অধ্যায়- ০৫ : দ্বিপদী বিস্তৃতি

Written

01. পাশের অসীম ধারাটির যোগফল নির্ণয় কর: $\frac{1}{3}+\frac{1.3}{3.6}+\frac{1.3.5}{3.6.9}+\frac{1.3.5.7}{3.6.9.12}+\frac{1.3.5.7.9}{3.6.9.12.15}+\cdots\infty$ **[BUET'18-19]**

সমাধান: $(1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+\cdots$

$\Rightarrow (1+x)^n - 1 = nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+\cdots$

$nx=\frac{1}{3}\Rightarrow n^2x^2=\frac{1}{9}\,\ldots\ldots\ldots(i)$

$\frac{n(n-1)}{2}x^2=\frac{1}{6}\,\ldots\ldots\ldots(ii)$

$(ii)\div(i)\Rightarrow \frac{n^2-n}{2n^2}=\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{n-1}{n}=3\ \Rightarrow 2n=-1\Rightarrow n=-\frac{1}{2}\ \therefore x=-\frac{2}{3}$

$\therefore (1+x)^n=\left(1-\frac{2}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$

$\therefore$ ধারাটির যোগফল $=(1+x)^n-1=\sqrt{3}-1$ (Ans.)

02. $n\in\mathbb{N}$ এবং $|x|<1$ হলে, দেখাও যে, $\frac{(1+x)^n}{1-x}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ 2^n। **[BUET'18-19]**

সমাধান: $(1+x)^n(1-x)^{-1}=(1+x)^n(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n)$

$=(1+{}^nC_1x+{}^nC_2x^2+\cdots+{}^nC_nx^n)(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n)$

x^n এর সহগ $=1+{}^nC_1+{}^nC_2+{}^nC_3+\cdots+{}^nC_n=2^n$ (showed)

[Note: $(1+x)^n=1+{}^nC_1x+{}^nC_2x^2+{}^nC_3x^3+\cdots+{}^nC_nx^n$

$x=1$ হলে, $2^n=1+{}^nC_1+{}^nC_2+{}^nC_3+\cdots+{}^nC_n$]

03. $\left(\frac{x^4}{y^3}+\frac{y^2}{2x}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে y মুক্ত পদ কত? **[BUTEX'18-19]**

সমাধান: $\left(\frac{y^2}{2x}+\frac{x^4}{y^3}\right)^{10}$; $t_{r+1}={}^{10}C_r\left(\frac{y^2}{2x}\right)^{10-r}\left(\frac{x^4}{y^3}\right)^r={}^{10}C_r\,y^{20-2r-3r}x^{4r-10+r}\left(\frac{1}{2}\right)^{10-r}$

y মুক্ত পদ হলে, $20-2r-3r=0\Rightarrow r=4$

$\therefore t_5={}^{10}C_4\,x^{16-10+4}\,\frac{1}{2^6}=\frac{105}{32}x^{10}$ [Ans.]

04. অসীম ধারাটির যোগফল নির্ণয় করঃ $1+\frac{3}{4}+\frac{3.5}{4.8}+\frac{3.5.7}{4.8.12}+\cdots\infty$। **[BUET'17-18]**

সমাধান: ধরি, $S=1+\frac{3}{4}+\frac{3\cdot5}{4\cdot8}+\frac{3\cdot5\cdot7}{4\cdot8\cdot12}+\cdots\infty\ldots(i)$

আমরা জানি, $(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\cdots\infty\ldots(ii)$

(i) নং ও (ii) নং সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাই,

$nx=\frac{3}{4}\ldots\ldots\ldots(iii)$; $\frac{n(n-1)}{2\cdot1}\cdot x^2=\frac{3\cdot5}{4\cdot8}\ldots\ldots\ldots(iv)$

(iv) নং সমীকরণকে (iii) নং সমীকরণের বর্গ দ্বারা ভাগ করে পাই,

$\frac{n(n-1)x^2}{2\times n^2x^2}=\frac{3\cdot5\cdot4\cdot4}{4\cdot8\cdot3\cdot3}\Rightarrow\frac{n^2-n}{n^2}=\frac{5}{3}\Rightarrow 1-\frac{1}{n}=\frac{5}{3}\Rightarrow\frac{1}{n}=\frac{-2}{3}\Rightarrow n=\frac{-3}{2}\ldots\ldots\ldots(v)$

$(iii)\Rightarrow nx=\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{-3}{2}\times x=\frac{3}{4}\Rightarrow x=\frac{-1}{2}\ldots\ldots\ldots(vi)$

সুতরাং নির্ণেয় যোগফল $S=(1+x)^n=\left(1-\frac{1}{2}\right)^{\frac{-3}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{-3}{2}}=2^{\frac{3}{2}}=\left(\sqrt{2}\right)^3=2\sqrt{2}$ (Ans.)

05. $\left(x^2-2+\frac{1}{x^2}\right)^6$ এর বিস্তৃতিতে ধ্রুবক পদের মান নির্ণয় কর। [BUET'17-18]

সমাধান: $\left(x^2-2+\frac{1}{x^2}\right)^6=\left(x^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^6$

$=\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\right\}^6$ $[(a-b)^2=a^2-2ab+b^2]$ $=\left(x-\frac{1}{x}\right)^{12}$

ধরি, বিস্তৃতির $(r+1)$ তম পদ ধ্রুবপদ

এখন $(r+1)$ তম পদ $=T_{r+1}={}^{12}C_r\cdot x^{12-r}\cdot(-1)^r\cdot\frac{1}{x^r}={}^{12}C_r\cdot(-1)^r\cdot x^{12-2r}$

আবার ধ্রুবক পদের জন্য $12-2r=0\Rightarrow 2r=12\Rightarrow r=6$

$\therefore$ ধ্রুবক পদ $=T_{6+1}={}^{12}C_6\cdot(-1)^6\cdot x^0={}^{12}C_6=924$ (Ans.)

06. $(1+x)^p, p>0$ এর x^5 এর সহগ x^4 এর সহগের দ্বিগুণ হলে p এর মান নির্ণয় কর। x^6 ও x^4 এর সহগের মধ্যে সম্পর্ক কি?

সমাধান: $T_{r+1}={}^{P}C_r$ [RUET'17-18]

x^5 এর সহগ $={}^{P}P_5$; x^4 এর সহগ $={}^{P}C_4$

এখন, ${}^{P}C_5=2\times{}^{P}C_4\Rightarrow\frac{P!}{5!(P-5)!}=2\times\frac{P!}{4!(p-4)!}\Rightarrow p-4=10\Rightarrow p=14$ (Ans.)

এখন $\frac{x^6\text{এর সহগ}}{x^4\text{এর সহগ}}=\frac{{}^{14}C_6}{{}^{14}C_4}$ $\therefore x^6$ এর সহগ $=3\times x^4$ এর সহগ (Ans.)

07. $\left(2x^2+\frac{P}{x^3}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে x^5 এবং x^{15} এর সহগ সমান হলে P এর ধনাত্মক মান নির্ণয় কর। [BUET'16-17]

সমাধান: $\left(2x^2+\frac{P}{x^3}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে, $(r+1)$ তম পদ, $t_r={}^{10}C_r.(2x^2)^{10-r}.\left(\frac{P}{x^3}\right)^r={}^{10}C_r.2^{10-r}.x^{20-5r}.P^r$

x^5 এর জন্য, $20-5r=5\ \therefore r=3$; x^{15} এর জন্য, $20-5r=15\ \therefore r=1$

প্রশ্নমতে, ${}^{10}C_3.2^{10-3}.P^3={}^{10}C_1.2^{10-1}.P\Rightarrow 12P^2=4\Rightarrow P^2=\frac{1}{3}\ \therefore P=\frac{1}{\sqrt{3}}$ [P এর ধনাত্মক মান বিবেচনা করে]

08. যদি $(1+x)(a-bx)^{12}$-এর বিস্তৃতিতে x^8-এর সহগ 0 হয়, তাহলে $\frac{a}{b}$ অনুপাতের মান নির্ণয় কর।

সমাধান: Here $(1+x)(a-bx)^{12}$ [KUET'05-06,13-14,CUET'14-15]

$=(1+x)\{a^{12}-{}^{12}C_1.a^{11}.bx+\ldots\ldots-{}^{12}C_7.a^5.b^7x^7+{}^{12}C_8.a^4.b^8x^8\ldots\ldots+b^{12}.x^{12}\}$

$\therefore x^8$-এর সহগ$={}^{12}C_8.a^4.b^8-{}^{12}C_7.a^5.b^7=0\Rightarrow\frac{12!}{8!\,4!}a^4b^8=\frac{12!}{7!\,5!}a^5b^7\Rightarrow\frac{b}{8}=\frac{a}{5}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{5}{8}$

09. $(x+a)^n$ এর বিস্তৃতিতে প্রথম তিনটি সংখ্যা যথাক্রমে 729, 7290 এবং 30375 হলে a এর মান নির্ণয় কর। [BUET'12-13]

সমাধান: $(x+a)^n=x^n+\frac{n}{1!}x^{n-1}a+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}a^2+\ldots\ldots+a^n$ [দ্বিপদী উপপাদ্য অনুসারে]

$x^n=729\ldots.(i)$

$\frac{n}{1}x^{n-1}a=7290\ldots.(ii)$

$\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}a^2=30375\ldots.(iii)$

(ii) এ, $nx^n.\frac{a}{x}=7290$

$\Rightarrow n(729).\frac{a}{x}=7290\ [\because x^n=729]$

$\Rightarrow\frac{a}{x}=\frac{10}{n}\ldots.(iv)$

(iii) এ, $\frac{n(n-1)}{2!}x^n.\frac{a^2}{x^2}=30375$

$\Rightarrow\frac{n^2-n}{2}(729)\left(\frac{10}{n}\right)^2=30375$

$\Rightarrow\frac{n^2-n}{n^2}=\frac{5}{6}$

$\Rightarrow 6n^2-6n=5n^2$

$\Rightarrow n^2=6n$

$\Rightarrow n=6\ [n\neq 0]$

(i) এ $x^6=729=3^6$

$\Rightarrow x=3$

(vi) এ $\frac{a}{3}=\frac{10}{6}$

$\Rightarrow a=5$ (Ans)

10. $\left(2x^2-\frac{1}{x^3}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদটির মান নির্ণয় কর। **[CUET'08-09, BUTex'12-13]**

সমাধান: $\left(2x^2-\frac{1}{x^3}\right)^{10}$; $T_{r+1}={}^{10}C_r.(2x^2)^{10-r}.(-1)^r.x^{-3r} = {}^{10}C_r.2^{10-r}(-1)^r.x^{20-5r}$

$x^{20-5r}=x^0 \quad \therefore r=4 \quad \therefore$ মান $={}^{10}C_4.2^6 \ =13440$ (Ans.)

11. অনন্ত ধারাটির সমষ্টি নির্ণয় কর : $1+2.\frac{1}{3^2}+\frac{2}{1}.\frac{5}{2}.\frac{1}{3^4}+\frac{2}{1}.\frac{5}{2}.\frac{8}{3}\frac{1}{3^6}+$............... **[BUTex'11-12]**

সমাধান: $S=1+2.\frac{1}{3^2}+\frac{2}{1}.\frac{5}{2}.\frac{1}{3^4}+\frac{2}{1}.\frac{5}{2}.\frac{8}{3}.\frac{1}{3^6}+............\infty$

ধরি, $S=(1+x)^n$ তাহলে, $nx=\frac{2}{9}$.....(i); $\frac{n(n-1)}{2}x^2=\frac{5}{3^4}=\frac{5}{81}$.........(ii)

(ii) নং হতে পাই, $\frac{n(n-1)}{2}.\frac{4}{81}.\frac{1}{n^2}=\frac{5}{81}$ বা, $\frac{2n-2}{n}=5$ বা, $2n-2=5n \quad \therefore n=-\frac{2}{3}$

$\therefore x=\frac{2}{9}.\left(\frac{-3}{2}\right)=\frac{-1}{3} \quad \therefore S=\left(1-\frac{1}{3}\right)^{-2/3}=\left(\frac{2}{3}\right)^{-2/3}$

12. $\left(2x^2+\frac{k}{x^3}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে x^5 এবং x^{15} এর সহগদ্বয় সমান হলে k এর ধনাত্মক মান নির্ণয় কর।

[BUET'00-01, BUETex'01-02, KUET'10-11, SUST'09-10]

সমাধান: $\left(2x^2+\frac{k}{x^3}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে (r+1)th পদ $= {}^{10}C_r(2x^2)^{10-r}\left(\frac{k}{x^3}\right)^r={}^{10}C_r2^{10-r}k^rx^{20-5r}$

এই (r+1)th পদে x^5 থাকবে যদি $20-5r=5 \Rightarrow r=3$ হয়।

এই (r+1)th পদে x^{15} থাকবে যদি $20-5r=15 \Rightarrow r=1$ হয়।

প্রশ্নমতে, ${}^{10}C_3\ 2^{10-3}k^3={}^{10}C_1\,2^{10-1}k \Rightarrow 120\times128k^3=5120k$

$3k^3=k,\ k=0,\pm\frac{1}{\sqrt3}$ $\therefore$ a ধনাত্মক মান নিলে, $k=\frac{1}{\sqrt3}$

13. $\left(x^3+\frac{1}{x^6}\right)^{15}$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদটি কত হবে? **[BUTex'09-10]**

সমাধান: $t_{r+1}={}^{15}C_r(x^3)^{15-r}.(x^{-6})^r={}^{15}C_rx^{45-3r-6r}$

$\therefore 45-3r-6r=0$ বা, $r=5$ হলে পদটি x বর্জিত হবে। $\therefore$ পদটি ${}^{15}C_5=3003$

14. দেখাও যে, $n>0$ হলে $\left(x^p+\frac{1}{x^p}\right)^{2n}$ দ্বিপদ রাশির বিস্তৃতিতে সর্বদাই একটি x – মুক্ত পদ থাকবে। $n=5$ হলে এ পদের মান নির্ণয় কর। **[BUTex'0.**

সমাধান: সাধারণ পদ, $T_{r+1}={}^{2n}C_r\left(x^p\right)^{2n-r}\left(x^{-p}\right)^r \ ={}^{2n}C_r\,x^{(2n-r-r)p}\ ={}^{2n}C_r\,x^{2(n-r)p}$

$\therefore$x বর্জিত পদ থাকবে যদি $2(n-r)p=0$ হয় $\because p\neq0,\ 2(n-r)=0,\ n=r$

$\therefore$ যখনই $n=r$ হবে $(n>0)$ তখনই একটি x বর্জিত পদ থাকবে।

ইহা সব সময়ই সম্ভব কারণ n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা।

যদি $n=5$, তাহলে $r=5$ $\therefore$ পদের মান $={}^{2\times5}C_5={}^{10}C_5=\frac{10\times9\times8\times76}{5\times4\times3\times2\times1}=252$ (Ans.)

15. r-এর কোন মানের জন্য $\left(2x^2+\frac{3}{x}\right)^{19}$ এর বিস্তৃতিতে $(r+1)$ তম এবং $(r+2)$ তম পদের সহগ পরস্পর সমান হবে?

সমাধান: $\frac{T_{r+1}}{T_r}=\frac{n-r+1}{r}\cdot\frac{x}{a}$; $[(a+x)^n$ বিস্তৃতিতে$]$ $\Rightarrow\frac{T(r+1)+1}{T_{r+1}}=\frac{19-(r+1)+1}{r+1}\cdot\left(\frac{\frac{3}{x}}{2x^2}\right)$ **[BUET'08-09]**

সহগ সমান বলে, $\frac{19-r-1+1}{r+1}\cdot\frac{3}{2}=1\Rightarrow\frac{19-r}{r+1}=\frac{2}{3}\Rightarrow 57-3r=2r+2\Rightarrow 5r=55\Rightarrow r=11$

16. যদি $y=x+x^2+x^3+\ldots\infty$ হয়, তাহলে দেখাও যে, $x=y-y^2+y^3-y^4+\ldots\infty$ **[BUET'07-08]**

$\Rightarrow 1+y=(1-x)^{-1}\Rightarrow(1+y)^{-1}=1-x$

$\Rightarrow x=1-(1+y)^{-1}\Rightarrow x=1-(1-y+y^2-y^3+y^4\ldots\ldots\infty)$

$\therefore x=y-y^2+y^3-y^4+\ldots\ldots\infty$ (Showed)

17. n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হলে এবং $\left(3+\frac{x}{2}\right)^n$ এর বিস্তৃতিতে x^7 ও x^8 এর সহগ দুটি সমান হলে, n এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $\left(3+\frac{x}{2}\right)^n$ এর বিস্তৃতির $(r+1)$ তম পদ, $t_{r+1}={}^nC_r.3^{n-r}\left(\frac{x}{2}\right)^r={}^nC_r3^{n-r}2^{-r}.x^r$ **[BUET'06-07]**

$\therefore x^7$এর সহগ$={}^nC_7.3^{n-7}2^{-7}$ এবং x^8 এর সহগ$={}^nC_8.3^{n-8}2^{-8}$ শর্তমতে, ${}^nC_7.3^{n-7}.2^{-7}={}^nC_8 3^{n-8}2^{-8}$

$\Rightarrow\frac{n!}{7!\ (n-7)!}\times3\times2=\frac{n!}{8!\ (n-8)!}\Rightarrow\frac{6}{n-7}=\frac{1}{8}\Rightarrow n-7=48\Rightarrow n=55$

18. যদি $-\frac{8}{3}<x<\frac{8}{3}$ হয়, তবে $(8-3x)^{\frac{1}{3}}$-এর বিস্তৃতিতে x^3 -এর সহগ নির্ণয় কর। **[BUET'04-05]**

সমাধান: $(8-3x)^{\frac{1}{3}}=8^{-\frac{1}{3}}\left[1-\frac{3x}{8}\right]^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\left[1-\frac{3x}{8}\right]^{-\frac{1}{3}}$

$$=\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{3x}{8}+\frac{-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}-1\right)}{2}\left(-\frac{3x}{8}\right)^2+\frac{-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}-1\right)\left(-\frac{1}{3}-2\right)}{3!}\left(-\frac{3x}{8}\right)^3+\ldots\ldots\infty\right]$$

$$\therefore x^3\text{ এর সহগ}=\frac{1}{2}\left[\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{7}{3}\right)}{3!}\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)^3\right]=\frac{7}{1536}\text{ (Ans.)}$$

19. $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদটি নির্ণয় কর। **[KUET'04-05]**

সমাধান: পদসংখ্যা 11; মধ্যপদ $\frac{11+1}{2}=6$th

20. $\left(x^3-\frac{5}{x^2}\right)^{12}$ এর বিস্তৃতিতে x^{11} এর সহগ নির্ণয় কর। [BUTex'04-05]

সমাধান: $\left(x^3-\frac{5}{x^2}\right)^{12}$ বিস্তৃতিতে ধরি, $(r+1)$ তম পদে x^{11} এর সহগ বিদ্যমান

$\therefore (r+1)$ তম পদ ${}^{12}C_r(x^3)^{12-r}\left(-\frac{5}{x^2}\right)^r = {}^{12}C_r x^{36-3r}(-5)^r x^{-2r} = {}^{12}C_r x^{36-5r}(-5)^r$

$\therefore x^{11}=x^{36-5r} \Rightarrow r=\frac{36-11}{5}=5$; x^{11} এর সহগ, ${}^{12}C_5(-5)^5 = -{}^{12}C_5\, 5^5$

21. $|x|<\frac{1}{3}$ হলে $(1\text{-}5x+6x^2)^{-1}$ এর বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ নির্ণয় কর। [BUET'03-04]

সমাধান: $(1\text{-}5x+6x^2)^{-1}=\frac{1}{(1-2x)(1-3x)}=\frac{3}{1-3x}-\frac{2}{1-2x}=3(1-3x)^{-1}-2(1-2x)^{-1}$

$=3\ \{1+3x+(3x)^2+\ldots\ldots\ldots+(3x)^n\ldots..\}-2\ \{1+2x+(2x)^2+\ldots\ldots\ldots+(2x)^n+\ldots\ldots\}$

$\therefore$ নির্ণেয় x^n এর সহগ $=3.3^n-2.2^n = 3^{n+1}-2^{n+1}$

22. যদি $y=2x+3x^2+4x^3+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ হলে দেখাও যে, $x=\frac{1}{2y}-\frac{3}{8}y^2+\frac{5}{16}y^3-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$।

সমাধান: $1+y=1+2x+3x^2+4x^3\ldots\ldots \Rightarrow 1+y=(1-x)^{-2} \Rightarrow (1+y)=\frac{1}{(1-x)^2} \Rightarrow \frac{1}{1+y}=(1-x)^2$

$\Rightarrow \frac{1}{(1+y)^{1/2}}=1-x \Rightarrow 1-x=(1+y)^{-1/2}$ [BUET'01-02,CUET'01-02]

$$\Rightarrow 1-x=1+\left(-\frac{1}{2}\right)y+\frac{\left(\frac{-1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}y^2+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}y^3+\ldots\ldots$$

$\Rightarrow 1-x=1-\frac{1}{2}y+\frac{3}{8}y^2-\frac{5}{16}y^3+\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \therefore x=\frac{1}{2}y-\frac{3}{8}y^2+\frac{5}{16}y^3-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$(Showed).

MCQ

01. $\left(2x^2+\frac{p}{x^3}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে x^5 এবং x^{15} এর সহগদ্বয় সমান হলে 'P' এর ধনাত্মক মান কোনটি? [KUET'18-19]

(a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{5}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (e) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

সমাধান: (c); $T_{r+1}={}^{10}C_r\cdot(2x^2)^{10-r}\cdot\left(\frac{p}{x^3}\right)^r={}^{10}C_r\cdot 2^{10-r}\cdot p^r\cdot x^{20-5r}$

$\therefore 20-5r=5 \Rightarrow r=3$ এবং $20-5r=15 \Rightarrow r=1$

$\Rightarrow {}^{10}C_3\cdot 2^7\cdot p^3={}^{10}C_1\cdot 2^9\cdot p \Rightarrow p^2=\frac{1}{3} \Rightarrow p=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

02. $2+5+8+11+\cdots$ সমান্তর ধারার 100 তম পদ থেকে 150 তম পদ পর্যন্ত সকল জোড় পদের যোগফল সকল বিজোড় পদের যোগফল থেকে কত বেশি? [SUST'18-19]

(a) 142 (b) 297 (c) 449 (d) 374 (e) 524

সমাধান: (No correct answer); প্রদত্ত ধারার ক্ষেত্রে, 100 তম পদ $=2+(100-1)\times 3=299$

এবং 150 তম পদ $=2+(150-1)\times 3=449$

100 হতে 150 তম পদের মধ্যে 26 টি বিজোড় পদ ও 25 টি জোড় পদ।

নির্ণেয় বিয়োগফল $=(302+308+314+\cdots+446)-(299+305+311+\cdots+449)$

$=(302-299)+(308-305)+(314-311)+\cdots-449=-3\times 25-449=-374$ (Ans)

03. $1+\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}-\frac{1}{4.5}+\cdots$ এর মান কোনটি? [KUET'17-18]

(a) $-3\ln 2$ (b) $\ln 7$ (c) $5\ln 3$ (d) $2\ln 2$ (e) $3\ln 5$

সমাধান: (d); $1+\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}-\frac{1}{4.5}+\cdots=1+\frac{2-1}{1.2}-\frac{3-2}{2.3}+\frac{4-3}{3.4}-\frac{5-4}{5.4}$

$=1+1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\cdots=2(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots$

$=2\ln 2\ \left[\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\right]$

04. $\left(x-\frac{k}{x}\right)^5$ এর বিস্তৃতিতে x এর সহগ 120 হলে k এর মান কত? [SUST'17-18]

(a) 12 (b) $-3\sqrt{2}$ (c) $3\sqrt{2}$ (d) $\pm\sqrt{12}$ (e) $4\sqrt{3}$

সমাধান: (d); $T_{r+1}=\ {}^5c_r\cdot x^{5-2r}\cdot(-k)^r$

এখন $5-2r=1\Rightarrow r=2\ \therefore 120=\ {}^5c_2(-k)^2\Rightarrow k=\pm\sqrt{12}$

05. $(Ax-B)(x^2-9)+(Ax+B)(x^2-4)=2x(2x^2-13)+5$ একটি অভেদ হলে যথাক্রমে A এবং B এর মান হবে- [SUST'17-18]

(a) 1, 2 (b) 2, 1 (c) 2, 3 (d) −2, 3 (e) 2, −3

সমাধান: (b); x^3 এর সহগ সমীকৃত করে পাই, $A+A=4\Rightarrow A=2$

ধ্রুবকপদ সমীকৃত করে পাই, $9B-4B=5\Rightarrow B=1\ \ \therefore (A,B)=(2,1)$

06. $\left(x+\frac{2}{x}\right)^8$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদের মান কত? [KUET'16-17]

(a) 1100 (b) 1120 (c) 1200 (d) 1220 (e) 1320

সমাধান: (b); $T_{r+1}=\ {}^8C_r\,x^{8-r}\left(\frac{2}{x}\right)^r=\ {}^8C_r\,x^{8-2r}2^r\ \therefore 8-2r=0\Rightarrow r=4\ \therefore T_5=\ {}^8C_4\,2^4=1120$

07. $x^2(1+x)^6$ এর বিস্তৃতিতে x^9 এর সহগ কত? [BUTex'16-17]

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) −1

সমাধান: (a); $x^2(1+x)^6$ এর বিস্তৃতিতে x^9 এর কোন পদ নেই।

08. $\frac{x}{(1-4x)(1-5x)}$ এর বিস্তৃতিতে x^r এর সহগ (5^r+k4^r) হলে k এর মান কত? [Ans: b] [SUST'16-17]

(a) 1 (b) −1 (c) $\frac{1}{2}$ (d) $-\frac{1}{2}$ (e) 2

সমাধান: (b); $\frac{x}{(1-4x)(1-5x)}=\frac{\frac{1}{4}}{\left(-\frac{1}{4}\right)(1-4x)}+\frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5}(1-5x)}=\frac{1}{1-5x}-\frac{1}{1-4x}$

$=(1+5x+5^2x^2+\cdots+5^rx^r+\cdots)-(1+4x+4^2x^2+\cdots 4^rx^r+\cdots)$

$\therefore x^r$ এর সহগ $=5^r-4^r\ \therefore k=-1$

09. $\left(\frac{4x}{5}-\frac{5}{2x}\right)^9$ এর বিস্তৃতিতে ৭ম পদ কোনটি? [BUTex'15-16]

(a) ${}^9c_7\times\frac{125}{x^3}$ (b) $-\,{}^9c_7\times\frac{125}{x^3}$ (c) $-\,{}^7c_6\times\frac{125}{x^3}$ (d) ${}^9c_6\times\frac{125}{x^3}$

সমাধান: (d); 7^{th} পদ $=\ {}^9C_6\left(\frac{4x}{5}\right)^3\left(-\frac{5}{2x}\right)^6=\ {}^9C_6\frac{125}{x^3}$

10. $(1+x^2)^{-3}$ এর বিস্তৃতিতে x^{4r} এর সহগ বের কর। [CUET'15-16]

(a) $2r(r+1)$ (b) $(2r-1)(r-1)$ (c) $(r+1)(2r-1)$ (d) $(2r+1)(r+1)$

সমাধান: (d); x^{4r} এর সহগ, $(-1)^{2r}\frac{3(3+1)(3+2)...(3+2r-1)}{(2r)!}=\frac{(2+2r)!}{2(2r)!}=\frac{1}{2}(2r+2)(2r+1)=(r+1)(2r+1)$

11. $\left(\frac{1}{x^2}-x\right)^{18}$ এর বিস্তৃতিতে x বর্জিত পদ- [BUTex'14-15]

(a) 12^{th} (b) 13^{th} (c) 14^{th} (d) 15^{th}

সমাধান: (b); $t_{r+1}=\ {}^{18}c_r\,x^{-36+2r}.x^r(-1)^r\Rightarrow 3r-36=0\Rightarrow r=12\ \therefore 12+1=13$th পদ x বর্জিত।

12. $(x+x^{-1})^{10}$ বিস্তৃতিতে ৬ষ্ঠ পদ- [BUTex'13-14]

(a) 521 (b) 522 (c) 252 (d) –252

সমাধান: (c) ; $T_6 = {}^{10}C_5\ x^5 \times x^{-5} = 252$

13. $\left(3x^2 - \frac{1}{3x}\right)^5$ এর বিস্তৃতিতে x এর সহগ কোনটি? [RUET'13-14]

(a) $\frac{10}{3}$ (b) $\frac{5}{3}$ (c) $-\frac{10}{3}$ (d) $-\frac{1}{3}$ (e) None

সমাধান: (c) ; $\left(3x^2 - \frac{1}{3x}\right)^5$; সাধারণ পদ = ${}^5C_r\left(3x^2\right)^{5-r}\left(-\frac{1}{3x}\right)^r$ $\therefore x^{10-2r-r} = x^1$ $\therefore 10-3r=1$

$\therefore 3r = 9$ $\therefore r = 3$ $\therefore$ x এর সহগ $= {}^5C_3.3^2\left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{10}{3}.$

14. a এর কোন মানের জন্য $(1+ax)^8$ এর বিস্তৃতিতে x^3 এবং x^4 এর সহগ পরস্পর সমান হবে?

(a) $\frac{5}{4}$ (b) $\frac{4}{5}$ (c) $\frac{16}{5}$ (d) $\frac{5}{16}$ [CUET'10-11, BUET'12-13]

সমাধান: (b); $T_{r+1} = 8_{C_r} 1^{8-r}(ax)^r$ $\therefore 8_{C_3}\ a^3 = 8_{C_4}\ a^4$

x^r এর সহগ $= 8_{C_r}\ a^r$ $\Rightarrow \frac{8!}{3!\,5!} = \frac{8!}{4!\,4!}a$ [$a \neq 0$ নতুবা রাশিটি দ্বিপদী থাকবে না]

x^3 এর সহগ $= 8_{C_3}\ a^3$ $\Rightarrow \frac{1}{3!(5)4!} = \frac{a}{4(3!)4!}$

x^4 এর সহগ $= 8_{C_4}\ a^4$ $\Rightarrow a = \frac{4}{5}$

15. x এর ক্রমবর্ধমান শক্তিতে $\log_e\left(1-3x+2x^2\right)^{-1}$ এর বিস্তরণে x^n এর সহগ হলো– [Ans: a] [KUET'12-13]

(a) $\frac{1+2^n}{n}$ (b) $\frac{3^n-11}{2}$ (c) $\frac{4^n-5}{7}$ (d) $\frac{n-5}{6}$ (e) $\frac{11n-9}{2}$

সমাধান: $\ln\left(1-3x+2x^2\right)^{-1} = \ln\left(1-2x-x+2x^2\right)^{-1} = (-1)\ln\{1(1-2x)-x(1-2x)\}$

$= -\ln(1-2x)(1-x) = -\ln(1-2x) - \ln(1-x)$

$$= -\left\{-2x - \frac{(2x)^2}{2} - \frac{(2x)^3}{3} - \ldots\ldots - \frac{(2x)^n}{n} - \ldots\ldots\infty\right\} - \left\{-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots\ldots - \frac{(x)^n}{n} - \ldots\ldots\infty\right\}$$

$$= \left\{2x + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} + \ldots\ldots + \frac{(2x)^n}{n} + \ldots\ldots\infty\right\} + \left\{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots\ldots + \frac{(x)^n}{n} + \ldots\ldots\infty\right\}$$

$\therefore x^n$ এর সহগ $= \frac{2^n}{n} + \frac{1}{n} = \frac{1+2^n}{n}$

16. $\frac{1}{(1-x)\,(3-x)}$ এর বিস্তৃতিতে x^{10} এর সহগ হবে- [BUET'11-12]

(a) $\frac{1}{2}[1+3^{-11}]$ (b) $\frac{1}{2}[1-3^{-11}]$ (c) $\frac{1}{2}[1-3^{-10}]$ (d) $\frac{1}{2}[1+3^{-10}]$

সমাধান: (b); $\frac{1}{(1-x)(3-x)}=\frac{1/2}{(1-x)}-\frac{1/2}{(3-x)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x}{3}}\right)=\frac{1}{2}\left[(1-x)^{-1}-\frac{1}{3}\left(1-\frac{x}{3}\right)^{-1}\right]$

$\therefore x^{10}$ এর সহগ $=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}.\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right)=\frac{1}{2}(1-3^{-11})$

17. $\frac{1+2x}{(1-2x)^2}$ এর বিস্তৃতিতে x^{10} এর সহগ কত? **[Ans: d] [CUET'11-12]**

(a) $21504x^{10}$ (b) 21054 (c) 21540 (d) None of these

সমাধান: $\frac{1+2x}{(1-2x)^2}=(1+2x)(1-2x)^{-2}$

$=(1+2x)(1+4x+12x^2+32x^3+.............+10.(2)^9.x^9+11.(2)^{10}.x^{10}+.........)$

$\therefore x^{10}$-এর সহগ $=(2.10.2^9+11.2^{10})=2.5120+(1024\times11)=21504$

সমাধান: (d); (যেহেতু শুধুমাত্র সহগ চাওয়া হয়েছে)

18. $\frac{(1+x)^2}{(1-x)^2}, |x|<1$ এই বিস্তৃতিতে x^n এর সহগ হল- **[RUET'11-12]**

(a) 4n (b) 5n (c) 3n (d) 2n (e) None

সমাধান: (a); $\frac{(1+x)^2}{(1-x)^2}=(1-x)^{-2}+2x(1-x)^{-2}+x^2(1-x)^{-2}$

$=\{1+2x+3x^2+4x^3+.......+(n+1).x^n+......\infty\}+$

$2x\{1+2x+3x^2+..........+nx^{n-1}+.........\infty\}+x^2\{1+2x+.........+(n-1)x^{n-2}+........\infty\}$

$\therefore x^n$ এর সহগ $=n+1+2n+n-1=4n$

19. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{16}$ এর বিস্তৃতি থেকে মধ্য পদটির মান বের কর। **[BUET'10-11]**

(a) 17820 (b) 18702 (c) 13780 (d) 12870

সমাধান: (d); $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{16}$ এর বিস্তৃতিতে মধ্যপদ $=9th$ পদ; $(8+1)$ তম পদ $={}^{16}C_8(-1)^8=12870$

20. $(2x-3y)^{10}$এ x^4y^6এর সহগ কত? **[SUST'10-11]**

(a) 210 (b) 11664 (c) 2449440 (d) 5878560

সমাধান: (c); x^4y^6 এর জন্য $\frac{10!}{4!6!}\times2^4\times(-3)^6=2449440$

21. $(1+x)^n=1-2x+3x^2-4x^3+\cdots(-1)^r(r+1)x^r+\cdots$হলে $n=?$ **[Ans: b] [SUST'10-11]**

(a) –1 (b) –2 (c) –3 (d) –4

22. $\left(2x^2-1/x\right)^9$ বিস্তৃতিতে ধ্রবক পদটি কত? **[SUST'10-11]**

(a) 2° (b) 0 (c) 360 (d) 672

সমাধান: (d); $18-2r-r=0\Rightarrow r=6$

ধ্রুবক পদ, ${}^9C_6\cdot2^3\cdot(-1)^6=672$