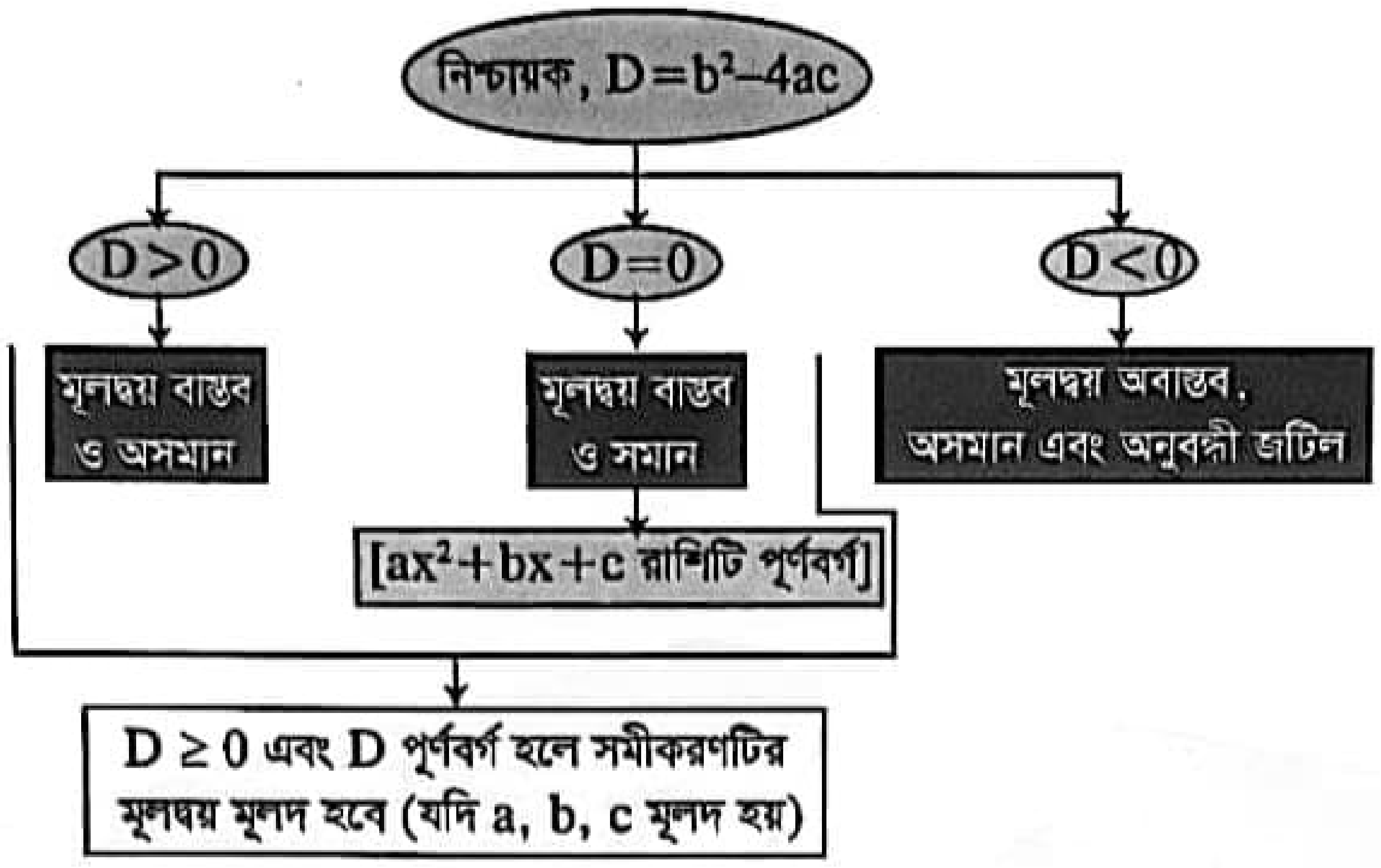
Question Type-01: নিশ্চায়ক (D) সংক্রান্ত সমস্যা

Formula & Concept:

$ax^2 + bx + c = 0$ এর নিশ্চায়ক $\boxed{D = b^2 - 4ac}$



MCQ

01. The equation $\tan^4 x - 2\sec^2 x + a = 0$ will have at least one solution if- [IUT'20-21]

(a) $1 < a \leq 4$ (b) $a \geq 2$ (c) $a \leq 3$ (d) None of these

Solution: (c); $\tan^4 x - 2(1 + \tan^2 x) + a = 0 \Rightarrow \tan^4 x - 2\tan^2 x - 2 + a = 0$

$D = (-2)^2 - 4.1(a-2) \geq 0 \Rightarrow 4 - 4(a-2) \geq 0 \Rightarrow 1 - a + 2 \geq 0 \therefore a \leq 3$

02. For what values of a, roots of $ax^2 + 3x + 4 = 0$ will be complex? [Ans: c] [IUT'17-18]

(a) $a = \frac{9}{16}$ (b) $a < \frac{9}{16}$ (c) $a > \frac{9}{16}$ (d) $a \geq \frac{9}{16}$

03. For what values of k, roots of $(k-1)x^2 - (k+2)x + 4 = 0$ will be real and equal? [Ans: a] [IUT'17-18]

(a) 2, 10 (b) 12,10 (c) 2, 1 (d) None

04. $(k-4)x^2 - 2(k+2)x - 1 = 0$; $(k \neq 0)$ সমীকরণের মূল দুটি সমান হলে, k এর মান হবে- [BUET'13-14]

(a) -5 (b) 5 (c) 0 (d) 2

সমাধান: (a) ; $4(k+2)^2 + 4(k-4) = 0 \Rightarrow k^2 + 4k + 4 + k - 4 = 0 \Rightarrow k^2 + 5k = 0$

$\therefore k = 0, -5.$ কিন্তু $k \neq 0 \therefore k = -5.$

05. $2x^2 + 2x - k = 0$ রাশিটি পূর্ণবর্গ হবে যখন k এর মান- [BUTEX'13-14]

(a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{2}{9}$ (c) $\frac{-2}{3}$ (d) $-\frac{1}{2}$

সমাধান: (d) ; $D = 0 \Rightarrow 4 + 8k = 0 \therefore k = \frac{-1}{2}$

Shortcut : use calculator acc. to options

06. $2x^2 + 6x + 5 = 0$ সমীকরণটির মূলের প্রকৃতি নির্ণয় কর। [CUET'13-14]

(a) জটিল ও অসমান (b) জটিল ও সমান

(c) বাস্তব ও অসমান (d) কোনোটিই নয়

সমাধান: (a); $D = b^2 - 4ac = 36 - 40 = -4$

07. k এর মান কত হলে $(k+1)x^2 + 2(k+3)x + 2k + 3$ রাশিটি একটি পূর্ণ বর্গ হবে? [KUET'09-10, BUET'08-09,12-13]

(a) $3, 2$ (b) $3, -2$ (c) $-3, 2$ (d) $-3, -2$

সমাধান: (b) রাশিটি পূর্ণবর্গ হলে, $(k+1)x^2 + 2(k+3)x + 2k + 3 = 0$ সমীকরণের নিশ্চায়ক শূন্য হবে

$D = [2(k+3)]^2 - 4(k+1)(2k+3) \Rightarrow 0 = 4(k+3)^2 - 4(2k^2 + 2k + 3k + 3)$

$\Rightarrow 0 = 4[(k^2 + 6k + 9) - (2k^2 + 5k + 3)] \Rightarrow 0 = -k^2 + k + 6 \Rightarrow k^2 - k - 6 = 0$

$\Rightarrow (k-3)(k+2) = 0 \therefore k = -2,\ 3$

08. $(4-k)x^2 + 2(k+2)x + 8k + 1 = 0$ এর মূলদ্বয় সমান হবে, যদি- **[RUET'12-13]**

(a) $k = 0$ বা, $k = 4$ (b) $k = 4$ বা, $k = 3$ (c) $k = 3$ (d) $k = 0$ বা, $k = 3$ (e) None

সমাধান: (d); মূলদ্বয় সমান হবে যদি নিশ্চায়ক শূন্য হয়, $4(k+2)^2 - 4(8k+1)(4-k) = 0$

$\Rightarrow k^2 + 4k + 4 - 32k - 4 + 8k^2 + k = 0 \Rightarrow 9k^2 - 27k = 0 \Rightarrow k(k-3) = 0;\ k = 0,\ 3$

09. k -এর মান কত হলে $(3k+1)x^2 + (11+k)x + 9 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় জটিল সংখ্যা হবে? **[BUET'11-12]**

(a) $k > 1$ (b) $k < 85$ (c) $k \geq 85$ (d) $1 < k < 85$

সমাধান: (d); $(3k+1)x^2 + (11+k)x + 9 = 0$

নিশ্চায়ক $= (11+k)^2 - 4(3k+1)9 = 11^2 + 2.11.k + k^2 - 36(3k+1)$

$= 22k + k^2 + 121 - 108k - 36 = k^2 - 86k + 85 = (k-85)(k-1)$

মূলদ্বয় জটিল সংখ্যা হলে, নিশ্চায়ক, $D < 0 \ \therefore (k-85)(k-1) < 0$ বা, $1 < k < 85$

10. $x^4 + a^2x^2 + a^4 = 0$ সমীকরণের মূলগুলো- **[RUET'09-10]**

(a) বাস্তব (b) জটিল

(c) কাল্পনিক (d) কাল্পনিক ও জটিল (e) কোনোটিই নয়

সমাধান: (d); ধরি, $x^2 = y;\ y^2 + a^2y + a^4 = 0 \Rightarrow y^2 + 2a^2y + a^4 - a^2y = 0$

$\Rightarrow (y+a^2)^2 = a^2y \Rightarrow y + a^2 = \pm a\sqrt{y} \Rightarrow x^2 + a^2 = \pm ax \Rightarrow x^2 \pm ax + a^2 = 0$

$d = a^2 - 4a^2 = -3a^2 < 0 \ \therefore$ কাল্পনিক ও জটিল

Written

11. দ্বিঘাত সমীকরণের মূল দুইটি বাস্তব সংখ্যা, মূলদ ও অসমান হলে নিশ্চায়কের প্রকৃতি কী হবে? **[BUTEX'09-10]**

সমাধান: পূর্ণ বর্গসংখ্যা

12. $x^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূল দুটি বাস্তব ও অসমান হলে দেখাও যে, $2x^2 - 4(1+c)x + (b^2 + 2c^2 + 2) = 0$ সমীকরণটির মূল দুটি কাল্পনিক হবে। **[KUET'05-06]**

সমাধান: $D_1 = b^2 - 4c > 0;\ D_2 = 4^2(1+c)^2 - 4(b^2 + 2c^2 + 2).2$

$= 16 + 32c + 16c^2 - 8b^2 - 16c^2 - 16 = 32c - 8b^2 = -8(b^2 - 4c) < 0 \ [\because b^2 - 4c > 0]$

$\therefore$ ২য় সমীকরণটির মূল দুইটি কাল্পনিক হবে। যেহেতু, নিশ্চায়ক < 0 (দেখানো হলো)

Question Type-02: মূলগুলোর মধ্যে সম্পর্ক সংক্রান্ত

Formula & Concept:

- $ax^2 + bx + c = 0$ এর মূলদ্বয় α, β হলে, [দ্বিঘাত সমীকরণের মূল 2 টি]

  $\sum\alpha = \alpha + \beta = -\frac{b}{a};\ \sum\alpha\beta = \alpha\beta = \frac{c}{a}$

- $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ এর মূলত্রয় α, β, γ হলে [ত্রিঘাত সমীকরণের মূল 3টি]

  $\sum\alpha = \alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$

  $\sum\alpha\beta = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$

  $\sum\alpha\beta\gamma = \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$

♦ $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + c = 0$ এর মূলগুলো $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ হলে [চতুর্ঘাত সমীকরণের মূল 4 টি]

$\sum\alpha = \alpha + \beta + \gamma + \delta = -\frac{b}{a} \rightarrow$ 4 টি থেকে 1 টি করে নিয়ে সকল সমাবেশ (Combination) এর [$^4C_1 = 4$ টি] যোগফল $= -\frac{b}{a}$

$\sum\alpha\beta = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta = \frac{c}{a} \rightarrow$ 4 টি থেকে 2 টি করে নিয়ে সকল সমাবেশের (Combination) [$^4C_2 = 6$টি] যোগফল $= \frac{c}{a}$

$\sum\alpha\beta\gamma = \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta = -\frac{d}{a} \rightarrow$ 4 টি থেকে 3 টি করে নিয়ে সকল সমাবেশ (Combination) এর [$^4C_3 = 4$ টি] যোগফল $= -\frac{d}{a}$

$\sum\alpha\beta\gamma\delta = \alpha\beta\gamma\delta = \frac{c}{a} \rightarrow$ 4 টি থেকে 4 টিই নিয়ে সকল সমাবেশ (Combination) এর [$^4C_4 = 1$ টি] যোগফল $= \frac{c}{a}$

♦ অনুরূপভাবে n ঘাতের একটি বহুপদী সমীকরণের n সংখ্যক মূল থাকে।

$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + \dots\dots\dots + a_n = 0$ এর মূলগুলো $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots\dots\dots \alpha_n$ হলে,

➤ $\sum\alpha_1 = -\frac{a_1}{a_0} = (-1)^1\frac{a_1}{a_0}$ [n টি মূল হতে 1 টি করে নিয়ে যতগুলো সমাবেশ ($^nC_1 = n$ টি) হয় তাদের যোগফল $= (-1)^1\frac{a_1}{a_0}$]

➤ $\sum\alpha_1\alpha_2 = \frac{a_2}{a_0} = (-1)^2\frac{a_2}{a_1}$ [n টি মূল হতে 2 টি করে নিয়ে যতগুলো সমাবেশ $\left(^nC_2 = \frac{n(n-1)}{2}\text{ টি}\right)$ হয় তাদের যোগফল $= (-1)^2\frac{a_2}{a_0}$]

➤ $\sum\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -\frac{a_3}{a_0} = (-1)^3\frac{a_3}{a_0}$ [n টি মূল হতে 3 টি করে নিয়ে যতগুলো সমাবেশ $\left(^nC_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}\text{টি}\right)$ হয় তাদের যোগফল $= (-1)^3\frac{a_3}{a_0}$]

....

....

➤ $\sum\alpha_1\alpha_2\alpha_3\dots\dots\alpha_n = (-1)^n\frac{a_n}{a_0}$ [n টি মূল হতে n টিই নিয়ে যতগুলো সমাবেশ ($^nC_n = 1$ টি) হয় তাদের যোগফল $= (-1)^n\frac{a_n}{a_0}$]

MCQ

01. $x^3 - 7x^2 + 8x + 10 = 0$ সমীকরণের একটি মূল $1 + \sqrt{3}$ হলে অপর মূলগুলি নির্ণয় কর। **[CKRUET'21-22]**

(a) $1 + \sqrt{2}, 5$ (b) $1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{2}$ (c) $1 - \sqrt{3}, 5$ (d) $1 - \sqrt{3}, -5$ (e) $1 - \sqrt{2}, 5$

সমাধান: (c); $x^3 - 7x^2 + 8x + 10 = 0 \dots$ (i)

সমীকরণের একটি মূল $1 + \sqrt{3}$ এবং অপর মূলদ্বয় $1 - \sqrt{3}$

$\therefore a + 1 + \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} = 7 \Rightarrow a + 2 = 7 \Rightarrow a = 5 \therefore$ অপর মূলদ্বয় $1 - \sqrt{3}, 5$

02. If the roots of the equation $(4 - k)x^2 + 26kx + 5 = 0$ are inverse of each other then find the value of k? **[IUT'19-20]**

(a) 1 (b) i (c) -1 (d) $-i$

Solution: (c); If the roots are $\alpha, \frac{1}{\alpha}$ $\therefore \alpha.\frac{1}{\alpha} = \frac{5}{4-k} \Rightarrow 1 = \frac{5}{4-k} \Rightarrow 4 - k = 5 \Rightarrow k = 4 - 5 = -1$

03. 'k' এর মান কত হলে $(k^2 - 3)x^2 + 3kx + (3k + 1) = 0$ সমীকরণটির মূলগুলি পরস্পর উল্টা হবে? **[CUET'10-11, KUET'14-15, 18-19]**

(a) $2, -1$ (b) $3, -1$ (c) $4, -1$ (d) $1, 4$ (e) $1, 3$

সমাধান: (c); $\frac{3k+1}{k^2-3} = 1 \Rightarrow 3k + 1 = k^2 - 3 \Rightarrow k^2 - 3k - 4 = 0; k = 4, -1$

04. $(2-i)$ is a solution of $x^2 - 4x + k = 0$. Find the value of k. [IUT'18-19]
(a) $5+8i$ (b) 8 (c) $8+5i$ (d) 5
Solution: (d); if $(2-i)$ is a sol^n, then $(2+i)$ is also the other sol^n.
$\therefore$ The eq^n will be : $(x-2+i)(x-2-i)=0$
$\Rightarrow x^2-4x+[2^2+1^2]=0 \Rightarrow x^2-4x+5=0 \therefore k=5$

05. যদি $x^2+kx+1=0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অনুপাত $x^2-2x+9=0$ এর মূলদ্বয়ের অনুপাতের সমান হয়, তবে k এর মান কত? [KUET'16-17]
(a) $\pm\frac{2}{5}$ (b) $\pm\frac{1}{5}$ (c) $\pm\frac{3}{5}$ (d) $\pm\frac{2}{7}$ (e) $\pm\frac{2}{3}$
সমাধান: (e); $x^2-2x+9=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে, $x^2+kx+1=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় $m\alpha,\ m\beta$
$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=9,\ m^2\alpha\beta=1 \Rightarrow m=\pm\frac{1}{3} \therefore k=-m(\alpha+\beta)=\pm\frac{2}{3}$

06. Find the condition that one root of the quadratic equation $px^2-qx+p=0$ is 1 more than the other. [IUT'16-17]
(a) $p^2-4q^2=0$ (b) $q^2-5p^2=0$ (c) $q^2-4p^2=0$ (d) $p^2-5q^2=0$
Solution: (b); Let, the roots are $\alpha, \alpha+1 \therefore 2\alpha+1=\frac{q}{p}\ \alpha=\frac{q-p}{2p}$
$\alpha^2+\alpha=1 \Rightarrow \frac{(q-p)^2}{4p^2}+\frac{q-p}{2p}=1 \Rightarrow q^2+p^2-2pq+2pq-6p^2=0 \Rightarrow q^2-5p^2=0$

07. $2x^3+3x^2+6x-65=0$ সমীকরণের একটি মূল $\frac{5}{2}$ হলে, অপর মূলগুলো হলো- [KUET'15-16]
(a) $2\pm3i$ (b) $4\pm3i$ (c) $3\pm2i$ (d) $-2\pm3i$ (e) $-4\pm3i$
Solution: (d); $2x^3+3x^2+6x-65=0$ এর একটি মূল $\frac{5}{2}$ হওয়ায় $(2x-5)$ এর একটি উৎপাদক।
$\therefore 2x^3+3x^2+6x-65=0 \Rightarrow 2x^3-5x^2+8x^2-20x+26x-65=0$
$\Rightarrow x^2(2x-5)+4x(2x-5)+13(2x-5)=0 \Rightarrow (2x-5)(x^2+4x+13)=0$
$\therefore x^2+4x+13=0 \Rightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{16-52}}{2}=-2\pm\frac{\sqrt{-36}}{2}=-2\pm\frac{6i}{2}=-2\pm3i$

08. $(x+\alpha)(x-\beta)+(x-\beta)(x+\gamma)+(x+\gamma)(x+\alpha)=0$ সমীকরণের মূলগুলোর সমষ্টি শূন্য হবে যদি- [RUET'09-10, IUT'10-11]
(a) $\alpha+\beta+\gamma=0$ (b) $\alpha=\beta+\gamma$ (c) $\beta=\alpha+\gamma$ (d) $\gamma=\alpha+\beta$ (e) None
Solution: (c); $x^2+(\alpha-\beta)x-\alpha\beta+x^2+(\gamma-\beta)x-\beta\gamma+x^2+(\alpha+\gamma)+\alpha\gamma=0$
$\Rightarrow 3x^2+(\alpha-\beta+\gamma-\beta+\alpha+\gamma)x-\alpha\beta-\beta\gamma+\alpha\gamma=0 \Rightarrow 3x^2+\{2(\alpha+\gamma)-2\beta\}x-\alpha\beta-\beta\gamma+\alpha\gamma=0$
$a_1+b_1=-\frac{\{2(\alpha+\gamma)-2\beta\}}{3}=0 \Rightarrow \alpha+\gamma=\beta$

Written

09. $x^4+7x^3+8x^2-28x-48=0$ সমীকরণের সকল মূল নির্ণয় কর, যদি দুটি মূলের যোগফল শূন্য হয়। [KUET'19-20]
সমাধান: ধরি, মূলগুলো a, b, c, d
তাহলে, $a+b+c+d=-\frac{7}{1}=-7 \Rightarrow c+d=-7$ ……… (i) | $a+b=0 \Rightarrow a=-b$
আবার, $abc+bcd+cda+abd=-\frac{-28}{1}=28$
$\Rightarrow ab(c+d)+cd(a+b)=28 \Rightarrow -7ab=28\ [a+b=0; c+d=-7]$
$\Rightarrow ab=-4$ ……… (ii)
$\Rightarrow -b^2=-4 \therefore b=\pm2$
$b=2$ হলে $a=-2$; $b=-2$ হলে $a=2$
এবং $abcd=-48$ ……… (iii)
এখন, (iii) ÷ (ii) $\Rightarrow cd=12 \Rightarrow c(-7-c)=12$ [(i) নং থেকে]
$\Rightarrow c^2+7c+12=0 \therefore c=-3,-4$
$c=-3$ হলে $d=-4$; $c=-4$ হলে $d=-3$ $\therefore$ মূলগুলো হল $2,-2,-3,-4$ (Ans.)

10. $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α,β এবং $bx^2+cx+a=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় γ,δ হলে, কোন শর্তে $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ হবে, বের কর। [BUET'18-19]

সমাধান: $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$; $\alpha\beta=\frac{c}{a}$; $\gamma+\delta=-\frac{c}{b}$; $\gamma\delta=\frac{a}{b}$

এখন, $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Rightarrow\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}=\frac{\gamma+\delta}{\gamma-\delta}\Rightarrow\frac{(\alpha+\beta)^2}{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\frac{(\gamma+\delta)^2}{(\gamma+\delta)^2-4\gamma\delta}\Rightarrow\frac{\frac{b^2}{a^2}}{\frac{b^2}{a^2}-\frac{4c}{a}}=\frac{\frac{c^2}{b^2}}{\frac{c^2}{b^2}-\frac{4a}{b}}\Rightarrow\frac{b^2}{b^2-4ca}=\frac{c^2}{c^2-4ab}$

$\Rightarrow b^2c^2-4ab^3=b^2c^2-4c^3a\Rightarrow b^3=c^3\Rightarrow b=c$; ইহাই নির্ণেয় শর্ত।

11. $x^2+px+8=0$ সমীকরণের একটি মূল 4 এবং $x^2+px+n=0$ সমীকরণের মূল দুটি পরস্পর সমান। n এর মান কত? [CUET'13-14]

সমাধান: $x^2+px+8=0$ সমীকরণের মূলগুলি α ও 4 হলে,

$\alpha+4=-p$; $4\alpha=8\therefore\alpha=2$ এবং $p=-6$

এখন, $x^2-6x+n=0$ সমীকরণের মূলগুলি β হলে, $2\beta=6\Rightarrow\beta=3$ এবং $\beta^2=n\Rightarrow n=9$ (Ans.)

12. $ax^2+bx+c=0$ এর একটি মূল অপরটির n গুণ হলে দেখাও যে, $nb^2=ac(1+n)^2$ [CUET' 05-06, RUET'10-11]

সমাধান: ধরি, মূলদ্বয় α এবং $n\alpha\therefore\alpha+n\alpha=-\frac{b}{a}\Rightarrow(n+1)\alpha=-\frac{b}{a}\quad\therefore\alpha=-\frac{b}{(n+1)a}$

আবার, $\alpha.n\alpha=\frac{c}{a}\Rightarrow n\frac{b^2}{(n+1)^2a^2}=\frac{c}{a}\Rightarrow nb^2=\frac{c}{a}\times a^2(n+1)^2\therefore nb^2=ac(1+n)^2$[Showed]

13. নিচের সমীকরণের যে কোন দুটি মূলের যোগফল শূন্য হলে সমীকরণটির অপর দুইটি মূলের মান নির্ণয় কর:

$8x^4-2x^3-27x^2+6x+9=0$ [CUET'09-10]

সমাধান: ধরি, মূলগুলো হল $\alpha,-\alpha,\beta$ ও γ.

তাহলে, $\alpha-\alpha+\beta+\gamma=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ বা, $\beta+\gamma=\frac{1}{4}$

আবার, $-\alpha^2\beta-\alpha^2\gamma+\alpha\beta\gamma-\alpha\beta\gamma=\frac{-6}{8}$ বা, $-\alpha^2(\beta+\gamma)=-\frac{3}{4}$ বা, $\alpha^2\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}\quad\therefore\alpha^2=3$

এবং $-\alpha^2\beta\gamma=\frac{9}{8}$ বা, $-3\beta\gamma=\frac{9}{8}$ বা, $\beta\gamma=-\frac{3}{8}$ তাহলে, $\beta+\gamma=\frac{1}{4}$; $\beta\gamma=-\frac{3}{8}$

এদের দ্বারা গঠিত সমীকরণ,

$x^2-(\beta+\gamma)x+\beta\gamma=0$ বা, $x^2-\frac{1}{4}x-\frac{3}{8}=0$ বা, $8x^2-2x-3=0$ বা, $8x^2-6x+4x-3=0$

বা, $2x(4x-3)+1(4x-3)=0$ বা, $(4x-3)(2x+1)=0\therefore x=\frac{3}{4},-\frac{1}{2}$ (Ans.)

14. $x^2-5x+c=0$ সমীকরণের একটি মূল 4 হলে অপর মূলটি কত হবে? [BUTEX'09-10]

সমাধান: অপর মূল α হলে, $\alpha+4=5\Rightarrow\alpha=1$

15. যদি $px^2+qx+q=0$ সমীকরণের মূলদ্বয়ের অনুপাত m: n হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\sqrt{\frac{m}{n}}+\sqrt{\frac{n}{m}}+\sqrt{\frac{q}{p}}=0$ [RUET'08-09]

সমাধান: $px^2+qx+q=0$; ধরি, মূলদ্বয় $m\alpha$ ও $n\alpha$

$\therefore m\alpha+n\alpha=-\frac{q}{p}\Rightarrow(m+n)=\frac{-q}{p\alpha}$

L. H. S $=\sqrt{\frac{m}{n}}+\sqrt{\frac{n}{m}}+\sqrt{\frac{q}{p}}=\frac{m+n}{\sqrt{mn}}+\sqrt{\frac{q}{p}}$

$=-\frac{q}{p\alpha}\times\sqrt{\frac{p\alpha^2}{q}}+\sqrt{\frac{q}{p}}=-\sqrt{\frac{q}{p}}+\sqrt{\frac{q}{p}}=0=$ R.H.S $\therefore\sqrt{\frac{m}{n}}+\sqrt{\frac{n}{m}}+\sqrt{\frac{p}{q}}=0$ (Showed)

$m\alpha.n\alpha=\frac{q}{p}$

$mn\alpha^2=\frac{q}{p}$

$mn=\frac{q}{p\alpha^2}$

16. $27x^2+6x-(p+2)=0$ এর একটি মূল অপরটির বর্গের সমান হলে p এর মান বের কর। [BUET'03-04, CUET'08-09]

সমাধান: মূলদ্বয় α ও α^2 ধরি,

তাহলে, $\alpha+\alpha^2=-\frac{2}{9}\Rightarrow9\alpha^2+9\alpha+2=0\Rightarrow(3\alpha+1)(3\alpha+2)=0$

$\therefore\alpha=-\frac{1}{3}$ অথবা, $\alpha=\frac{-2}{3}$

আবার, $\alpha.\alpha^2=\frac{-(p+2)}{27}\Rightarrow\alpha^3=\frac{-(p+2)}{27}$

$\alpha=-\frac{1}{3}$ হলে, $\left(\frac{-1}{3}\right)^3=\frac{-(p+2)}{27}\Rightarrow p+2=1\therefore p=-1$

$\alpha=\frac{-2}{3}$ হলে, $\left(\frac{-2}{3}\right)^3=\frac{-(p+2)}{27}\Rightarrow p+2=8\therefore P=6\therefore p=6,-1$ (Ans.)

17. যদি $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূল দুটির অনুপাত 4 : 3 হয় তবে দেখাও যে, $12b^2 = 49ac$. [BUTEX'04-05]

সমাধান: $ax^2 + bx + c = 0$, মূলদ্বয় $4\alpha, 3\alpha$ $\therefore 4\alpha + 3\alpha = -\frac{b}{a} \Rightarrow 7\alpha = -\frac{b}{a} \therefore \alpha = -\frac{b}{7a}$

$\therefore (4\alpha)(3\alpha) = \frac{c}{a} \Rightarrow 12\alpha^2 = \frac{c}{a} \Rightarrow 12\left(-\frac{b}{7a}\right)^2 = \frac{c}{a} \Rightarrow 12b^2 = 49ac$. (Showed)

18. k এর মান কত হলে $(k^2-3)x^2 + 3kx + (3k+1) = 0$ সমীকরণের একটি মূল অপর মূলটির উল্টো হবে? অতঃপর সমীকরণের মূলদ্বয়ের ধর্ম নির্ণয় কর। [BUET'04-05]

সমাধান: ধরি মূলদ্বয় α এবং $\frac{1}{\alpha}$;

$\alpha.\frac{1}{\alpha} = 1 = \frac{3k+1}{k^2-3} \Rightarrow k^2 - 3 = 3k + 1 \Rightarrow k^2 - 3k - 4 = 0 \Rightarrow k = 4, -1$

$k = -1$ হলে সমীকরণটি হবে $-2x^2 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 3x + 2 = 0$ এর নিশ্চায়ক $D = 3^2 - 4.2.2 = -7$ যাহা ঋণাত্মক, সুতরাং মূলদ্বয় জটিল অনুবন্ধী, আবার, $k = 4$ হলে সমীকরণ হবে $13x^2 + 12x + 13 = 0$ এর নিশ্চয়ক $D = 12^2 - 4.13.13 = -532$ যাহা ঋণাত্বক, সুতরাং মূলদ্বয় অনুবন্ধী জটিল।

19. যদি $x^2 - bx + c = 0$ এবং $x^2 - cx + b = 0$ সমীকরণের মূলগুলোর মধ্যে কেবল একটি ধ্রুবকের পার্থক্য থাকে, তবে প্রমাণ কর যে, $b + c + 4 = 0$. [BUTEX'03-04]

সমাধান: $x^2 - bx + c = 0$ এর মূল α ও β এবং $x^2 - cx + b = 0$ এর মূল $\alpha + k = \gamma$ ও $\beta + k = \delta$

$\therefore \alpha + \beta = b; \alpha\beta = c$ এবং $\gamma + \delta = c$ ও $\gamma\delta = b$

তাহলে, $\gamma - \delta = \alpha + k - \beta - k = \alpha - \beta \Rightarrow (\gamma - \delta)^2 = (\alpha - \beta)^2 \Rightarrow (\gamma + \delta)^2 - 4\gamma\delta = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$

$\Rightarrow c^2 - 4b = b^2 - 4c \Rightarrow b^2 - c^2 = 4c - 4b \Rightarrow (b + c)(b - c) = 4(c - b)$

$\Rightarrow b + c = -4$ [$\because b \neq c$ তাই $(b - c)$ দিয়ে ভাগ] $\therefore b + c + 4 = 0$ (Proved)

20. $x^3 + qx + r = 0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ হলে, দেখাও যে, $(\beta - \gamma)^2 = \frac{3r - q\alpha}{\alpha}$. [BUTEX'02-03]

সমাধান: $x^3 + qx + r = 0$ সমীকরণের মূলগুলো α, β, γ হলে,

$\alpha + \beta + \gamma = 0, \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = q, \alpha\beta\gamma = -r$

L.H.S $= (\beta - \gamma)^2 = (\beta + \gamma)^2 - 4\beta\gamma = (\beta + \gamma)(\beta + \gamma) - 4\beta\gamma = (\beta + \gamma)(-\alpha) - 4\beta\gamma = -4\beta\gamma - \alpha\beta - \gamma\alpha$.

$= -3\beta\gamma - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha = \frac{-3\beta\gamma\alpha - \alpha(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)}{\alpha} = \frac{3r - q\alpha}{\alpha} =$ R.H.S. (Proved)

Question Type-03: মান নির্ণয় ও সমীকরণ গঠন

Formula & Concept:

- α, β মূলবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ, $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0 \Rightarrow (x - \alpha)(x - \beta) = 0$
- α, β, γ মূলবিশিষ্ট ত্রিঘাত সমীকরণ, $x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma = 0 \Rightarrow (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) = 0$

MCQ

01. Find the cubic equation whose roots are 2 and $1 + 2i$. [IUT'21-22]
(a) $x^3 - 4x^2 + 9x = 6$ (b) $x^3 + 4x^2 + x = 10$ (c) $x^3 - 4x^2 + x = 10$ (d) $x^3 - 4x^2 + 9x = 10$

Solution: (d); Roots are $2, 1 + 2i, 1 - 2i$; Now, $2 + 1 + 2i + 1 - 2i = 4$

$\Rightarrow 2(1 + 2i) + 2(1 - 2i) + (1 + 2i)(1 - 2i) = 2 + 4i + 2 - 4i + 1 + 2^2 = 9$

$\Rightarrow 2(1 + 2i)(1 - 2i) = 2(1 + 2^2) = 10$

$\therefore x^3 - 4x^2 + 9x - 10 = 0 \therefore x^3 - 4x^2 + 9x = 10$ (Ans)

Alternative: Here, $x = 1 + 2i \Rightarrow x - 1 = 2i \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 4i^2 = -4 \therefore x^2 - 2x + 5 = 0$ which is a quadratic equation having roots $1 + 2i$ and $1 - 2i$

Now, Another root is 2 $\therefore$ Cubic equation, $(x - 2)(x^2 - 2x + 5) = 0$

$\Rightarrow x^3 - 2x^2 + 5x - 2x^2 + 4x - 10 = 0 \therefore x^3 - 4x^2 + 9x = 10$ (Ans)

02. $x^2 + ax + 8 = 0$ এর একটি মূল 4 এবং $x^2 + ax + b = 0$ এর মূলদ্বয় সমান হলে b এর মান কত?
[BUET'09-10, , CUET'11-12, SUST'12-13, IUT'17-18, CKRUET-'20-21]
(a) 4 (b) 8 (c) 9 (d) 12 (e) 32
সমাধান: (c); $x^2 + ax + 8 = 0$ এর একটি মূল 4. $\therefore\ 4^2 + a \times 4 + 8 = 0\ \therefore a = \frac{-24}{4} = -6.$
$\therefore\ x^2 + ax + b = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + b = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় সমান হলে, $(-6)^2 - 4 \times 1 \times b = 0 \therefore b = \frac{36}{4} = 9.$

03. If $1 + \sqrt{2}i$ is a root of quadratic equation, which one is that equation? [IUT'19-20]
(a) $x^2 + 2x - 1 = 0$ (b) $x^2 + 2x + 3 = 0$ (c) $x^2 - 2x - 1 = 0$ (d) $x^2 - 2x + 3 = 0$
Solution: (d); $x = 1 + \sqrt{2}\,i \Rightarrow x - 1 = \sqrt{2}\,i \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = -2;\ \therefore x^2 - 2x + 3 = 0$

04. If three roots of $f(x) = 0$ are $1, -1, 2$ the roots of $f(2x) = 0$ are- [IUT'18-19]
(a) $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1$ (b) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1$ (c) $2, -2, 4$ (d) $0, 1, -2$
Solution: (a); $f(x) = (x-1)(x+1)(x-2)\ \therefore f(2x) = (2x-1)(2x+1)(2x-2)$
$f(2x) = 0;\ (2x-1)(2x+1)(2x-2) = 0\ \therefore x = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1$

05. $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ সমীকরণের a মূলটি $-2 < x < 0$ সীমায় অবস্থান করলে $3a^3 + 2a^2 + 1$ এর মান হল-[CUET'14-15]
(a) –1 (b) 0 (c) 1 (d) None of them
সমাধান: (b); $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0 \therefore x^3 + x^2 - 3x^2 - 3x + 2x + 2 = 0$
$\therefore x^2(x+1) - 3x(x+1) + 2(x+1) = 0 \therefore (x+1)(x-2)(x-1) = 0$
$\therefore x = -1, 2, 1$ [Or use calculator] $\therefore \alpha = -1$ [শর্তমতে] যেহেতু $-2 < -1 < 0$
$\therefore 3\alpha^3 + 2\alpha^2 + 1 = 3 \times (-1)^3 + 2(-1)^2 + 1 = 0$

06. সমীকরণ $\frac{1}{x - \sqrt{3}k} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x + \sqrt{3}k} = 0$ এর সমাধান- [RUET'13-14]
(a) $0, \pm\sqrt{3}k$ (b) $0, \pm\sqrt{-3}k$ (c) $0, \pm k$ (d) $\pm\frac{k}{\sqrt{3}}$ (e) None
সমাধান: (c); এখানে, $x \neq 0$; কারণ x হরে আছে।
$\frac{1}{x - \sqrt{3}k} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x + \sqrt{3}k} = 0 \Rightarrow \frac{2x^2 + x^2 - 3k^2}{x(x^2 - 3k^2)} = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3k^2 = 0 \therefore x^2 - k^2 = 0 \therefore x = \pm k.$

07. যদি $\alpha - \beta = 8$ ও $\alpha^3 - \beta^3 = 152$ হয়, তবে α ও β মূল বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণটি হলো- [KUET'11-12,12-13]
(a) $x^2 - 8x - 12 = 0$ (b) $x^2 - 2x - 15 = 0$
(c) $x^2 + 12x + 15 = 0$ (d) $x^2 + 15x + 2 = 0$ (e) $x^2 + 12x + 8 = 0$
সমাধান: (b); $\alpha - \beta = 8$
$\alpha^3 - \beta^3 = 152 \Rightarrow (\alpha - \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = 152 \Rightarrow 8(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 + 3\alpha\beta) = 152$
$\Rightarrow (\alpha - \beta)^2 + 3\alpha\beta = 19 \Rightarrow 8^2 + 3\alpha\beta = 19 \Rightarrow \alpha\beta = -15$ ....(i) $\Rightarrow \beta = -\frac{15}{\alpha}$ ....(ii)
এখন, $\alpha - \beta = 8 \Rightarrow \alpha + \frac{15}{\alpha} = 8 \Rightarrow \alpha^2 + 15 - 8\alpha = 0 \therefore \alpha = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4.15}}{2.1} = 5,\ 3$
$\therefore \beta = -\frac{15}{5} = -3$ বা, $\beta = -\frac{15}{3} = -5$ $\therefore$ মূলদ্বয় $(5, -3)$ বা $(3, -5)$
$\therefore$ সমীকরণঃ $(x-5)(x+3) = 0$ অথবা, $(x-3)(x+5) = 0$ বা, $x^2 - 2x - 15 = 0$
অথবা, $x^2 + 2x - 15 = 0$
[প্রশ্নে যে দুটি শর্ত আছে উভয় সমীকরণই তা সিদ্ধ করে ফলে দুটি সমীকরণই উত্তর হবে।]

08. Which quadratic equation has a root $(-1 + \sqrt{-5})$? [IUT'11-12]
(a) $x^2 + 2x + 6 = 0$ (b) $x^2 - 2x + 6 = 0$ (c) $x^2 + 2x - 6 = 0$ (d) $x^2 - 2x - 6 = 0$
Solution: (a); The other root is $-1 - \sqrt{-5}$
$\therefore$ The equation is $x^2 - (-1 + \sqrt{-5} - 1 - \sqrt{-5})x + (-1)^2 + 5 = 0\ \therefore x^2 + 2x + 6 = 0$

09. $27x^3 - 63x^2 + 42x - 8 = 0$ সমীকরণের মূলগুলো কোনটি? [KUET'10-11]
(a) $\frac{1}{27}, \frac{-2}{3}, -12$ (b) $\frac{1}{3}, \frac{4}{9}, 2$ (c) $\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 8$ (d) $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}$ (e) $\frac{-1}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{4}{3}$
Solution: (d); Use Calculator.

Written

10. α ও β, $x^2 - bx - b = 0$ এর দুইটি মূল। α^4 ও β^4 মূলদ্বয় বিশিষ্ট সমীকরণটি বের কর। **[RUET'18-19]**

সমাধান: $\alpha + \beta = b$ ও $\alpha\beta = -b$. $\therefore \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = b^2 + 2b$.

$\therefore \alpha^4 + \beta^4 = (\alpha^2+\beta^2)^2 - 2(\alpha\beta)^2 = (b^2+2b)^2 - 2b^2 = b^4 + 4b^3 + 4b^2 - 2b^2$

$\boxed{\alpha^4 + \beta^4 = b^4 + 4b^3 + 2b^2}$

$eq^n: x^2 - (\alpha^4+\beta^4)x + (\alpha\beta)^4 = 0 \Rightarrow \boxed{x^2 - (b^4 + 4b^3 + 2b^2)x + b^4 = 0}$ (Ans.)

11. দুজন ছাত্রকে একটি দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধান করতে বলা হল। একজন ছাত্র সমীকরণের x এর সহগটি ভুল লিখে 2 এবং 6 এই বীজ দুটি পেল। অপর ছাত্র ধ্রুবক পদটি ভুল লিখে 2 এবং −9 এই বীজ দুটি পেল। নির্ভুল সমীকরণের বীজগুলি নির্ণয় কর। **[BUET'16-17]**

সমাধান: 2 ও 6 মূলবিশিষ্ট সমীকরণ: $(x-2)(x-6) = 0$ $\therefore x^2 - 8x + 12 = 0$

যেহেতু, সমীকরণটির x এর সহগ ভুল। $\therefore$ প্রকৃত সমীকরণের x^2 এর সহগ 1 এবং ধ্রুবপদ 12

আবার, $(x-2)(x+9) = 0 \Rightarrow x^2 + 7x - 18 = 0$ $\therefore$ প্রকৃত সমীকরণের x এর সহগ 7 ।

$\therefore$ প্রকৃত সমীকরণ $x^2 + 7x + 12 = 0 \Rightarrow x^2 + 3x + 4x + 12 = 0 \Rightarrow (x+3)(x+4) = 0$ $\therefore x = -3, -4$

12. $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হলে $(a\alpha + b)^{-2} + (a\beta + b)^{-2}$ এর মান নির্ণয় কর। **[RUET'07-08, 15-16]**

সমাধান: $ax^2 + bx + c = 0$ $\therefore \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \Rightarrow a\alpha + a\beta = -b$ এবং $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

এখন, $a\alpha + b = -a\beta$ এবং $a\beta + b = -a\alpha$

$\therefore (a\alpha+b)^{-2} + (a\beta+b)^{-2} \Rightarrow \frac{1}{a^2\beta^2} + \frac{1}{a^2\alpha^2} = \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{a^2(\alpha\beta)^2} = \frac{\frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a}}{a^2 \cdot \frac{c^2}{a^2}} = \frac{b^2 - 2ca}{a^2c^2}$ $\therefore (a\alpha+b)^{-2} + (a\beta+b)^{-2} = \frac{b^2-2ca}{a^2c^2}$

13. যদি $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূল দুইটি α এবং β হয়, তবে $ac(x^2+1) - (b^2 - 2ac)x = 0$ এর মূল দুইটি α, β -এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। **[RUET'12-13]**

সমাধান: $ax^2 + bx + c = 0$ এর মূল α, β $\therefore \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

$\therefore ac(x^2+1) - (b^2 - 2ac)x = 0 \Rightarrow \frac{c}{a}(x^2+1) - \left\{\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 2\frac{c}{a}\right\}x = 0$ [a^2 দিয়ে ভাগ করে।]

$\Rightarrow \alpha\beta x^2 - [\{-(\alpha+\beta)\}^2 - 2\alpha\beta]x + \alpha\beta = 0 \Rightarrow \alpha\beta x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha\beta = 0$

$\Rightarrow \alpha x(\beta x - \alpha) - \beta(\beta x - \alpha) = 0 = (\alpha x - \beta)(\beta x - \alpha) = 0$ $\therefore x = \frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}$ $\therefore$ মূলদ্বয় $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}$

14. যদি $\alpha \pm \sqrt{\beta}$ রাশি দুটি $x^2 + px + q = 0$ সমীকরণের মূল হয় তবে দেখাও যে, $(p^2 - 4q)(p^2x^2 + 4px) - 16q = 0$ সমীকরণের মূল দুটি হবে $\frac{1}{\alpha} \pm \frac{1}{\sqrt{\beta}}$। **[CUET'07-08]**

সমাধান: এখানে, $\alpha + \sqrt{\beta} + \alpha - \sqrt{\beta} = -p$ বা, $\alpha = -\frac{p}{2}$

আবার, $(\alpha + \sqrt{\beta})(\alpha - \sqrt{\beta}) = q$ বা, $\alpha^2 - \beta = q$ বা, $\frac{p^2}{4} - q = \beta$ বা, $\beta = \frac{p^2 - 4q}{4}$

আবার, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\beta}} + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\sqrt{\beta}} = \frac{2}{\alpha} = \frac{2}{-\frac{p}{2}} = \frac{-4}{p}$ এবং $\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\sqrt{\beta}}\right) = \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\frac{p^2}{4}} - \frac{4}{p^2 - 4q}$

$= \frac{4}{p^2} - \frac{4}{p^2 - 4q} = \frac{4(p^2 - 4q - p^2)}{p^2(p^2 - 4q)} = \frac{-16q}{p^2(p^2 - 4q)}$

$\therefore$ এই মূলদ্বয় দ্বারা গঠিত সমীকরণঃ $x^2 - \left(\frac{-4}{p}\right)x - \frac{16q}{p^2(p^2-4q)} = 0$ বা, $(p^2 - 4q)(p^2x^2 + 4px) - 16q = 0$

15. চতুর্থঘাত বিশিষ্ট একটি সমীকরণ গঠন কর যার দুটি মূল যথাক্রমে 2, 3 এবং বাকী দুটি মূল $x^2 + 4x + 5 = 0$ সমীকরণের মূল।

সমাধান: 2 ও 3 মূল বিশিষ্ট সমীকরণ, $x^2 - (2+3)x + 2 \times 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$ **[BUET'02-03]**

$\therefore$ নির্ণেয় চর্তুঘাত সমীকরণটি, $(x^2 - 5x + 6)(x^2 + 4x + 5) = 0$

$\therefore x^4 - x^3 - 9x^2 - x + 30 = 0$

Question Type-04: মূলগুলো সমান্তর বা গুণোত্তর প্রগমনভুক্ত সম্পর্কিত

Formula & Concept:

- কোন ত্রিঘাত সমীকরণের মূলগুলো-
  - ➢ সমান্তর প্রগমনে থাকলে মূলগুলোকে $\alpha - d, \alpha, \alpha + d$ ধরতে হবে। [সাধারণ অন্তর $= d$]
  - ➢ গুণোত্তর প্রগমনে থাকলে $\frac{\alpha}{r}, \alpha, \alpha r$ ধরতে হবে। [সাধারণ অনুপাত $= r$]
- কোন চতুর্ঘাত সমীকরণের মূলগুলো-
  - ➢ সমান্তর প্রগমনে থাকলে $\alpha - 3d, \alpha - d, \alpha + d, \alpha + 3d$ ধরতে হবে। [সাধারণ অন্তর $= 2d$]
  - ➢ গুণোত্তর প্রগমনে থাকলে $\frac{\alpha}{r^3}, \frac{\alpha}{r}, \alpha r, \alpha r^3$ ধরতে হবে। [সাধারণ অনুপাত $= r^2$]

Written

01. 'a' এর বাস্তব মান কত হলে $x^3 + 3ax^2 + x + 1 = 0$ সমীকরণের মূলগুলো সমান্তর প্রগমনে থাকবে? সমীকরণটির মূলগুলোও নির্ণয় কর। **[BUET'14-15]**

সমাধান: $x^3 + 3ax^2 + x + 1 = 0$

ধরি, মূলগুলো: $(\alpha - d), \alpha, (\alpha + d)$ $\therefore 3\alpha = -3a \therefore \alpha = -a \dots\dots\dots$ (i)

আবার, $(\alpha - d)(\alpha).(\alpha + d) = -1 \Rightarrow (\alpha^2 - d^2)\alpha = -1 \Rightarrow \alpha^3 - \alpha d^2 = -1$

আবার, $(\alpha - d).\alpha + \alpha.(\alpha + d) + \alpha^2 - d^2 = 1 \Rightarrow \alpha^2 - \alpha d + \alpha^2 + \alpha d + a^2 - d^2 = 1 \Rightarrow 3\alpha^2 - d^2 = 1$

$\Rightarrow 2\alpha^2 + (\alpha^2 - d^2) = 1 \Rightarrow 2\alpha^2 + \frac{-1}{\alpha} = 1 \Rightarrow 2\alpha^3 - 1 = \alpha \Rightarrow 2\alpha^3 - \alpha - 1 = 0 \therefore \alpha = 1$

(i) নং হতে, $a = -1$ (Ans.)

বিকল্প: মূলগুলো $\alpha - d, \alpha, \alpha + d$

$\alpha - d + \alpha + \alpha + d = -3\alpha$ বসিয়ে, $-a^3 + 3a^3 - a + 1 = 0 \Rightarrow a^3 - a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$

আবার, $\alpha(\alpha + d) + \alpha(\alpha - d) + \alpha^2 - d^2 = 1 \Rightarrow 2\alpha^2 + \alpha^2 - d^2 = 1$

$\Rightarrow d^2 = 3 - 1 = 2 \therefore d = \sqrt{2}$ $\therefore$ মূলগুলো, $1 - \sqrt{2}, 1, 1 + \sqrt{2}$

02. সমাধান করঃ $32x^3 - 48x^2 + 22x - 3 = 0$ মূলগুলো সমান্তর প্রগমনে আছে। **[BUTEX'00-01]**

সমাধান: ধরি, মূলগুলো $a - b, a, a + b \therefore a - b + a + a + b = \frac{48}{32} = \frac{3}{2} \Rightarrow 3a = \frac{3}{2} \therefore a = \frac{1}{2}$ (Ans.)

এবং $a^2 - ab + a^2 + ab + a^2 - b^2 = \frac{22}{32} = \frac{11}{16} \Rightarrow b^2 = 3a^2 - \frac{11}{16} = \frac{3}{4} - \frac{11}{16} \therefore b = \pm\frac{1}{4}$

$\therefore a - b = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \therefore a + b = \frac{3}{4}$ মূলগুলো $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ (Ans.)

Question Type-05: কোনো বহুপদী সমীকরণের একটি মূল 1

Formula & Concept: মনে করি, একটি দ্বিঘাত সমীকরণের একটি মূল 1 এবং অপর মূলটি α

$\therefore$ সমীকরণ, $x^2 - (\alpha + 1)x + \alpha.1 = 0 \Rightarrow x^2 - (\alpha + 1)x + \alpha = 0$

এখন, x^2, x এর সহগ এবং ধ্রুবক পদ যোগ করলে পাই, $1 - (\alpha + 1) + \alpha = (1 + \alpha) - (1 + \alpha) = 0$

[অর্থাৎ, কোন বহুপদীর সকল সহগগুলোর যোগফল 0 হলে তার একটি মূল 1]

MCQ

01. $x^3 - 5x^2 + 17x - 13 = 0$ সমীকরণের একটি মূল 1 হলে, অপর মূল দুইটি কী কী ? **[BUTEX'15-16]**

(a) $2 + 3i, 2 - 3i$ (b) $3 + 2i, 3 - 2i$ (c) $4 + 2i, 4 - 2i$ (d) $2 + 4i, 2 - 4i$

সমাধান: (a); $x^3 - 5x^2 + 17x - 13 = 0 \Rightarrow x^3 - x^2 - 4x^2 + 4x + 13x - 13 = 0$

$\Rightarrow x^2(x - 1) - 4x(x - 1) + 13(x - 1) = 0 \Rightarrow (x - 1)(x^2 - 4x + 13) = 0$

$x = 1, 4 \pm \frac{\sqrt{16 - 4.13}}{2} = 1, \frac{4 \pm 6i}{2} = 1, 2 \pm 3i$

Question Type-06: মূলের প্রতিসম রাশি সংক্রান্ত

Formula & Concept: একাধিক চলকবিশিষ্ট যে সকল রাশির যে কোনো দুটি চলককে পরস্পরের সাথে স্থান বিনিময় করলে রাশিটির কোন পরিবর্তন হয় না। তাদেরকে প্রতিসম রাশি বলা হয়।
যেমন: $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ –এ α এর পরিবর্তে β এবং β এর পরিবর্তে α বসালে $\beta^2+\alpha^2+\gamma^2$. অনুরূপভাবে, β এর পরিবর্তে γ এবং γ এর পরিবর্তে β বসালেও রাশিটি অপরিবর্তিত থাকে।
$\therefore$ এটি একটি প্রতিসম রাশি। এখানে, $x^3+P_1x^2+P_2x^3+P_3=0$ একটি বহুপদী সমীকরণ। এর মূলগুলো α,β,γ [ধরি]
আমরা চাচ্ছি কিছু প্রতিসম রাশির মান নির্ণয় করতে, যেমন-

- $\sum\alpha=\alpha+\beta+\gamma=\alpha^1+\beta^1+\gamma^1=S_1$ [ধরি]
- $\sum\alpha^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=S_2$ [ধরি]
- $\sum\alpha^3=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=S_3$ [ধরি]
- $\sum\alpha^4=\alpha^4+\beta^4+\gamma^4=S_4$ [ধরি]

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায়-
$\boxed{S_3+S_2P_1+S_1P_2+3P_3=0}$; $\boxed{S_4+S_3P_1+S_2P_2+S_1P_3+4P_4=0}$
চতুর্ঘাত সমীকরণ হলে P_4 থাকবে যেমন, [$x^4+P_1x^3+P_2x^2+P_3x+P_4=0$ ... ... এভাবে বের করা যায়]

MCQ

01. The roots of the equation $x^3+px^2+qx+r=0$ are a, b and c. Evaluate $\sum(a+b)^2$. **[IUT'21-22]**
(a) $2(p^2-q)$ (b) $2(p^2-3q^3)$ (c) p^2 (d) $2(p^2+3q^3)$
Solution: (a); $x^3+px^2+qx+r=0$; $a+b+c=-p$; $ab+bc+ca=q$ and $abc=-r$
Now, $\sum(a+b)^2=(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2$
$=2(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)=2\{(a+b+c)^2-2ab-2bc-2ca+ab+bc+ca\}$
$=2\{(a+b+c)^2-(ab+bc+ca)\}=2(p^2-q)$

02. $6x^3-x+13=0$ সমীকরণের মূলগুলি α,β,γ হলে $\sum(\alpha-\beta)^2$ এর মান কত? **[KUET'17-18]**
(a) $\frac{-1}{6}$ (b) $\frac{1}{6}$ (c) 1 (d) -1 (e) $\frac{2}{3}$
সমাধানঃ (c); $\sum(\alpha-\beta)^2=(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2$
$=2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)=2\{(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\}$
$=2\left(0^2-3.\frac{-1}{6}\right)=2.\frac{1}{2}=1$

Written

03. $3x^3-2x^2+1=0$ সমীকরণের মূলগুলি α,β,γ হলে $\Sigma\alpha^2\beta$ এর মান নির্ণয় কর। **[BUTEX'21-22]**
সমাধানঃ $3x^3-2x^2+0.x+1=0$ এর মূলত্রয় α,β,γ $\therefore\alpha+\beta+\gamma=\frac{2}{3}$ ... ... (i)
এবং $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0$ ... ... (ii) আবার, $\alpha\beta\gamma=-\frac{1}{3}$ ... ... (iii)
$\therefore\sum\alpha^2\beta=\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha^2\gamma+\alpha\gamma^2+\beta^2\gamma+\beta\gamma^2=\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha\beta\gamma+\alpha^2\gamma+\alpha\gamma^2+\alpha\beta\gamma+\beta^2\gamma+\beta\gamma^2$
$+\alpha\beta\gamma-3\alpha\beta\gamma=\alpha\beta(\alpha+\beta+\gamma)+\alpha\gamma(\alpha+\beta+\gamma)+\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)-3\alpha\beta\gamma$
$=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)(\alpha+\beta+\gamma)-3\alpha\beta\gamma=0-(3)\left(-\frac{1}{3}\right)=1$ **(Ans.)**

04. যদি $x^3-px^2-qx-r=0$ সমীকরণের মূলগুলি a, b, c হয় তবে $a^3+b^3+c^3$ এর মান নির্ণয় কর। **[BUET'14-15]**
সমাধান: $x^3-px^2-qx-r=0$; $a+b+c=p$; $ab+bc+ca=-q$; $abc=r$
এখন, $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)\{(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)\}+3abc$
$=p\{(p)^2-3(-q)\}+3r=p(p^2+3q)+3r$ (Ans.)

Question Type-07: প্রতিসম মূলবিশিষ্ট সমীকরণ

Formula & Concept: দ্বিঘাত সমীকরণের ক্ষেত্রে যদি α ও β এর অবস্থান পরিবর্তন করলে যদি মূলগুলো একই থাকে, তবে তাদেরকে প্রতিসম মূল বলে।
n ঘাত সমীকরণের ক্ষেত্রে যেকোন 2 টি চলকের অবস্থান বিনিময় করলে যদি মূলগুলো একই থাকে তাহলে তাদের প্রতিসম মূল বলে।

MCQ

01. $3x^2-4x-5=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় হতে 1 কম মূলবিশিষ্ট সমীকরণ কোনটি? [CKRUET'21-22]
(a) $3x^2+2x-6=0$ (b) $2x^2-3x+1=0$ (c) $3x^2-4x+4=0$
(d) $5x^2+x-1=0$ (e) $x^2+3x-1=0$
সমাধান: (a); $3x^2-4x-5=0 \therefore \alpha+\beta=\frac{4}{3}, \alpha\beta=\frac{-5}{3} \therefore \alpha+\beta-2=\frac{4}{3}-2=-\frac{2}{3}$
আবার, $(\alpha-1)\times(\beta-1)=\alpha\beta-\alpha-\beta+1=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=-\frac{5}{3}-\frac{4}{3}+1=-\frac{9}{3}+1=-3+1=-2$
$\therefore x^2+\frac{2}{3}x-2=0 \Rightarrow 3x^2+2x-6=0$; যা নির্ণেয় সমীকরণ।

02. If the roots of the equation $6x^2-5x+1=0$ are a and b; then the equation with roots $\frac{1}{a}$ and $\frac{1}{b}$ is- [IUT'21-22]
(a) $x^2-5x+7=0$ (b) $x^2-4x+3=0$ (c) $x^2-11x+30=0$ (d) $x^2-5x+6=0$
Solution: (d); One root of $6x^2-5x+1=0$ is a $\therefore 6a^2-5a+1=0 \ldots\ldots\ldots\ldots$ (i)
$\therefore$ Now, one root of the new equation m, $x=\frac{1}{a} \Rightarrow a=\frac{1}{x}$
Putting the value of a in ....(i) $\Rightarrow \frac{6}{x^2}-\frac{5}{x}+1=0 \Rightarrow 6-5x+x^2=0 \Rightarrow x^2-5x+6=0$
Shortcut: Putting $\frac{1}{x}$ instead of $x \Rightarrow 6\left(\frac{1}{x}\right)^2-5\left(\frac{1}{x}\right)+1=0 \therefore x^2-5x+6=0$

03. $x^3-px^2+qx-r=0$ সমীকরণের মূলগুলোর বিপরীত মূলগুলো দ্বারা গঠিত সমীকরণ হলো- [KUET'13-14]
(a) $x^3+px^2+qx+r=0$ (b) $x^3+qx^2+rx+p=0$ (c) $rx^3+qx^2+px+1=0$
(d) $rx^3+qx^2+px-1=0$ (e) $rx^3-qx^3+px-1=0$
সমাধান: (e); $x^3-px^3+qx-r=0$ সমীকরণের মূলগুলো α,β,γ হলে, $\alpha+\beta+\gamma=p; \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=q; \alpha\beta\gamma=r$
$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\frac{q}{r}; \frac{1}{\alpha}\times\frac{1}{\beta}\times\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=\frac{1}{r}; \frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha.\beta\gamma}=\frac{p}{r}$
$\therefore$ সমীকরণটি $=x^3-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)x^2+\left(\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}\right)x-\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=0$
$\Rightarrow x^3-\frac{q}{r}x^2+\frac{p}{r}x-\frac{1}{r}=0 \Rightarrow rx^3-qx^2+px-1=0$
$\therefore rx^3-qx^2+px-1=0$ সমীকরণটি উপর্যুক্ত শর্তদ্বয় পূরণ করে।

Written

04. যদি $x^2-px+q=0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হয়, তবে $\frac{q}{p-\alpha}$ ও $\frac{q}{p-\beta}$ মূলবিশিষ্ট সমীকরণটি বের কর।
সমাধান: $x^2-px+q=0$ এর মূলদ্বয় α ও β। নির্ণেয় সমীকরণের মূল x। [BUTEX'16-17, 18-19]
$\therefore x=\frac{q}{p-\alpha} \Rightarrow p-\alpha=\frac{q}{x} \Rightarrow \alpha=p-\frac{q}{x} \therefore \alpha^2-p\alpha+q=0$
$\Rightarrow \left(p-\frac{q}{x}\right)^2-p\left(p-\frac{q}{x}\right)+q=0 \Rightarrow -2pqx+q^2+pqx+qx^2=0$
$\Rightarrow x^2q+pqx-2pqx+q^2=0 \Rightarrow x^2q-pqx+q^2=0 \Rightarrow x^2-px+q=0$

05. $2x^2 + 3x + 5 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α এবং β হলে $\frac{1}{\alpha^3}$ এবং $\frac{1}{\beta^3}$ মূলদ্বয় দ্বারা গঠিত সমীকরণটি নির্ণয় কর।

সমাধান: $\alpha + \beta = -\frac{3}{2}, \alpha\beta = \frac{5}{2}$ [BUET'05-06, RUET'11-12]

$$\frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3} = \frac{(\alpha^3 + \beta^3)}{\alpha^3\beta^3} = \frac{(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)}{(\alpha\beta)^3} = \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^3 - 3 \times \frac{5}{2}\left(\frac{-3}{2}\right)}{\left(\frac{5}{2}\right)^3}$$

$= \frac{-\frac{27}{8}+\frac{45}{4}}{\frac{125}{8}} = \frac{63}{125}$ আবার, $\frac{1}{\alpha^3} \times \frac{1}{\beta^3} = \frac{1}{\left(\frac{5}{2}\right)^3} = \frac{8}{125}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণঃ $x^2 - \frac{63}{125}x + \frac{8}{125} = 0 \Rightarrow 125x^2 - 63x + 8 = 0$ (Ans.)

06. যদি $x^2 + 2bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α ও β হয়, তবে α^2 ও β^2 মূল সম্বলিত সমীকরণটি নির্ণয় কর। α ও β এর মান ও নির্ণয় কর। [KUET'06-07]

সমাধান: $x^2 + 2bx + c = 0, \alpha + \beta = -2b, \alpha\beta = c;\ \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 4b^2 - 2c$

$\therefore \alpha^2$ ও β^2 মূল বিশিষ্ট সমীকরণ: $x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha^2\beta^2 = 0$

$\Rightarrow x^2 - (4b^2 - 2c)x + c^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2(2b^2 - c) + c^2 = 0$

$\alpha - \beta = \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta} = \sqrt{4b^2 - 4c} = 2\sqrt{b^2 - c}$

$\therefore \alpha = -b + \sqrt{b^2 - c}$ এবং $\beta = -b - \sqrt{b^2 - c}$ (Ans.)

07. $7x^2 - 5x - 3 = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয় α, β হলে এরূপ এবং অখন্ড সহগবিশিষ্ট সমীকরণ গঠন কর যার মূল $\frac{1}{\alpha} + \frac{3}{\beta}, \frac{3}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ হবে।

সমাধান: এখানে, $\alpha + \beta = \frac{5}{7}; \alpha\beta = -\frac{3}{7}$ [KUET'04-05]

মূলদ্বয়ের যোগফল $= \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{3}{\beta}\right) + \left(\frac{3}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) = \frac{4}{\alpha} + \frac{4}{\beta} = 4\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right) = 4 \times \frac{5/7}{-3/7} = -\frac{20}{3}$

মূলদ্বয়ের গুণফল $= \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{3}{\beta}\right) \times \left(\frac{3}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) = \frac{(\beta+3\alpha)(3\beta+\alpha)}{(\alpha\beta)^2} = \frac{3\beta^2+\alpha\beta+9\alpha\beta+3\alpha^2}{(\alpha\beta)^2}$

$= \frac{3(\alpha+\beta)^2+4\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2} = \frac{3\times\frac{25}{49} - \frac{3}{7}\times 4}{\frac{9}{49}} = -1$ $\therefore$ সমীকরণ, $3x^2 + 20x - 3 = 0$ (Ans.)

08. যদি α ও β অসমান হয় এবং $\alpha^2 = 5\alpha - 3$ এবং $\beta^2 = 5\beta - 3$ হয় তবে $\frac{\alpha}{\beta}$ এবং $\frac{\beta}{\alpha}$ মূল বিশিষ্ট সমীকরণটি নির্ণয় কর। [BUET'00-01]

সমাধান: প্রশ্নমতে, α ও β, $x^2 - 5x + 3 = 0$ সমীকরণের দুটি মূল।

$\therefore \alpha + \beta = 5, \alpha\beta = 3;$ এখন, $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{25-6}{3} = \frac{19}{3}$ এবং $\frac{\alpha}{\beta}.\frac{\beta}{\alpha} = 1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $x^2 - \frac{19}{3}x + 1 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 19x + 3 = 0$

Question Type-08: দুটি সমীকরণের মূলের সম্পর্ক ও সাধারণ মূল

- **Formula & Concept:** $a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ এবং $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ এর একটি সাধারণ মূল α হলে, $a_1\alpha^2 + b_1\alpha + c_1 = 0$ এবং $a_2\alpha^2 + b_2\alpha + c_2 = 0$
- $\boxed{(a_1b_2 - a_2b_1)(b_1c_2 - b_2c_1) = (c_1a_2 - c_2a_1)^2}$ [12 21 rule]
- দুইটি দ্বিঘাত সমীকরণের দুইটি সাধারণ মূল থাকলে:

$a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$ এবং $a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$ এর 2 টি মূলই সমান হলে $\boxed{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}}$

বি. দ্র.: 2 টি সমীকরণের সাধারণ মূল না থাকলেও বিয়োগ করলে x এর একটি মান আসবে। কিন্তু সেটা উক্ত সমীকরণদ্বয়ের একটিরও মূল নয়। তাই 2 টি সমীকরণ বিয়োগ করে x এর প্রাপ্ত মানটিকে যেকোন একটি সমীকরণে বসিয়ে দিলে যদি L.S = R.S হয় তাহলে ঐটাই সাধারণ মূল।

MCQ

01. যদি দ্বিঘাত সমীকরণ $x^2 - 11x + a = 0$ ও $x^2 - 14x + 2a = 0$ এর একটি সাধারণ মূল থাকে তবে 'a' মানসমূহ হবে- **[KUET'08-09, RUET'11-12]**

(a) $(0, 24)$ (b) $(0, -24)$ (c) $(1, -1)$ (d) $(-2, 1)$ (e) কোনোটিই নয়

সমাধান: (a); সাধারণ মূল α হলে, $\alpha^2 - 11\alpha + a = 0$

$$\alpha^2 - 14\alpha + 2a = 0$$

$$(-), 3\alpha = a$$

$\therefore \alpha = \frac{a}{3} \therefore \frac{a^2}{9} - \frac{11a}{3} + a = 0$ বা, $a^2 - 33a + 9a = 0$ বা, $a(a - 24) = 0 \therefore a = 0, 24$

02. যদি $ax^2 + 2cx + b = 0$ এবং $ax^2 + 2bx + c = 0, (b \neq 0)$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকে তবে, $a + 4b + 4c$ এর মান কত? **[RUET'09-10]**

(a) 0 (b) -1 (c) -3 (d) 1 (e) None

সমাধান: (a); $a\alpha^2 + 2c\alpha + b = 0$

$$a\alpha^2 + 2b\alpha + c = 0$$

$$(-)\ (-)\ (-)$$

$$2(c - b)\alpha = (c - b)$$

$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \therefore \frac{a}{4} + \frac{2c}{2} + b = 0 \Rightarrow a + 4c + 4b = 0$

Written

03. যদি $x^2 + px + q = 0$ এবং $x^2 + qx + p = 0$ সমীকরণদ্বয়ের একটি সাধারণ মূল থাকে তবে $2x^2 + (p + q - 2)x = (p + q - 2)^2$ সমীকরণের মূলদ্বয় নির্ণয় কর। **[BUET'02-03, BUTEX'19-20]**

সমাধান: ধরি, সাধারণ মূল α।

$\therefore \alpha^2 + p\alpha + q = 0 \ldots\ldots\ldots (i)$ এবং $\alpha^2 + q\alpha + p = 0 \ldots\ldots\ldots (ii)$

এখন, $(i) - (ii) \Rightarrow (p - q)\alpha + (q - p) = 0 \therefore \alpha = 1$

$\therefore 1 + p + q = 0 \therefore p + q = -1 \therefore 2x^2 + (p + q - 2)x = (p + q - 2)^2 \Rightarrow 2x^2 - 3x = 9 \therefore x = 3, -\frac{3}{2}$ (Ans.)

04. যদি $x^2 + px + q = 0, x^2 + qx + 8p = 0$ এবং $4x^3 + 16x^2 - 9x - 36 = 0$ সমীকরণ গুলোর একটি সাধারণ মূল থাকে এবং $4x^3 + 16x^2 - 9x - 36 = 0$ সমীকরণের অন্য দুইটি মূলের যোগফল শূন্য হলে, p এবং q এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, ৩য় সমীকরণের মূলগুলো হলো, $\beta, -\beta, \alpha \therefore \beta - \beta + \alpha = -\frac{16}{4} = -4 \therefore \alpha = -4$ **[BUET'13-14]**

১ম ও ২য় সমীকরণের সাধারণ মূল, -4

$16 - 4p + q = 0 \ldots\ldots (i); 16 - 4q + 8p = 0 \ldots\ldots\ldots (ii)$; (i) ও (ii) $\Rightarrow p = 10, q = 24$

05. যদি $px^2 + qx + 1 = 0$ এবং $qx^2 + px + 1 = 0$ সমীকরণ দুইটির একটি মাত্র সাধারণ মূল থাকে, তবে প্রমাণ কর যে, $p + q + 1 = 0$ **[RUET'09-10]**

সমাধান: ধরি, সাধারণ মূল হল α $\therefore p\alpha^2 + q\alpha + 1 = 0 \ldots\ldots (i) \therefore q\alpha^2 + p\alpha + 1 = 0 \ldots\ldots (ii)$

এখন, $(i) - (ii) \Rightarrow \alpha^2(p - q) + \alpha(q - p) = 0 \Rightarrow \alpha^2(p - q) - \alpha(p - q) = 0 \Rightarrow (p - q)(\alpha^2 - \alpha) = 0$

$\Rightarrow \alpha^2 - \alpha = 0$ [$\because p \neq q$ কারণ, $p = q$ হলে সমীকরণদ্বয় অভিন্ন হয়।]

$\Rightarrow \alpha^2 = \alpha$ বা, $\alpha = 1$ $\therefore \alpha = 1; \alpha = 1$ হলে (i) থেকে পাই, $p + q + 1 = 0$ (Proved)