Question Type-01: A+iB আকারে প্রকাশ

➲ **Formula & Concept:** বাস্তব অংশগুলোকে A ও কাল্পনিক অংশগুলোকে B আকারে প্রকাশ করতে হবে।

♦ যদি দুটি জটিল সংখ্যা গুণ আকারে থাকে তবে সাধারণ নিয়মে গুণ করে A+iB আকারে প্রকাশ করতে হবে।

♦ যদি দুটি জটিল সংখ্যা ভাগ আকারে থাকে তবে হরের জটিল সংখ্যার অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা দ্বারা লব ও হরকে গুণ করে A+iB আকারে প্রকাশ করতে হবে।

[Note: $\frac{1}{i} = -i$; $a > 0$ হলে, $\sqrt{-a} = \sqrt{a}\, i$]

MCQ

01. If $i^2 = -1$, then the value of $\frac{2-3i}{2i} =$? [IUT'14-15]

(a) $-\frac{3}{2}+i$ (b) $\frac{3}{2}+i$ (c) $-\frac{3}{2}-i$ (d) None of these

Solution: (c); $\frac{2-3i}{2i} = -\frac{3}{2}+\frac{1}{i} = -\frac{3}{2}-i$

02. n এর ধনাত্মক সর্বনিম্ন অখন্ড মান বের কর যার জন্যে $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = 1$ হয়। [BUET'10-11]

(a) 2 (b) 3 (c) 6 (d) 4

সমাধান: (d); $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = 1 \Rightarrow \left\{\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}\right\}^n = 1 \Rightarrow i^n = 1$ এক্ষেত্রে ক্ষুদ্রতম $n = 4$ এর জন্য $i^4 = 1 \therefore n = 4$

Written

03. $\sqrt{-16} \times \sqrt{-1}$ এর মান কত? [BUTEX'10-11]

সমাধান: $4i \times i = 4i^2 = -4$(Ans.)

04. $\sqrt{-2} \times \sqrt{-1}$ এর মান কত? [BUTEX'09-10]

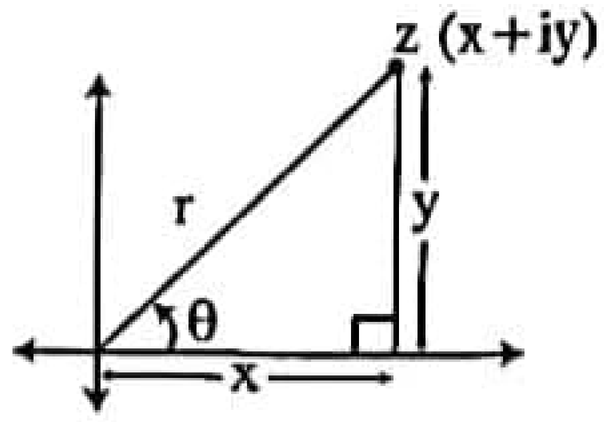
সমাধান: $\sqrt{-2} \times \sqrt{-1} = \sqrt{2} \times i \times \sqrt{1} \times i = \sqrt{2} \times i^2 = -\sqrt{2}$

Question Type-02: জটিল সংখ্যার মডুলাস ও আর্গুমেন্ট সংক্রান্ত সমস্যা

➲ **Formula & Concept:**

♦ মডুলাস: মডুলাস হলো মূলবিন্দু থেকে কোন জটিল সংখ্যার প্রতিরূপী বিন্দুর দূরত্ব।
প্রকাশ: mod (z), |z|, r

♦ আর্গুমেন্ট: কোন জটিল সংখ্যা x অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে ঐ জটিল সংখ্যার আর্গুমেন্ট বলে।
প্রকাশ: θ , arg (z)



চিত্র হতে, মডুলাস, $r = \sqrt{x^2+y^2}$

অর্থাৎ, $z = x+iy$ একটি জটিল সংখ্যা হলে তার, $\boxed{\text{মডুলাস}, |z| = \sqrt{x^2+y^2} = r}$

আর্গুমেন্ট ২ প্রকার: (i) মূখ্য আর্গুমেন্ট (Principal argument)
(ii) সাধারণ আর্গুমেন্ট (General argument)

➢ মূখ্য আর্গুমেন্ট **(Principal argument):** x-অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে কোন জটিল সংখ্যা যে ক্ষুদ্রতম কোণ উৎপন্ন করে তাকে মূখ্য আর্গুমেন্ট বলে।
সীমা: $-\pi < x \leq \pi$ (আমরা আর্গুমেন্ট নির্ণয় করতে বললে মূখ্য আর্গুমেন্টই নির্ণয় করবো)

➢ সাধারণ আর্গুমেন্ট **(General argument):** মূখ্য আর্গুমেন্ট ব্যতীত বাকি সব আর্গুমেন্টই সাধারণ আর্গুমেন্ট।

♦ মূখ্য আর্গুমেন্ট নির্ণয়:

➢ প্রথম চতুর্ভাগে (1st Quadrant) $\boxed{\arg(z) = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|}$

➢ দ্বিতীয় চতুর্ভাগে (2nd Quadrant) $\boxed{\arg(z) = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|}$

➢ তৃতীয় চতুর্ভাগে (3rd Quadrant) $\boxed{\arg(z) = -\pi + \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|}$

➢ চতুর্থ চতুর্ভাগে (4th Quadrant) $\boxed{\arg(z) = -\tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|}$

➢ অক্ষদ্বয়ের উপরে থাকলে:: $a > 0$ হলে,

a এর মূখ্য আর্গুমেন্ট $= 0$, ai এর মূখ্য আর্গুমেন্ট $= \frac{\pi}{2}$, $-a$ এর মূখ্য আর্গুমেন্ট $= \pi$, $-ai$ এর মূখ্য আর্গুমেন্ট $= -\frac{\pi}{2}$

$\therefore |z_1 z_2| = |z_1|.|z_2| = r_1.r_2$

$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ [যেমন $\log_a(MN) = \log_a^M + \log_a^N$] $= \theta_1 + \theta_2$

$\therefore \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{r_1}{r_2}$

$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$ [যেমন, $\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a^M - \log_a^N$] $= \theta_1 - \theta_2$

(i) $|z^n| = |z|^n = r^n$ (ii) $\arg(z^n) = n\arg(z)$ [যেমন, $\log_a^{M^N} = N\log_a^M$] $= n\theta$

MCQ

01. $\frac{5-i}{2-3i}$ এর আর্গুমেন্ট কত? [BUTEX'14-15]

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{2}$ (c) $\frac{2\pi}{3}$ (d) π

সমাধান: (a); $\frac{5-i}{2-3i} = \frac{(5-i)(2+3i)}{4+9} = \frac{1}{13}(10 + 15i - 2i + 3) = 1 + i \rightarrow \arg = \tan^{-1}\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}$

02. $A = \frac{a+ia}{b-ic} + id$ সমীকরণে a, b, c ও d বাস্তব ধনাত্মক সংখ্যা এবং শূন্যের চেয়ে বড়। $c > b$ হলে A এর আর্গুমেন্ট $\theta =$? [RUET'14-15]

(a) $0 < \theta < 90°$ (b) $90° < \theta < 180°$ (c) $180° < \theta < 270°$
(d) $270° < \theta < 360°$ (e) $-90° < \theta < 0°$

সমাধান: (b); $A = \frac{a+ia}{b-ic} + id = \frac{(a+ia)(b+ic)}{b^2+c^2} + id = \frac{a(b-c)}{b^2+c^2} + \frac{ia(b+c)}{b^2+c^2} + id = \frac{a(b-c)}{b^2+c^2} + i\frac{a(b+c)+d(b^2+c^2)}{b^2+c^2}$

$\theta = \arg A = \tan^{-1}\frac{a(b+c)+d(b^2+c^2)}{a(b-c)}$

যেহেতু $a, b, c, d > 0$ এবং $c > b$ তাই লব ধনাত্মক কিন্তু হর ঋণাত্মক । আবার, tan অনুপাত ঋণাত্মক হয় ২য় বা ৪র্থ চতুর্ভাগে । $\therefore 90° < \theta < 180°$ ই সঠিক উত্তর। $\left[\tan^{-1}\frac{y}{-x} = \pi - \tan^{-1}\frac{y}{x}\right]$

03. $\left|\frac{(2+i)^3}{2+3i}\right|$ এর মান কোনটি? [KUET'11-12, 13-14]

(a) $\frac{\sqrt{34}}{5}$ (b) $\frac{5\sqrt{65}}{13}$ (c) $\frac{\sqrt{11}}{9}$ (d) $\frac{\sqrt{29}}{7}$ (e) $\frac{\sqrt{39}}{11}$

সমাধান: (b); $\left|\frac{(2+i)^3}{2+3i}\right| = \left|\frac{(2+i)^3}{2+3i}\right| = \frac{|2+11i|}{|2+3i|} = \frac{\sqrt{4+121}}{\sqrt{4+9}} = \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{13}} = \frac{5\sqrt{65}}{13}$

04. $1 + \sqrt{3}i$ এর মডুলাস ও আর্গুমেন্ট এর মান কত? [RUET'10-11]

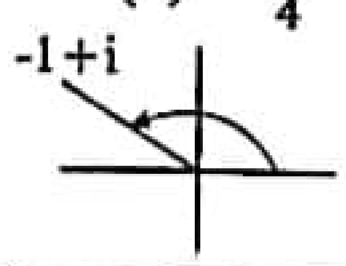
(a) $2 \& \frac{\pi}{3}$ (b) $3 \& \frac{\pi}{2}$ (c) $2 \& \frac{\pi}{2}$ (d) $3 \& \frac{\pi}{3}$ (e) $1 \& \pi$

সমাধান: (a); $r = \sqrt{1^2 + 3} = 2$; $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{1}$ $\therefore \theta = \tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$

05. $(-1 + i)$ এর আর্গুমেন্ট কত [RUET'09-10, SUST'10-11]

(a) $-\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{3\pi}{4}$ (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $-\frac{3\pi}{4}$ (e) $\frac{5\pi}{4}$

সমাধান: (b); $-1 + i$ $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{-1}\right) = -\frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ (আর্গুমেন্ট)



Written

06. $4+3i$ জটিল সংখ্যার মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর। **[RUET'04-05,12-13]**

সমাধান: ধরি, $4 = r\cos\theta$ ---------- (i); $3 = r\sin\theta$---------(ii); $(i)^2+(ii)^2 \Rightarrow r=5$

আবার, (ii) ÷ (i) $\Rightarrow \tan\theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \therefore \text{Arg} = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ (Ans.)

বিকল্প : $r = \sqrt{4^2+3^2} = 5$; $\text{Arg} = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$

07. মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় করঃ $-\sqrt{3}+i$ **[RUET'11-12]**

সমাধান: মডুলাস, $r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2} = \sqrt{3+1} = 2$

আর্গুমেন্ট, $\theta = \pi - \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

08. $\sqrt{3}+i$ জটিল সংখ্যার মডুলাস কত হবে? **[BUTEX'09-10]**

সমাধান: $|\sqrt{3}+i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2+(1)^2} = \sqrt{4} = 2$

09. নিচের জটিল সংখ্যাটির মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর $1+i\sqrt{3}$? **[RUET'06-07]**

সমাধান: $\therefore |z| = \sqrt{(1)^2+(\sqrt{3})^2} = 2$ এর আর্গুমেন্ট θ হলে, $\theta = \tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ (Ans.)

10. মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর: $-4-3i$ **[RUET'03-04]**

সমাধান: $x = r\cos\theta = -4$; $y = r\sin\theta = -3$ $\therefore$ মডুলাস, $r = 5$; $\tan\theta = \frac{3}{4}$ $\therefore$ আর্গুমেন্ট, $\theta = -\pi + \tan^{-1}\frac{3}{4}$ (Ans.)

Question Type-03: জটিল সংখ্যার পোলার প্রতিরূপ সংক্রান্ত

Formula & Concept:

$z = x+iy$ হলে, $x = r\cos\theta$ এবং $y = r\sin\theta$ এবং $x^2+y^2 = r^2$

$\therefore$ জটিল সংখ্যাটির পোলার প্রতিরূপ,

$z = r\cos\theta + i\,r\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\,e^{i\theta}$ [অয়লারের সূত্রঃ $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$]

MCQ

01. $\log_e(1+i)$ এর সর্বাধিক সঠিক মান কোনটি? **[RUET'14-15]**

(a) $\frac{1}{2}\log_e 2 + \frac{\pi}{4}i$ (b) $2\log_e 2 + \frac{\pi}{4}i$ (c) $\frac{1}{2}\log_e 2 - \frac{\pi}{4}i$

(d) $\frac{1}{2}\log_e 2 + \left(2n+\frac{1}{4}\right)\pi i$ where n is an integer (e) $\frac{1}{2}\log_e 2 + \left(n+\frac{1}{4}\right)\pi i$ where n is an integer

সমাধান: (d); $1+i = \sqrt{2}\,e^{\left(2n\pi+\frac{\pi}{4}\right)i}$

02. $(2\sqrt{3}-2i)(-2\sqrt{3}+6i)$ এর পোলার আকার হলো- **[KUET'12-13]**

(a) $16\sqrt{3}e^{i\pi/2}$ (b) $16\sqrt{3}e^{3i\pi/2}$ (c) $16\sqrt{3}e^{i\pi/4}$ (d) $16\sqrt{3}e^{3i\pi/4}$ (e) $16\sqrt{3}e^{5i\pi/4}$

সমাধান: (a); $a+ib = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ হলে $a+ib = re^{i\theta}$ [অয়লারের সূত্র]

$2\sqrt{3}-2i$ এর মডুলাস, $r_1 = \sqrt{(2\sqrt{3})^2+(-2)^2} = 4$; আর্গুমেন্ট, $\theta_1 = -\tan^{-1}\frac{2}{2\sqrt{3}} = -\frac{\pi}{6}$

$\therefore 2\sqrt{3}-2i = 4e^{-i\frac{\pi}{6}}$.................(i)

$-2\sqrt{3}+6i$ এর মডুলাস, $r_2 = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2+(6)^2} = 4\sqrt{3}$

আর্গুমেন্ট, $\theta_2 = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{6}{-2\sqrt{3}}\right| = \pi - \tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{2\pi}{3} \therefore -2\sqrt{3}+6i = 4\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}}$

$\therefore (2\sqrt{3}-2i)(-2\sqrt{3}+6i) = 4e^{-i\frac{\pi}{6}} \times 4\sqrt{3}e^{i\frac{2\pi}{3}} = 16\sqrt{3}e^{\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)i} = 16\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{2}}$

Written

03. $-1+\sqrt{3}i$ জটিল সংখ্যাটিকে পোলার আকারে প্রকাশ কর। অতঃপর মডুলাস এবং আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর। **[BUET'20-21]**

সমাধান: $-1+\sqrt{3}i$ এর মডুলাস, $r=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=2$; আর্গুমেন্ট, $\theta=\pi-\tan^{-1}\left|\frac{\sqrt{3}}{-1}\right|=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$

$\therefore$ পোলার আকার $=r(\cos\theta+i\sin\theta)=2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$ (Ans.)

04. যদি $re^{i\theta}=\frac{3+2i}{2+3i}+\frac{1+5i}{1-2i}$, তবে r ও θ এর মান নির্ণয় কর। **[BUET'17-18]**

সমাধান: দেওয়া আছে, $re^{i\theta}=\frac{3+2i}{2+3i}+\frac{1+5i}{1-2i}$

$\Rightarrow r\cdot e^{i\theta}=\frac{(3+2i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}+\frac{(1+5i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}\Rightarrow r\cdot e^{i\theta}=\frac{6-9i+4i-6i^2}{4-9i^2}+\frac{1+2i+5i+10i^2}{1-4i^2}$

$\Rightarrow r\cdot e^{i\theta}=\frac{(6+6)+i(4-9)}{4+9}+\frac{(1-10)+i(2+5)}{1+4}$ $[\because i^2=-1]$

$\Rightarrow r\cdot e^{i\theta}=\frac{12-5i}{13}+\frac{-9+7i}{5}\Rightarrow r\cdot e^{i\theta}=\frac{12}{13}-\frac{5}{13}i-\frac{9}{5}+\frac{7}{5}i\Rightarrow r\cdot e^{i\theta}=\frac{-57}{65}+\frac{66}{65}i$

$\therefore r=\sqrt{\left(\frac{-57}{65}\right)^2+\left(\frac{66}{65}\right)^2}=\sqrt{\frac{3249+4356}{65}}=\frac{\sqrt{7605}}{65}=\frac{39\sqrt{5}}{65}=\frac{3}{\sqrt{5}}$ (Ans.)

$\theta=\pi-\tan^{-1}\left(\frac{\frac{66}{65}}{\frac{57}{65}}\right)=\pi-\tan^{-1}\left(\frac{66}{57}\right)$ (Ans.)

05. $\frac{1+2i}{1-3i}$ কে $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ আকারে প্রকাশ কর। **[BUET'16-17]**

সমাধান: $\frac{1+2i}{1-3i}=\frac{(1+2i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)}=\frac{1+3i+2i+6i^2}{1^2+3^2}=\frac{-5+5i}{10}$ $[\because i^2=-1]=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

$\therefore r=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\theta=180^\circ-\tan^{-1}\left|\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}\right|=180^\circ-\tan^{-1}1=180^\circ-45^\circ=135^\circ$

$\therefore \frac{1+2i}{1-3i}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta+i\sin\theta)$ যেখানে, $\theta=135^\circ$

বিকল্প: $r=\frac{\sqrt{1^2+2^2}}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$; $(1+2i)$ এর আর্গুমেন্ট $\theta_1=\tan^{-1}2$

$(1-3i)$ এর $\theta_2=-\tan^{-1}3$; $\theta=\theta_1-\theta_2=\tan^{-1}2-(-\tan^{-1}3)=135^\circ$

$\frac{1+2i}{1-3i}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos135^\circ+i\sin135^\circ)$

Question Type-04: মূল নির্ণয় সংক্রান্ত

➲ **Formula & Concept:**

◆ বর্গমূল নির্ণয় সংক্রান্ত সমস্যা

➢ জটিল সংখ্যার বর্গমূল নির্ণয়ের পদ্ধতি:

Formula: $a\pm ib$ এর বর্গমূল $=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{r+a}$ চিহ্ন $i\sqrt{r-a})$ [যেখানে $r=\sqrt{a^2+b^2}$]

[Note: বামপক্ষে i এর সামনে যে চিহ্ন থাকবে formula টির ডানপক্ষে 'চিহ্ন' লেখা স্থানে ঐ চিহ্ন বসবে]

◆ ঘনমূল সম্বলিত: এককের 3 টি ঘনমূল $1,\omega,\omega^2$

(i) $\omega^3=1$, (ii) $1+\omega+\omega^2=0$ [যেখানে, $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $\omega^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$]

Shortcut for MCQ:

$\sqrt[3]{a^3}=a,a\omega,a\omega^2$; $\sqrt[3]{-a^3}=-a,-a\omega,-a\omega^2$

$\sqrt[3]{-a^3i}=ai,ai\omega,ai\omega^2$; $\sqrt[3]{a^3i}=-ai,-ai\omega,-ai\omega^2$

◆ চতুর্মূল সম্বলিত: $\sqrt[4]{\text{রাশি}}=x$ ধরে করতে হবে।

◆ ষষ্ঠমূল সম্বলিত: $\sqrt[6]{1}=\pm1,\pm\omega,\pm\omega^2$; $\sqrt[6]{\text{রাশি}}=x$ ধরে করতে হবে।

MCQ

01. The value of $\sqrt{i}$ is- [IUT'11-12]

(a) $\pm(1+i)$ (b) $\pm(\frac{1}{2}+i)$ (c) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ (d) $\pm\sqrt{2}\,(1+i)$

Solution: (c); $\sqrt{i}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{r+0}+i\sqrt{r-0}), r=\sqrt{0^2+1^2}=1; =\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$

Alternative: $\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2i}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{1+2i-1})=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1^2+2.1.i+i^2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(1+i)^2}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$

02. $\frac{5+12i}{3-4i}$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর। [KUET'09-10, 17-18]

(a) $\pm\left(\frac{4}{5}+\frac{7}{5}i\right)$ (b) $\pm(2+5i)$ (c) $\pm(3+7i)$ (d) $\pm(9+11i)$ (e) None of these

সমাধান: (a); By calculator (option check)

03. If $i^2=-1$, then $\sqrt{(8+6i)}=?$ [IUT'17-18]

(a) $(3+i)$ (b) $-(3+i)$ (c) $\pm(3+i)$ (d) (3-i)

Solution: (c) ; Take the squares of the options and match them with the question.

$\sqrt{8+6i}=\pm\sqrt{3^2+2.3.i+i^2}=\pm\sqrt{(3+i)^2}=\pm(3+i)$

04. -625 এর চতুর্থ মূল কোনটি? [KUET'16-17]

(a) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1\pm i)$ (b) $\pm\frac{2}{\sqrt{3}}(21\pm i)$ (c) $\pm\frac{1}{\sqrt{5}}(5\pm i)$ (d) $\pm\frac{1}{\sqrt{5}}(3\pm 4i)$ (e) $\pm\frac{5}{\sqrt{2}}(1\pm i)$

সমাধান: (e); $x^4=-625\Rightarrow x^2=\pm 25i\ \therefore x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sqrt{25+0}\pm i\sqrt{25-0}\right]=\pm\frac{5}{\sqrt{2}}(1\pm i)$

05. $-8-6\sqrt{-1}$ এর বর্গমূল হবে – [BUET'07-08, RUET'14-15, BUTEX'16-17]

(a) $\pm(1+3i)$ (b) $\pm(1-3i)$ (c) $3-i$ (d) $3+i$

সমাধান: (b); $\pm\sqrt{-8-6i}=\pm\sqrt{1^2-2.3.i.1+(3i)^2}=\pm\sqrt{(1-3i)^2}=\pm(1-3i)$

বিকল্প: $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\{\sqrt{r+a}\pm i\sqrt{r-a}\}\Rightarrow\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\{\sqrt{10-8}\pm i\sqrt{10+8}\}\Rightarrow\pm(1-3i)$

06. Find the square root of 2i. [IUT'08-09, 14-15]

(a) $\pm(1-i)$ (b) $\pm\sqrt{2i}$ (c) $\pm i$ (d) $\pm(1+i)$

Solution: (d); $\pm\sqrt{2i}=\pm\sqrt{1+2i+i^2}=\pm\sqrt{(1+i)^2}=\pm(1+i)$

07. $\left(a+\sqrt{1-a^2}\right)^6+\left(a-\sqrt{1-a^2}\right)^6$ এর মান কত? [KUET'14-15]

(a) $2+24a^2-24a^4$ (b) $5-7a+a^2$ (c) $9-8a+a^4$ (d) $7+15a^2-a^4$ (e) $11-9a+8a^2$

সমাধান: (a); $a=-1$ বসিয়ে দেখা গেল (a)-ই মান সমান দেখায়।

08. বর্গমূল নির্ণয় কর: $-8-6\sqrt{-1}$ [RUET'14-15]

(a) $1-3\sqrt{2}$ (b) $\pm(1-3\sqrt{2})$

(c) $1-3\sqrt{-2}$ (d) $\pm(1-3\sqrt{-1})$ (e) $\pm(1+3\sqrt{-1})$

সমাধান: (d); ধরি, $a+ib=\pm\sqrt{-8-6i}\Rightarrow(a^2-b^2)+2abi=-8-6i; a^2-b^2=-8;\ 2ab=-6$

$\therefore a^2+b^2=10\ \therefore a=1$ ও $b=-3\ \therefore\ ab=-3\ \therefore a+ib=\pm(1-3\sqrt{-1})$

09. $\sqrt{i}+\sqrt{-i}$ এর মান হবে- [KUET'06-07,08-09, BUET'05-06,13-14]

(a) 2 (b) 1 (c) 0 (d) $\sqrt{2}$

সমাধান: (d) ; $\left(\sqrt{i}+\sqrt{-i}\right)^2=i-i+2\sqrt{-i^2}=2\ \therefore\sqrt{i}+\sqrt{-i}=\sqrt{2}$.

10. $8+4\sqrt{5}i$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর। [RUET'13-14]

(a) $\pm(3-2i)$ (b) $\pm(\sqrt{10}-\sqrt{2}i)$ (c) $\pm(\sqrt{10}+\sqrt{2}i)$ (d) $\pm(3+2i)$ (e) None

সমাধান: (c); $8+4\sqrt{5}i=10+2\sqrt{10}\sqrt{2}i-2=(\sqrt{10})^2+2.\sqrt{10}.\sqrt{2}i+(\sqrt{2}i)^2=(\sqrt{10}+\sqrt{2}i)^2$

$\therefore\sqrt{8+4\sqrt{5}i}=\pm(\sqrt{10}+\sqrt{2}i)$

11. $\sqrt[3]{-i}$ এর মান কোনটি? [RUET'11-12]

(a) $-i, \frac{1}{2}(i \pm \sqrt{3})$ (b) $i, \frac{1}{2}(-i \pm \sqrt{3})$ (c) $0, \frac{1}{2}(i \pm \sqrt{3})$ (d) $0, \frac{1}{2}(-i \pm \sqrt{3})$ (e) None

সমাধান: (b); $\sqrt[3]{-i} = \sqrt[3]{i^3} = x \therefore x^3 = i^3$ $\therefore x = i, i\omega, i\omega^2 = i, i\left(\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}\right) = i, \left(\frac{-i\pm\sqrt{3}}{2}\right)$

12. The value of $\sqrt{i}$ is- [Ans: c] [IUT'11-12]

(a) $\pm(1+i)$ (b) $\pm(\frac{1}{2}+i)$ (c) $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ (d) $\pm\sqrt{2}\,(1+i)$

13. $4-4\sqrt{-1}$ এর বর্গমূল কোনটি? [KUET'10-11]

(a) $\pm(2-\sqrt{-2})$ (b) $\pm(4-\sqrt{-2})$ (c) $\pm\left[(\sqrt{8}+2)^{\frac{1}{2}}-(\sqrt{8}-2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}\right]$

(d) $\pm\left[(\sqrt{8}+2)^{\frac{1}{2}}-(2-\sqrt{8})^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}\right]$ (e) $\pm\left[(\sqrt{6}+2)^{\frac{1}{2}}-(\sqrt{6}-2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{-1}\right]$

সমাধান: (c); ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে।

14. $\sqrt[4]{-16}=?$ [RUET'10-11]

(a) $\sqrt{2}$ (b) $\pm(\sqrt{3}\pm i)$ (c) $\pm\frac{3}{\sqrt{2}}(1\pm i)$ (d) $\pm\sqrt{2}(1\pm i)$ (e) $\frac{1}{3}$

সমাধান: (d); $\sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16i^2} = \sqrt{\pm 4i} = 2\sqrt{\pm i} = 2\sqrt{\frac{1}{2}.(\pm 2i)}$

$= 2\sqrt{\frac{1}{2}(1\pm i)^2} = \pm 2.\frac{1}{\sqrt{2}}(1\pm i) = \pm\sqrt{2}(1\pm i)$

15. The value of $\sqrt[4]{-81}$ is- [IUT'10-11]

(a) $\pm\frac{3}{\sqrt{2}}(1\pm i)$ (b) $\pm\frac{3}{\sqrt{2}}(1\pm 2i)$ (c) $\pm\frac{3}{\sqrt{2}}(2\pm i)$ (d) $\pm\frac{3}{\sqrt{2}}(1\pm i)$

Solution: (a, d); $x^4 = -81 \Rightarrow x^2 = \pm 9i \therefore x = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}(1\pm i)$

16. Find the value of $x^4-4x^3+6x^2-4x+5$; if $x = 2+i$. [IUT'08-09]

(a) 0 (b) 12 (c) 5 (d) 7

Solution: (a); $(x-2) = i \Rightarrow x^2-4x+4 = -1 \Rightarrow x^2-4x+5 = 0$

$x^4-4x^3+6x^2-4x+5 = x^2(x^2-4x+5)+(x^2-4x+5) = (x^2+1)(x^2-4x+3) = 0$

Written

17. $-i$ এর ঘনমূল তিনটির যোগফল নির্ণয় কর। [BUET'18-19]

সমাধান: $x = \sqrt[3]{-i} \Rightarrow x^3 = -i = i^3 \Rightarrow \left(\frac{x}{i}\right)^3 = 1 \Rightarrow \frac{x}{i} = 1, \omega, \omega^2 \Rightarrow x = i, i\omega, i\omega^2$

$\therefore$ ঘনমূল তিনটির যোগফল $= i(1+\omega+\omega^2) = 0$ (Ans.)

18. $\sqrt[4]{-169}$ এর মান নির্ণয় কর। [BUTEX'18-19]

সমাধান: ধরি, $\sqrt[4]{-169} = x \Rightarrow x^4 = -169$

$\Rightarrow x^4 = (13i)^2 \Rightarrow x^2 = \pm 13i \Rightarrow x^2 = \frac{13}{2}(\pm 2i) \Rightarrow x^2 = \frac{13}{2}(1\pm 2i+i^2) \Rightarrow x^2 = \frac{13}{2}(1\pm i)^2$

$\therefore x = \pm\sqrt{\frac{13}{2}}(1\pm i)$ (Ans.)

19. বর্গমূল নির্ণয় কর: $\cos\theta + i\sin\theta,\ i = \sqrt{-1}$ [RUET'15-16]

সমাধান: $\sqrt{\cos\theta + i\sin\theta} = x+iy \Rightarrow \cos\theta + i\sin\theta = x^2-y^2+2ixy \therefore \cos\theta = x^2-y^2;\ \sin\theta = 2xy$

$\therefore (x^2+y^2)^2 = (x^2-y^2)^2+(2xy)^2 = \cos^2\theta+\sin^2\theta = 1 \therefore x^2+y^2 = 1$

$\therefore 2x^2 = 1+\cos\theta \Rightarrow x = \frac{\pm 1}{\sqrt{2}}(1+\cos\theta)^{\frac{1}{2}}$ এবং $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-\cos\theta)^{\frac{1}{2}}$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল, $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{1+\cos\theta}+i\sqrt{1-\cos\theta}\right)$ (Ans.)

বিকল্প: $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$ $\therefore$ বর্গমূল $= \pm(e^{i\theta})^{\frac{1}{2}} = \pm e^{\frac{i\theta}{2}} = \pm\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)$ (Ans.)

20. বর্গমূল নির্ণয় করঃ $2+i\sqrt{a^2-4}$ [RUET'11-12]

সমাধান: ধরি, $x+iy=\sqrt{2+i\sqrt{a^2-4}}[x,y\in\mathbb{R}]\Rightarrow x^2-y^2+2ixy=2+i\sqrt{a^2-4}$

এখন, $x^2-y^2=2;\ 2xy=\sqrt{a^2-4};\ (x^2+y^2)^2=(x^2-y^2)^2+4x^2y^2=2^2+a^2-4=a^2$

$\therefore x^2+y^2=a;\ x^2-y^2=2;\ 2x^2=a+2;\ x^2=\frac{a+2}{2}\ \therefore x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{a+2});\ 2y^2=a-2$

$\therefore y=\pm\frac{\sqrt{a-2}}{\sqrt{2}}\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল$=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\{\sqrt{a+2}+i\sqrt{a-2}\}$ $[x^2+y^2\neq -a$ হবে না কারণ বর্গরাশি $+ve]$

21. মান নির্ণয় কর: $\sqrt[3]{i}+\sqrt[3]{-i}$ [RUET'05-06]

সমাধান: ধরি, $x^3=i$

$\Rightarrow x^3+i^3=0\Rightarrow(x+i)(x^2-ix+i^2)=0$

$\therefore x=-i,\frac{i\pm\sqrt{3}}{2}$

আবার, $x_1^3=-i\Rightarrow x_1^3-i^3=0$

$(x_1-i)(x_1^2+ix_1+1)=0$

$\therefore x_1=i,\frac{-i\pm\sqrt{3}}{2}\ \therefore\sqrt[3]{i}+\sqrt[3]{-i}=0$ (Ans.)

বিকল্প: $x=\sqrt[3]{i}+\sqrt[3]{-i}$

$x^3=\left(\sqrt[3]{i}\right)^3+\left(\sqrt[3]{-i}\right)^3+3\sqrt[3]{i}.\sqrt[3]{-i}\left(\sqrt[3]{i}+\sqrt[3]{-i}\right)=i-i+3\sqrt[3]{-i^2}.x$

$x^3=3.1.x\Rightarrow x^3=3x\ \therefore x=0,\pm\sqrt{3}$

22. $\sqrt[6]{-64}$ এর মান নির্ণয় কর। [KUET'03-04]

সমাধান: Let, $\sqrt[6]{-64}=x\Rightarrow -64=x^6\Rightarrow(\pm 8i)^2=(x^3)^2\Rightarrow\pm 8i=x^3\Rightarrow x^3\pm(2i)^3=0$

$\Rightarrow(x\pm 2i)(x^2\mp 2ix-4)=0\therefore x\pm 2i=0$ অথবা, $x^2\mp 2ix-4=0$

$\Rightarrow x^2\mp 2ix+i^2-3=0\Rightarrow(x\mp i)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=0\Rightarrow\left(x\mp i+\sqrt{3}\right)\left(x\pm i-\sqrt{3}\right)=0$

$\therefore x=\pm i-\sqrt{3},x=\pm i+\sqrt{3}\ \therefore x=\pm 2i;\pm i\pm\sqrt{3}$ (Ans.)

বিকল্প:

$x=\sqrt[6]{-64},\ x^6=-64\ ,(x^2)^3=(-4)^3$

$\left(\frac{x^2}{-4}\right)^3=1,\frac{x^2}{-4}=1,\omega,\omega^2$

$x^2=-4,-4\omega,-4\omega^2$

$x=\pm\sqrt{-4},\pm\sqrt{-4}.\sqrt{\omega},\pm\sqrt{-4}\sqrt{\omega^2}$

$=\pm 2i,\pm 2i\sqrt{\omega},\pm 2\omega i$

Question Type-05: i এর ঘাতের মান নির্ণয় এবং ধারা সংক্রান্ত

Formula & Concept:

- $i^{4n+1}=i^1=i,\ i^{4n+2}=i^2=-1,\ i^{4n+3}=i^3=-i,\ i^{4n}=i^4=1$
- a, b, c, d চারটি ক্রমিক পূর্ণ সংখ্যা হলে, $i^a+i^b+i^c+i^d=0$
- a ও b দুইটি ক্রমিক বিজোড় সংখ্যা হলে, $i^a+i^b=0$
- a ও b দুইটি ক্রমিক জোড় সংখ্যা হলে, $i^a+i^b=0$

MCQ

01. If $i^2=-1$, then $i+i^2+i^3+\cdots+i^{25}=?$ [IUT'19-20]

(a) i (b) $-i$ (c) 1 (d) -1

Solution: (a); $i+i^2+i^3+\cdots+i^{25}$ total no. of terms $=25=24+1$

$\therefore$ sum of 24 terms will be 0 and only 1 term will remain.

$\therefore i+\underbrace{i^2+i^3+\ldots+i^{25}}_{=0}=i+0=i$

02. যদি $a = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ হয়, তবে a^6 এর মান হবে- [BUET'11-12]

(a) -1 (b) i (c) 1 (d) $-i$

সমাধান: (d); $a = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \Rightarrow a^2 = \frac{1+i^2+2i}{2} \therefore a^2 = i; a^6 = (a^2)^3 = i^3 = -i$

বিকল্প: $a = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} = e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)} \therefore a^6 = \left(e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right)^6 = e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = \cos\frac{3\pi}{3} + i\sin\frac{3\pi}{3} = -i$

03. i^{4n+3} এর মান হবে- [CUET'10-11]

(a) i (b) $-i$ (c) -1 (d) None of these

সমাধান: (b); $i^{4n+3} = i^{4n}.i^3 = -i$

Question Type-06: ω এর ঘাতের মান নির্ণয় এবং ω এর ধারা সংক্রান্ত

➲ **Formula & Concept:**

♦ $\omega^{3n+1} = \omega^{3n}.\omega^1 = (\omega^3)^n.\omega^1 = 1^n.\omega = \omega$

♦ $\omega^{3n+2} = \omega^{3n}.\omega^2 = 1.\omega^2 = \omega^2$

♦ $\omega^{3n} = (\omega^3)^n = 1^n = 1$

$\therefore$ ω এর ঘাতকে 3 দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ থাকলে ω এর ঘাতের মান = $\omega^{\text{ভাগশেষ}}$

That is, $\omega^p = \omega^q$ [when, q is the remainder obtained after dividing p by 3]

আবার, $1 + \omega + \omega^2 = 0$

সুতরাং, $\omega^5 + \omega^6 + \omega^7 = \omega^2 + 1 + \omega = 0$

এভাবে ω এর তিনটি ক্রমিক ঘাতের যোগফল = 0 বা, a, b, c তিনটি ক্রমিক সংখ্যা হলে, $\omega^a + \omega^b + \omega^c = 0$

MCQ

01. $1 + \omega^{19999} + \omega^{15557} = ?$ [BUTEX'16-17]

(a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) 2

সমাধান: (a); $1 + \omega^{19999} + \omega^{15557} = 1 + \omega + \omega^2 = 0$

Question Type-07: শর্তাধীনে মান নির্ণয় ও প্রমাণ সংক্রান্ত

➲ **Formula & Concept:** এক্ষেত্রে জটিল সংখ্যার ধর্মগুলো ব্যবহার করতে হবে।

♦ জটিল সংখ্যার ধর্ম:

➢ $x + iy = 0$ হলে, $x = 0, y = 0$

➢ দুইটি জটিল সংখ্যা $x_1 + iy_1$ ও $x_2 + iy_2$ সমান হবে যদি ও কেবল যদি $x_1 = x_2$ ও $y_1 = y_2$ হয়।

➢ দুইটি অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা $x + iy$ ও $x - iy$ এর সমষ্টি এবং গুণফল বাস্তব সংখ্যা।

➢ অনুবন্ধী নয় এরূপ দুইটি জটিল সংখ্যা $x_1 + iy_1$ ও $x_2 + iy_2$ (($y_1 \neq -y_2$) এর সমষ্টি, বিয়োগফল, গুণফল এবং ভাগফল প্রত্যেকটিই জটিল সংখ্যা হবে।

➢ $z = x + iy$ জটিল সংখ্যা এবং n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হলে z^n জটিল সংখ্যা হবে।

♦ অনুবন্ধী জটিল সংখ্যার কিছু ধর্ম:

➢ $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\bar{z}_2$

➢ $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

➢ $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$

➢ $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

➢ $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$

MCQ

01. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, i^2 = -1$ এবং $\frac{1-ix}{1+ix} = \alpha - i\beta$ হলে x এর মান কত? **[CKRUET'20-21]**

(a) $\frac{\alpha}{(1+\beta)}$ (b) $\frac{1}{(1+\alpha)}$ (c) $\frac{1}{(1+\beta)}$ (d) $\frac{\beta}{(1+\alpha)}$ (e) None of them

সমাধান: (d); $\frac{1-ix}{1+ix} \times \frac{1-ix}{1-ix} = \frac{1-x^2-2ix}{1+x^2} = \frac{1-x^2}{1+x^2} - i\frac{2x}{1+x^2} = \alpha - i\beta$

$\beta = \frac{2x}{1+x^2}; \alpha = \frac{1-x^2}{1+x^2} \Rightarrow \alpha + 1 = \frac{1-x^2+1+x^2}{1+x^2} \Rightarrow \alpha + 1 = \frac{2}{1+x^2} \therefore \frac{\alpha+1}{\beta} = \frac{\frac{2}{1+x^2}}{\frac{2x}{1+x^2}} = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{\beta}{\alpha+1}$

02. If $x = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$ and $y = \frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$, the value of $(1-x-y+xy)$ is- **[RUET'12-13]**

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

Solution: (d); $x = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3}) = \omega; y = \frac{1}{2}(-1-\sqrt{3}) = \omega^2$

$1-x-y+xy = 1-\omega-\omega^2+\omega.\omega^2 = 1-\omega-\omega^2+\omega^3 = 1-(\omega+\omega^2)+1[\omega^3 = 1]$

$= 1-(-1)+1[\because 1+\omega+\omega^2 = 0] = 1+1+1 = 3$

03. The value of $\sqrt{-\frac{1}{2}+\sqrt{-\frac{1}{2}+\sqrt{-\frac{1}{2}+\ldots\ldots\ldots\infty}}}$ is- **[IUT'11-12]**

(a) $\frac{1\pm i}{2}$ (b) $\pm(1+i)$ (c) $\pm(1-i)$ (d) $\pm(\frac{1}{2}+i)$

Solution: (a); $x = \sqrt{-\frac{1}{2}+\sqrt{-\frac{1}{2}+\sqrt{-\frac{1}{2}+\ldots\ldots\ldots}}} \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{2}+x \Rightarrow x^2-x+\frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{1\pm i}{2}$

Written

04. যদি $z = \cos\theta + i\sin\theta$, দেখাও যে, $\frac{2}{1+z} = 1 - i\tan\frac{\theta}{2}$। **[RUET'19-20]**

সমাধান: $z = \cos\theta + i\sin\theta$

$\frac{2}{1+z} = \frac{2}{1+\cos\theta+i\sin\theta} = \frac{2}{(1+\cos\theta)+i\sin\theta} \times \frac{(1+\cos\theta)-i\sin\theta}{(1+\cos\theta)-i\sin\theta}$

$= \frac{2(1+\cos\theta)-2i\sin\theta}{(1+\cos\theta)^2-(i\sin\theta)^2} = \frac{2(1+\cos\theta)-2i\sin\theta}{1+2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta} = \frac{2(1+\cos\theta)-2i\sin\theta}{1+2\cos\theta+1}$

$= \frac{2(1+\cos\theta)}{2(1+\cos\theta)} - \frac{2i\sin\theta}{2(1+\cos\theta)} = 1 - \frac{i\times 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}} = 1 - i\tan\frac{\theta}{2}$

05. $\sqrt{-3+\sqrt{-3+\sqrt{-3+\cdots\infty}}}$ এর মান নির্ণয় কর। **[RUET'11-12, BUTEX'19-20]**

সমাধান: ধরি, $x = \sqrt{-3+\sqrt{-3+\sqrt{-3+\cdots\infty}}} \Rightarrow x = \sqrt{-3+x} \Rightarrow x^2-x+3 = 0$

$\therefore x = \frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times3\times1}}{2\times1} = \frac{1\pm\sqrt{11}i}{2}$ (Ans.)

06. যদি $\sqrt[3]{a-ib} = x-iy$ হয়, তবে দেখাও যে, $\sqrt[3]{a+ib} = x+iy$ **[CUET'07-08, RUET'17-18]**

সমাধান: দেওয়া আছে, $\sqrt[3]{a-ib} = x-iy \Rightarrow a-ib = x^3+3x^2(-iy)+3x(-iy)^2+(-iy)^3$

$\Rightarrow a-ib = x^3-i3x^2y-3xy^2+iy^3 \therefore a = x^3-3xy^2; b = 3x^2y-y^3$

[বাস্তব ও কাল্পনিক অংশের সহগ সমীকৃত করে]

$\therefore$ L.H.S $= \sqrt[3]{a+ib} = \sqrt[3]{x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3)} = \sqrt[3]{x^3+3x(iy)^2+3x^2(iy)+(iy)^3}$

$= \sqrt[3]{(x+iy)^3} = x+iy =$ R.H.S [Proved]

07. $r(l-r) = 1$ এর জটিল মূলদ্বয় z_1 ও z_2 হলে প্রমাণ কর যে, $z_1^3 + z_2^3 = -2$. [RUET'04-05,12-13]

সমাধান: দেওয়া আছে, $r(l-r) = 1$

$\Rightarrow r^2 - r + 1 = 0$ এবং মূলদ্বয় z_1, z_2

$z_1 \times z_2 = 1$ ……… (i)

$z_1 + z_2 = 1$ ……… (ii)

এখন, $(i)^3 \Rightarrow (z_1 + z_2)^3 = (1)^3$

$\Rightarrow z_1^3 + z_2^3 + 3z_1z_2(z_1 + z_2) = 1 \Rightarrow z_1^3 + z_2^3 + 3 = 1$

$\Rightarrow z_1^3 + z_2^3 = 1 - 3 \;\therefore z_1^3 + z_2^3 = -2$ (Ans)

08. $\sqrt[3]{a+ib} = x + iy$ হলে প্রমাণ কর যে, $4(x^2 - y^2) = \frac{a}{x} + \frac{b}{y}$.

[BUTEX'05-06, KUET'03-04, RUET'05-06, 08-09, BUET'05-06, 11-12]

সমাধান: দেওয়া আছে, $\sqrt[3]{a+ib} = x + iy \Rightarrow a + ib = (x+iy)^3 = x^3 - iy^3 + 3ix^2y - 3xy^2$

$\therefore a = x^3 - 3xy^2 \;\&\; b = 3x^2y - y^3; \frac{a}{x} = x^2 - 3y^2; \frac{b}{y} = 3x^2 - y^2$

$\therefore \frac{a}{x} + \frac{b}{y} = x^2 - 3y^2 + 3x^2 - y^2 = 4(x^2 - y^2) \;\therefore 4(x^2 - y^2) = \frac{a}{x} + \frac{b}{y}$ (Proved)

09. যদি $\sqrt[3]{a+ib} = x + iy$ হয় তবে দেখাও যে, $\sqrt[3]{a-ib} = x - iy$

[BUET'03-04, RUET'03-04, 07-08, BUTEX'03-04, 09-10]

সমাধান: দেওয়া আছে, $\sqrt[3]{a+ib} = x + iy \Rightarrow a + ib = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$

$\therefore a = x^3 - 3xy^2;\; b = 3x^2y - y^3$

$\therefore a - ib = x^3 - 3xy^2 - 3ix^2y + iy^3 \Rightarrow a - ib = x^3 - 3x^2iy + 3x(iy)^2 - (iy)^3$

$\Rightarrow a - ib = (x - iy)^3 \;\therefore \sqrt[3]{(a - ib)} = x - iy$ (Showed)

10. $x = 2 - i$ হলে $x^3 - 3x^2 + x + 10$ এর মান নির্ণয় কর। [BUTEX'06-07]

সমাধান: $x = 2 - i \Rightarrow (x-2)^2 = (-i)^2 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = -1 \Rightarrow x^2 - 4x + 5 = 0$

$x^3 - 3x^2 + x + 10 = x^3 - 4x^2 + 5x + x^2 - 4x + 5 + 5 = x(x^2 - 4x + 5) + 1(x^2 - 4x + 5) + 5 = 5$

11. যদি $x_1 : x_2 = (a+ib) : (c+id)$ হয় তবে প্রমাণ কর যে, $(c^2 + d^2)x_1^2 - 2(ac + bd)x_1x_2 + (a^2 + b^2)x_2^2 = 0$.

সমাধান: $\frac{x_1}{x_2} = \frac{a+ib}{c+id} \Rightarrow cx_1 + idx_1 = ax_2 + ibx_2$ [BUET'04-05]

$\Rightarrow (cx_1 - ax_2)^2 = (bx_2 - dx_1)^2 i^2 \Rightarrow c^2x_1^2 - 2ac\,x_1x_2 + a^2x_2^2 = -(b^2x_2^2 - 2bd\,x_1x_2 + d^2x_1^2)$

$\Rightarrow (c^2 + d^2)x_1^2 - 2(ac + bd)x_1x_2 + (a^2 - b^2)x_2^2 = 0$ (Proved)

12. মান নির্ণয় করঃ $\sqrt{i + \sqrt{i + \sqrt{i + \ldots\ldots}}}$ [RUET'03-04]

সমাধান: ধরি, $x = \sqrt{i + \sqrt{i + \sqrt{i + \ldots\ldots}}} \Rightarrow x^2 = i + \sqrt{i + \sqrt{i + \ldots\ldots\infty}}$

$\Rightarrow x^2 = i + x \Rightarrow x^2 - x - i = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4i}}{2}$ (Ans.)

13. $x = -1 + i\sqrt{2}$ হলে $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 9$ এর মান নির্ণয় কর। [BUTEX'03-04]

সমাধান: $x = -1 + i\sqrt{2} \Rightarrow x + 1 = i\sqrt{2} \Rightarrow (x+1)^2 = -2 \Rightarrow x^2 + 2x + 3 = 0$

$\therefore x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 9 = x^2(x^2 + 2x + 3) + 2x(x^2 + 2x + 3) - (x^2 + 2x + 3) + 12 = 12$ (Ans.)

14. যদি $x = 2 + \sqrt{-3}$ হয়, তবে $3x^4 - 17x^3 + 41x^2 - 35x + 5$ এর মান নির্ণয় কর। [BUET'01-02]

সমাধান: $x = 2 + i\sqrt{3} \Rightarrow (x-2) = i\sqrt{3} \Rightarrow (x-2)^2 = i^2(3) \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = -3 \Rightarrow x^2 - 4x + 7 = 0$

এখন, $3x^4 - 17x^3 + 41x^2 - 35x + 5 = (3x^4 - 12x^3 + 21x^2) - 5x^3 + 20x^2 - 35x + 5$

$= 3x^2(x^2 - 4x + 7) - 5x^3 + 20x^2 - 35x + 5 = 3x^2 \times 0 - 5x(x^2 - 4x + 7) + 5 = 5$ (Ans.)

Question Type-08: এককের ঘনমূল সংক্রান্ত

Formula & Concept:

➤ $\sqrt[3]{1} = 1, \omega, \omega^2$ যেখানে, $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \omega^2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

➤ $1 + \omega + \omega^2 = 0; \omega^3 = 1$

MCQ

01. এককের একটি কাল্পনিক ঘনমূল ω হলে, $(1-\omega+\omega^2)^2 + (1+\omega-\omega^2)^2$ এর মান কত? **[BUTEX'15-16]**

(a) -4 (b) -8 (c) 16 (d) 4

সমাধান: (a); $(1-\omega+\omega^2)^2 + (1+\omega-\omega^2)^2 = (-2\omega)^2 + (-2\omega^2)^2$

$= 4\omega^2 + 4\omega^4 = 4(\omega^2+\omega^4) = 4(\omega^2+\omega) = 4(-1) = -4$

02. যদি $x = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$ এবং $y = \frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$ হয় তবে $(1-x-y+xy)$ এর মান হবে- **[BUET'12-13]**

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

সমাধান: (d); $x = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3}) = \omega$; $y = \frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3}) = \omega^2$

$1-x-y+xy = 1-\omega-\omega^2+\omega.\omega^2$

$= 1-\omega-\omega^2+\omega^3 = 1-(\omega+\omega^2)+1[\omega^3=1]$

$= 1-(-1)+1[\because 1+\omega+\omega^2=0] = 1+1+1 = 3$

03. যদি $a = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$ এবং $b = \frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$ হয়, তবে $a^4+a^2b^2+b^4$ এর মান কোনটি হয়? **[CUET'11-12]**

(a) $-a+b+1=0$ (b) $a+b+1=0$ (c) $a-b+1=0$ (d) None

সমাধান: (b); এখানে, $a = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3}) = \omega$ এবং $b = \frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3}) = \omega^2$

$a^4+a^2b^2+b^4 = \omega^4+\omega^2.\omega^4+\omega^8 = \omega^3.\omega+(\omega^3)^2+(\omega^3)^2.\omega^2$

$= \omega+1+\omega^2[\because \omega^3=1]$; $a+b+1=0\ [\because 1+\omega+\omega^2=0]$

Written

04. $4^{\omega+3} = 8^{\omega-1}$ হলে ω কত? **[RUET'17-18]**

সমাধান: $4^{\omega+3} = 8^{\omega-1} \Rightarrow 2^{2\omega+6} = 2^{3\omega-3} \Rightarrow 2\omega+6 = 3\omega-3 \Rightarrow \omega = 9$ (Ans.)

05. এককের ঘনমূল কত? **[BUTEX'09-10]**

সমাধান: $1, \omega, \omega^2$

Question Type-09: জটিল সংখ্যার জ্যামিতিক প্রয়োগ সংক্রান্ত

Formula & Concept:

◆ কোন জটিল সংখ্যা $z = x + iy$ এর জন্য,

➤ $|z+a| = |z+b|$ সরলরেখা নির্দেশ করে।

➤ $|z+a| = k$ বৃত্ত নির্দেশ করে।

➤ $|az+k_1| = |bz+k_2|$ বৃত্ত নির্দেশ করে।

➤ $\left|\frac{z+a}{z+b}\right| = k$; $k=1$ হলে সরলরেখা নির্দেশ করে। $k \neq 1$ হলে বৃত্ত নির্দেশ করে এবং $|z+a| = |z+b|$ (বৃত্ত)

➤ $z\bar{z} = 0$ বিন্দু বৃত্ত নির্দেশ করে।

➤ $|z-a|+|z-b| = k$; $|a-b| < k$ হলে উপবৃত্ত নির্দেশ করে।

➤ $||z-a|-|z-b|| = k$; $|a-b| > k$ হলে অধিবৃত্ত নির্দেশ করে। [যেখানে, a, b, k বাস্তব ধ্রুব সংখ্যা]

MCQ

01. If real part $\left(\frac{2z+1}{z+3i}\right) = 2$ when $z = x + iy$, then locus of z is- **[IUT'20-21]**

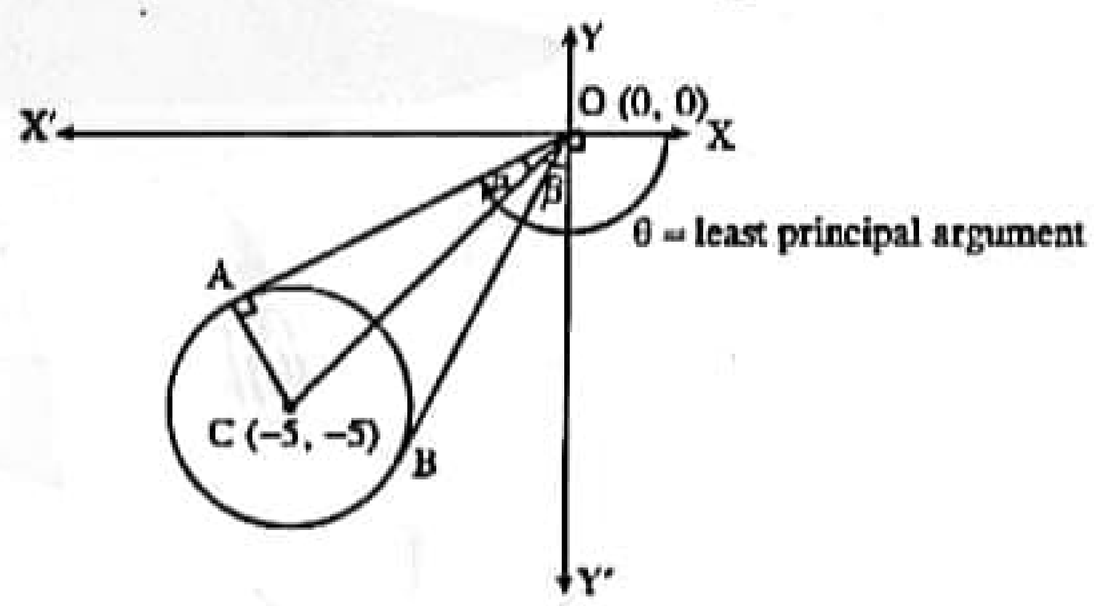
(a) Circle whose diameter is 4
(b) Straight line whose slope is -1
(c) Circle whose radius is 1
(d) Straight line whose slope is $\frac{1}{6}$

Solution:(d); Here, $z = x + iy$ so, $\frac{2z+1}{z+3i} = \frac{2x+2iy+1}{x+(y+3)i} = \frac{\{(2x+1)+i2y\}\{x-(y+3)i\}}{x^2+(y+3)^2}$
$= \frac{x(2x+1)+2y(y+3)+i\{2xy-(2x+1)(y+3)\}}{x^2+(y+3)^2}$; Real part, $\left(\frac{2z+1}{z+3i}\right) = \frac{x(2x+1)+2y(y+3)}{x^2+(y+3)^2} = 2$
$\Rightarrow 2x^2 + x + 2y^2 + 6y = 2x^2 + 2y^2 + 12y + 18 \Rightarrow x - 6y = 18$
Which represents a straight line with slope $= -\frac{1}{-6} = \frac{1}{6}$ (Ans).

02. If a complex number z satisfies $|2z + 10 + 10i| \leq 5\sqrt{3} - 5$, then the least principal argument of z is-

(a) $-\frac{5\pi}{6}$ (b) $-\frac{11\pi}{12}$ (c) $-\frac{3\pi}{4}$ (d) $-\frac{2\pi}{3}$ **[IUT'20-21]**

Solution: (a); $|2z + 10 + 10i| \leq 5\sqrt{3} - 5 \Rightarrow |z + 5 + 5i| \leq \frac{5\sqrt{3}-5}{2} \Rightarrow |x + iy + 5 + 5i| \leq \frac{5\sqrt{3}-5}{2}$
$\Rightarrow |(x + 5) + i(y + 5)| \leq \frac{5\sqrt{3}-5}{2}$
$\Rightarrow \sqrt{(x + 5)^2 + (y + 5)^2} \leq \frac{5\sqrt{3}-5}{2}$
$\therefore (x + 5)^2 + (y + 5)^2 \leq \left(\frac{5\sqrt{3}-5}{2}\right)^2$ ………… (i)



(i) indicates the inner side (including the perimeter) of a circle with center at $C(-5, -5)$ and radius, $r = \frac{5\sqrt{3}-5}{2}$.
Here, $OC = \sqrt{(0 + 5)^2 + (0 + 5)^2} = 5\sqrt{2}$ units and $AC = r = \frac{5\sqrt{3}-5}{2}$
Again, $\beta = \tan^{-1}\left|\frac{-5}{-5}\right| = \frac{\pi}{4}$ and $\alpha = \sin^{-1}\frac{AC}{OC} = \sin^{-1}\left(\frac{\frac{5\sqrt{3}-5}{2}}{5\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{12}$
Now, least principal argument, $\angle XOA = -\left[\frac{\pi}{2} + \alpha + \beta\right] = -\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4}\right] = -\frac{5\pi}{6}$ **(Ans.)**

03. $|x - 1 + iy| + |x + 1 + iy| = 4$ দ্বারা প্রকাশ করা যায় একটি বক্র রেখা- **[RUET'13-14]**

(a) $x^2 + y^2 = 7$ (b) $y^2 = 4x$ (c) $y^2 = x^2 + 1$ (d) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ (e) None

সমাধান: (d) ; $|x - 1 + iy| + |x + 1 + iy| = 4 \Rightarrow \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} + \sqrt{(x + 1)^2 + y^2} = 4.$
$\Rightarrow (x - 1)^2 + y^2 = 16 - 8\sqrt{(x + 1)^2 + y^2} + (x + 1)^2 + y^2 \Rightarrow 8\sqrt{(x + 1)^2 + y^2} = 16 + [(x + 1)^2 - (x - 1)^2]$
$= 16 + 4x = 4(4 + x) \Rightarrow 4(x + 1)^2 + 4y^2 = (x + 4)^2$
$\Rightarrow 4x^2 + 8x + 4 + 4y^2 = x^2 + 8x + 16 \Rightarrow 3x^2 + 4y^2 = 12 \therefore \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$

04. $|x + iy| = 5$ কীসের সমীকরণ? **[RUET'11-12]**

(a) সরলরেখা (b) অধিবৃত্ত (c) পরাবৃত্ত (d) বৃত্ত (e) উপবৃত্ত

সমাধান: (d); $|x + iy| = 5 \therefore \sqrt{x^2 + y^2} = 5 \therefore x^2 + y^2 = 5^2$; বৃত্তের সমীকরণ।

Written

05. $\frac{z+i}{z+2}$ বিন্দুর সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর, যখন এটি সম্পূর্ণ কাল্পনিক। **[BUET'19-20]**

সমাধান: $\frac{z+i}{z+2} = \frac{x+iy+i}{x+iy+2} = \frac{x+i(y+1)}{(x+2)+iy} = \frac{x(x+2-iy)+iy(x+2-iy)+i(x+2-iy)}{(x+2+iy)(x+2-iy)}$
$= \frac{x^2+2x-ixy+ixy+2iy+y^2+ix+2i+y}{(x+2)^2+y^2} = \frac{x^2+2x+y^2+y+i(2y+x+2)}{(x+2)^2+y^2}$
সম্পূর্ণ কাল্পনিক হলে, $\frac{x^2+y^2+2x+y}{(x+2)^2+y^2} = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x + y = 0$
$\therefore$ এটা নির্ণেয় সঞ্চারপথের সমীকরণ, যা একটি বৃত্ত নির্দেশ করে।