{1}{x}=x^{-1} \quad \therefore y_1=(-1)\,x^{-2} \;;\; y_2=(-1)\,(-2)\,x^{-3}=(-1)^2.2!.x^{-3}$

$y_3=(-1)\,(-2)\,(-3)x^{-4}=(-1)^3.3!.x^{-4} \quad \therefore y_n=(-1)^n.n!\,x^{-(n+1)} \quad \therefore y_{20}=(-1)^{20}.20!\,x^{-21}=\frac{20!}{x^{21}}$

118. যদি $x=\tan\ln y$ হয় তবে $\frac{y_2}{y_1}$ এর মান কত? **[KUET'10-11]**

(a) $\frac{1+x^2}{2x-1}$ (b) $\frac{2x-1}{1+x^2}$ (c) $-\frac{1+x^2}{2x-1}$ (d) $-\frac{2x-1}{1+x^2}$ (e) $\frac{1+x^2}{1-x^2}$

সমাধান: $x=\tan(\ln y) \Rightarrow \ln y=\tan^{-1}x \Rightarrow \frac{1}{y}y_1=\frac{1}{1+x^2} \Rightarrow y_1(1+x^2)=y$

$\Rightarrow y_2(1+x^2)+2xy_1=y_1 \quad \therefore \frac{y_2}{y_1}=\frac{1-2x}{1+x^2}$

119. তাপে সিলিন্ডারের ব্যাস ও উচ্চতা বৃদ্ধির হার যথাক্রমে 0.025 ও 0.0135 হইলে আয়তন বৃদ্ধির হার কত? যদি ব্যাস ও উচ্চতা যথাক্রমে 10 ও 25 একক বিশিষ্ট হয়। **[KUET'10-11]**

(a) 10.8723 (b) 11.0515 (c) 14.3725 (d) 11.3725 (e) 17.0515

সমাধান: $\frac{dh}{dt}=0.035;\ \frac{dR}{dt}=0.025;\ R=10;\ h=25$

$\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{4}\pi R^2h\right)=\frac{1}{4}\pi\times\left(2Rh\frac{dR}{dt}+R^2\frac{dh}{dt}\right)=\frac{\pi}{2}\times10\times25\times0.025+\frac{1}{4}\pi\times100\times0.0135 = 10.87$

120. $y=x^3-3x^2-9x+5$ বক্ররেখার যে সব বিন্দুতে স্পর্শক x -অক্ষের সমান্তরাল তাদের ভুজের মান হলো-

(A) $x=0$ and 0 (b) $x=1$ and -1 (c) $x=1$ and -3 (d) $x=-1$ and 3 (e) $x=-1$ and -1

সমাধান: (d) ; $\frac{dy}{dx}=3x^2-6x-9=0 \quad \therefore x=3,\ -1$ **[RUET'10-11]**

121. $x^2+y^2=\log(xy)$ হলে $\frac{dy}{dx}=?$ **[SUST'10-11]**

(a) $\frac{\left(y-2x^2y\right)}{\left(2xy^2-x\right)}$ (b) $\frac{x-2x^3}{y-2y^3}$ (c) $\frac{2x^3-x}{y-2y^3}$ (d) $\frac{y-2x^2y}{x-2xy^2}$

সমাধান: (a); $2x+2yy_1=\frac{1}{xy}(y+xy_1) \quad \therefore y_1=\frac{y-2x^2y}{2xy^2-x}$

122. অন্তরিকরণ কর : $\frac{d}{dx}\sqrt[3]{(5x^2-4)}$ **[CUET'10-11]**

(a) $\frac{x}{3\sqrt[3]{(5x^2-4)}}+c$ (b) $\frac{10x}{3\sqrt[3]{(5x^2-4)^2}}+c$ (c) $\frac{10x}{\sqrt[3]{(5x^2-4)^2}}+c$ (d) None of these

সমাধান: (d); $\frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{5x^2-4}\right) = \frac{d}{dx}\left[(5x^2-4)^{\frac{1}{3}}\right] = \frac{1}{3}(5x^2-4)^{-\frac{2}{3}}.10x = \frac{10x}{3\sqrt[3]{(5x^2-4)^2}}$

123. x এর সাপেক্ষে $\sqrt{\sin\sqrt{x}}$ এর অন্তরক সহগ নির্ণয় কর। **[CUET'10-11]**

(a) $\frac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{\sin\sqrt{x}}}$ (b) $\frac{\sin\sqrt{x}}{4\sqrt{x\cos\sqrt{x}}}$ (c) $\frac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x\sin\sqrt{x}}}$ (d) None of these

সমাধান: $\frac{d}{dx}(\sqrt{\sin\sqrt{x}}) = \frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{\sin\sqrt{x}}}.\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x\sin\sqrt{x}}}$

124. $y+x=x^{-y}$ সমীকরণ হইতে $\frac{dy}{dx}$ এর মান কত? **[KUET'10-11,08-09]**

(a) $\frac{x^2+2y}{2x+\log x}$ (b) $\frac{x+2y+5}{(x+y)+\log x}$ (c) $\frac{xy+y^2+1}{x+\log x}$

(d) $-\frac{xy+x+y^2}{x[1+(x+y)\log x]}$ (e) $-\frac{x+xy-y^2}{x^2[(x+y)\log x]}$

সমাধান:(d); $\ln(y+x)=-y\ln x \Rightarrow \frac{1}{y+x}\left(\frac{dy}{dx}+1\right)=-\frac{y}{x}-\ln x\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx}\left(\frac{1}{x+y}+\ln x\right)=-\left(\frac{y}{x}+\frac{1}{y+x}\right)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-\frac{y^2+xy+x}{x(y+x)}}{\frac{(x+y)\ln x+1}{(x+y)}} = -\frac{y^2+xy+x}{x[1+(x+y)\ln x]}$$

125. $y=2x^2$ এবং $z=3x^2$ হলে $\frac{dy}{dz}=?$ **[Ans: d] [SUST'10-11]**

(a) $\frac{4}{9x}$ (b) $\frac{9}{4x}$ (c) $\frac{4}{9x^2}$ (d) $\frac{2}{3}$

সমাধান: (d); $y=2x^2 \therefore \frac{dy}{dx}=4x$; $z=3x^2 \therefore \frac{dz}{dx}=6x \therefore \frac{dy}{dz}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

126. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x=?$ **[RUET'10-11]**

(a) $-\infty$ (b) -1 (c) e^{-1} (d) e (e) 1

সমাধান: (c) ; $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{1+x}{x}}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)^x = \frac{1}{e}$