Question Type-01: কনিকের প্রকৃতি নির্ণয় সংক্রান্ত

Formula & Concept:

কনিকের সাধারণ সমীকরণ, $ax^2 + by^2 + 2hxy + 2gx + 2fy + c = 0$

- $\Delta = 0$ হলে, সমীকরণটি একজোড়া সরলরেখা নির্দেশ করে।
- $\Delta \neq 0; a = b \neq 0$ এবং $h = 0$ হলে সমীকরণটি বৃত্ত নির্দেশ করে।
- $\Delta \neq 0$ এবং $h^2 - ab = 0$ হলে, [$e = 1 \therefore$ সমীকরণটি পরাবৃত্ত]
- $\Delta \neq 0$ এবং $h^2 - ab > 0$ হলে, [$e > 1 \therefore$ সমীকরণটি অধিবৃত্ত]
- $\Delta \neq 0$ এবং $h^2 - ab < 0$ হলে, [$0 < e < 1 \therefore$ সমীকরণটি উপবৃত্ত] যদি, $e = 0$ হয় তবে কনিকটি বৃত্ত।

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$$

MCQ

01. $9x^2 - 16y^2 - 36x - 32y - 124 = 0$ সমীকরণ সূচিত বক্ররেখাটি কী নির্দেশ করে? [CUET'10-11]

(a) অধিবৃত্ত (b) উপবৃত্ত (c) পরাবৃত্ত (d) None of these

সমাধানঃ (a); $ax^2 + by^2 + 2hxy + cx + dy + e = 0$ এ, $ab < h^2$ তাই অধিবৃত্ত।

Question Type-02: পরাবৃত্তের সমীকরণ থেকে বিভিন্ন উপাদান বের করতে হবে

Formula & Concept:

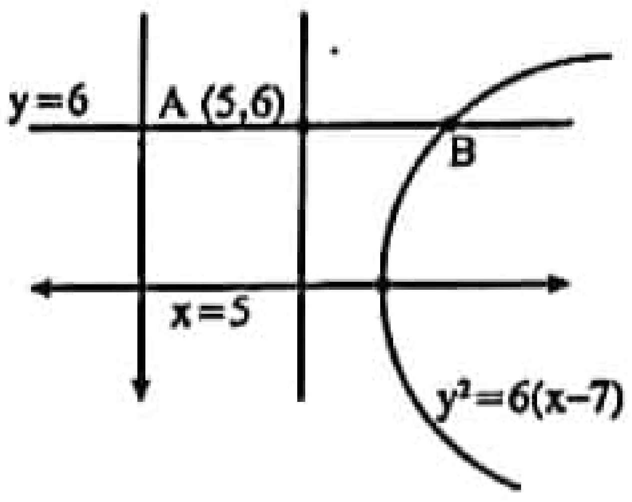
এক্ষেত্রে $Y^2 = 4aX$ আকারে সমীকরণ গঠন করে আদর্শ আকারের সাথে তুলনা করে বিভিন্ন রাশি বের করতে হবে।

পরাবৃত্তের আকার	$a > 0, a < 0$	$a > 0, a < 0$	$a > 0, a < 0$	$a > 0, a < 0$
	$y^2 = 4ax$	$x^2 = 4ay$	$(y-\beta)^2 = 4a(x-\alpha)$	$(x-\alpha)^2 = 4a(y-\beta)$
(i) শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক, A	$(0, 0)$	$(0, 0)$	(α, β)	(α, β)
(ii) উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক, S	$(a, 0)$	$(0, a)$	$(a+\alpha, \beta)$	$(\alpha, a+\beta)$
(iii) নিয়ামকরেখার পাদবিন্দুর স্থানাঙ্ক, Z	$(-a, 0)$	$(0, -a)$	$(-a+\alpha, \beta)$	$(\alpha, -a+\beta)$
(iv) অক্ষরেখার সমীকরণ	$y = 0$	$x = 0$	$y - \beta = 0$	$x - \alpha = 0$
(v) নিয়ামকরেখার সমীকরণ	$x + a = 0$	$y + a = 0$	$x - \alpha + a = 0$	$y - \beta + a = 0$
(vi) উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ	$x = a$	$y = a$	$x - \alpha = a$	$y - \beta = a$
(vii) শীর্ষে স্পর্শকের সমীকরণ	$x = 0$	$y = 0$	$x - \alpha = 0$	$y - \beta = 0$
(viii) উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য, LL′	$4\|a\|$	$4\|a\|$	$4\|a\|$	$4\|a\|$
(ix) উপকেন্দ্রিক লম্বের প্রান্ত বিন্দু দুটির স্থানাঙ্ক	$(a, \pm 2a)$	$(\pm 2a, a)$	$(a+\alpha, \pm 2a+\beta)$	$(\pm 2a+\alpha, a+\beta)$
(x) (x, y) বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব, SP	$x + a$	$y + a$	$x - \alpha + a$	$y - \beta + a$
(xi) উপকেন্দ্র ও শীর্ষের দূরত্ব	a	a	a	a
(xii) পরামিতিক সমীকরণ	$x = at^2$, $y = 2at$	$x = 2at$, $y = at^2$	$x = \alpha + at^2$, $y = \beta + 2at$	$x = \alpha + 2at$, $y = \beta + at^2$
(xiii) পোলার সমীকরণ	$r = 4a \cot\theta \operatorname{cosec}\theta$	$r = 4a \tan\theta \sec\theta$	$(r\sin\theta - \beta)^2 = 4a(r\cos\theta - \alpha)$	$(r\cos\theta - \alpha)^2 = 4a(r\sin\theta - \beta)$

MCQ

01. Straight line $y = 6$ intersects the line $x = 5$ at A and the curve $y^2 = 6(x-7)$ at B. What is the length of AB?
(a) 5 (b) 7 (c) 8 (d) 11 **[IUT'19-20]**

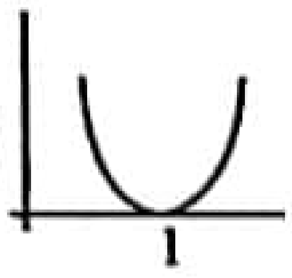
Solution: (c);
Here, $A(5,6)$
Putting, $y = 6$ in $y^2 = 6(x-7)$
we get, $6^2 = 6(x-7) \Rightarrow 6 = x - 7$
$\therefore x = 13 \;\therefore B(13,6)$
$\therefore AB = 13 - 5 = 8$ (Ans.)

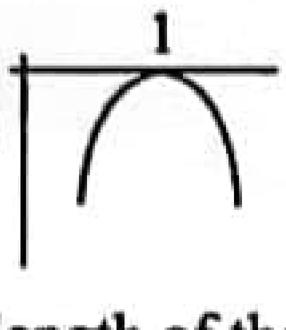


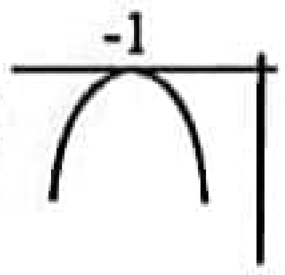
02. পরাবৃত্ত $y^2 = -4ax$ এর দিকাক্ষের সমীকরণ- **[RUET'12-13]**
(a) $x + a = 0$ (b) $x - a = 0$ (c) $x = 0$ (d) $x + y = a$ (e) None

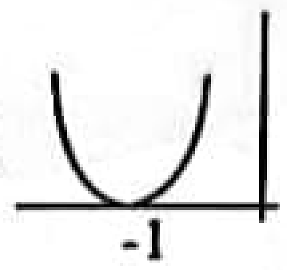
সমাধান: (b) ; $y^2 = 4(-a)x$; দিকাক্ষ $x = -(-a) \Rightarrow x = a \Rightarrow x - a = 0$

03. নীচের কোনটি $y = -(x-1)^2$ এর লেখচিত্র? **[Ans: b][BUET'10-11]**

(a) 

(b) 

(c) 

(d) 

04. What is the latus rectum length of the parabola $x^2 - 4x + 12y - 40 = 0$? **[IUT'08-09]**
(a) 6 (b) 8 (c) 12 (d) 10

Solution: (c); $x^2 - 4x + 4 = -12y + 40 + 4 \Rightarrow (x-2)^2 = -12\left(y - \frac{44}{12}\right) \Rightarrow 4a = 12$

05. $(x-4)^2 = -4(y-5)$ পরাবৃত্তের দিকাক্ষের সমীকরণ হল- **[KUET'07-08]**
(a) $y = 4$ (b) $y = 6$ (c) $x = 4$ (d) $y = -6$ (e) $x = -4$

সমাধান: (b); ধরি, $x - 4 = X, y - 5 = Y$; তাহলে $X^2 = -4Y$
দিকাক্ষের সমীকরণঃ $Y = 1 \Rightarrow y - 5 = 1 \Rightarrow y = 6$

Written

06. পরাবৃত্ত $2y = x^2 + 4x$ এর উপকেন্দ্র ও নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর। **[RUET'07-08]**
সমাধান: $2y = x^2 + 4x \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 2y + 4 \Rightarrow (x+2)^2 = 2(y+2)$
$\Rightarrow (x+2)^2 = 4.\frac{1}{2}(y+2) \Rightarrow X^2 = 4.\frac{1}{2}.Y$
উপকেন্দ্র, $\left(x + 2 = 0, y + 2 = \frac{1}{2}\right) = \left(x = -2, y = -\frac{3}{2}\right) = \left(-2, -\frac{3}{2}\right)$ (Ans.)
নিয়ামক, $Y = -a \Rightarrow y + 2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{5}{2} \Rightarrow 2y + 5 = 0$ (Ans.)

07. নিচের পরাবৃত্তটির শীর্ষবিন্দু, উপকেন্দ্র, উপকেন্দ্রিক লম্ব, অক্ষরেখা এবং দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় করঃ $5x^2 + 15x - 10y - 4 = 0$
সমাধান: $5x^2 + 15x - 10y - 4 = 0 \Rightarrow x^2 + 3x - 2y - \frac{4}{5} = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{61}{20} + 2y$ **[RUET'06-07]**
$\Rightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = 2\left(y + \frac{61}{40}\right) \Rightarrow X^2 = 2Y \;\therefore$ শীর্ষ $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{61}{40}\right)$
উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য, $4a = 2 \;\therefore a = \frac{1}{2}$
$\therefore x + \frac{3}{2} = 0$ অর্থাৎ, $x = \frac{-3}{2}, y + \frac{61}{40} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{41}{40}$ $\;\therefore$ উপকেন্দ্র $\left(-\frac{3}{2}. -\frac{41}{40}\right)$ (Ans)
উপকেন্দ্রিক লম্ব, $Y - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow y + \frac{41}{40} = 0$ (Ans.)
অক্ষরেখা, $x + \frac{3}{2} = 0$, দিকাক্ষ, $Y = \frac{-1}{2} \;\therefore y + \frac{81}{40} = 0$

08. $x^2 + 4x + 2y = 0$ পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু ও দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর। [BUET'02-03, 04-05]

সমাধান: $x^2 + 4x + 2y = 0 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = -2y + 4$

$\Rightarrow (x+2)^2 = -2(y-2) = 4 \times \frac{-1}{2}(y-2)$ $[X^2 = -4aY]$ $\therefore a = \frac{1}{2}$

শীর্ষ বিন্দু, $X = 0 \Rightarrow x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

$Y = 0 \Rightarrow y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2$ $\therefore$ শীর্ষ $(-2, 2)$ $\therefore$ দিকাক্ষের সমীকরণ, $y - 2 = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{5}{2}$ (Ans.)

09. $y^2 = 8x - 5$ পরাবৃত্তের শীর্ষ ও উপকেন্দ্রিক লম্ব নির্ণয় কর। [RUET'03-04]

সমাধান: $y^2 = 8\left(x - \frac{5}{8}\right) \Rightarrow Y^2 = 8X$ ……… (i)

আবার, $y^2 = 4ax$ ……… (ii); উপকেন্দ্রিক লম্ব $= 4a = 8$. $\therefore a = 2$

$\therefore$ শীর্ষবিন্দু $X = 0, Y = 0$ $\therefore x = \frac{5}{8}, y = 0$ $\therefore$ শীর্ষবিন্দু $\left(\frac{5}{8}, 0\right)$; উপকেন্দ্রিক লম্ব $= 4a = 8$ (Ans.)

10. $y^2 = 12x$ পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের ঋণাত্মক দিকের প্রান্ত বিন্দু এবং দিকাক্ষ ও অক্ষের ছেদবিন্দুর সংযোজক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর। [CUET'03-04]

সমাধান: $y^2 = 12x = 4.3x$

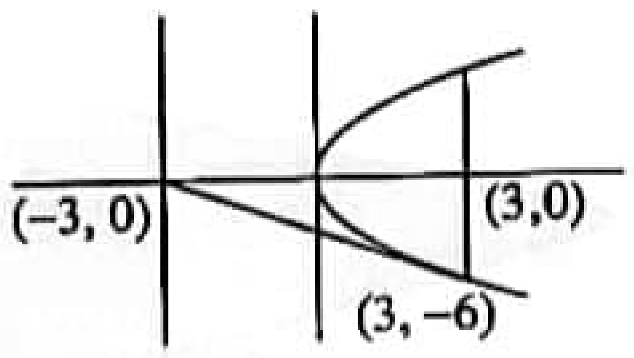
লম্বের প্রান্তবিন্দুদ্বয় $(3, \pm 6)$

দিকাক্ষের সমীকরণ, $x = -3$

$\therefore$ অক্ষের সমীকরণ, $y = 0$

$\therefore$ ঋণাত্মক দিকের প্রান্তবিন্দু $(3, -6)$

$\therefore$ দিকাক্ষ ও অক্ষের ছেদবিন্দু $(-3, 0)$



$\therefore$ $(3, -6)$ এবং $(-3, 0)$ এর সংযোজক রেখার সমীকরণ $y + 6 = \frac{-6-0}{3+3}(x-3) \Rightarrow x + y + 3 = 0$ (Ans.)

Question Type-03: অক্ষের সমান্তরাল অক্ষরেখা/দিকাক্ষ যুক্ত পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয়

Formula & Concept:

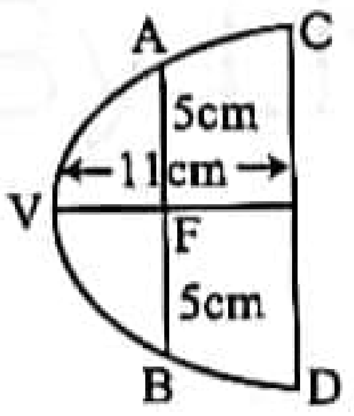
এক্ষেত্রে প্রদত্ত শর্ত থেকে পরাবৃত্তের আদর্শ আকারের সাথে তুলনা করে পরাবৃত্তের সমীকরণ বের করতে হবে।

➤ শীর্ষ (α, β) এবং অক্ষ x অক্ষের সমান্তরাল হলে পরাবৃত্তের সমীকরণ, $(y-\beta)^2 = 4a(x-\alpha)$

➤ শীর্ষ (α, β) এবং অক্ষ y অক্ষের সমান্তরাল হলে পরাবৃত্তের সমীকরণ, $(x-\alpha)^2 = 4a(y-\beta)$

MCQ

01. A cross-section of a parabolic reflector is shown in the figure below. The light source is located at the focus of the parabola and the opening of the focus is 10cm. The equation of the parabola is- [IUT'14-15]



(a) $y^2 = 22x$ (b) $y^2 = 5x$ (c) $y^2 = 10x$ (d) $y^2 = 17x$

Solution: (c); Length of latus rectum = 10cm $\therefore$ The equation of the parabola is, $y^2 = 10x$

Written

02. এমন একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার শীর্ষবিন্দু $(4, -3)$, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য 4 এবং যার অক্ষ, x-অক্ষের সমান্তরাল। [BUTEX'04-05, RUET'05-06, KUET'10-11, BUET'13-14]

সমাধান: $|4a| = 4 \Rightarrow 4a = \pm 4$ $\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $(y+3)^2 = \pm 4(x-4)$

Question Type-04: পরামিতিক সমীকরণবিশিষ্ট পরাবৃত্ত

MCQ

01. $x = at^2, y = 2at$ প্যারামেট্রিক সমীকরণ নির্দেশক সঞ্চারপথ একটি- **[BUTEX'14-15]**
(a) বৃত্ত (b) অধিবৃত্ত (c) পরাবৃত্ত (d) উপবৃত্ত
সমাধান: (c); $t = \frac{y}{2a}$; $x = a.\frac{y^2}{4a^2} \Rightarrow y^2 = 4ax \rightarrow$ পরাবৃত্ত

Question Type-05: উপকেন্দ্র ও দিকাক্ষ দেয়া আছে, সমীকরণ নির্ণয়

Formula & Concept:

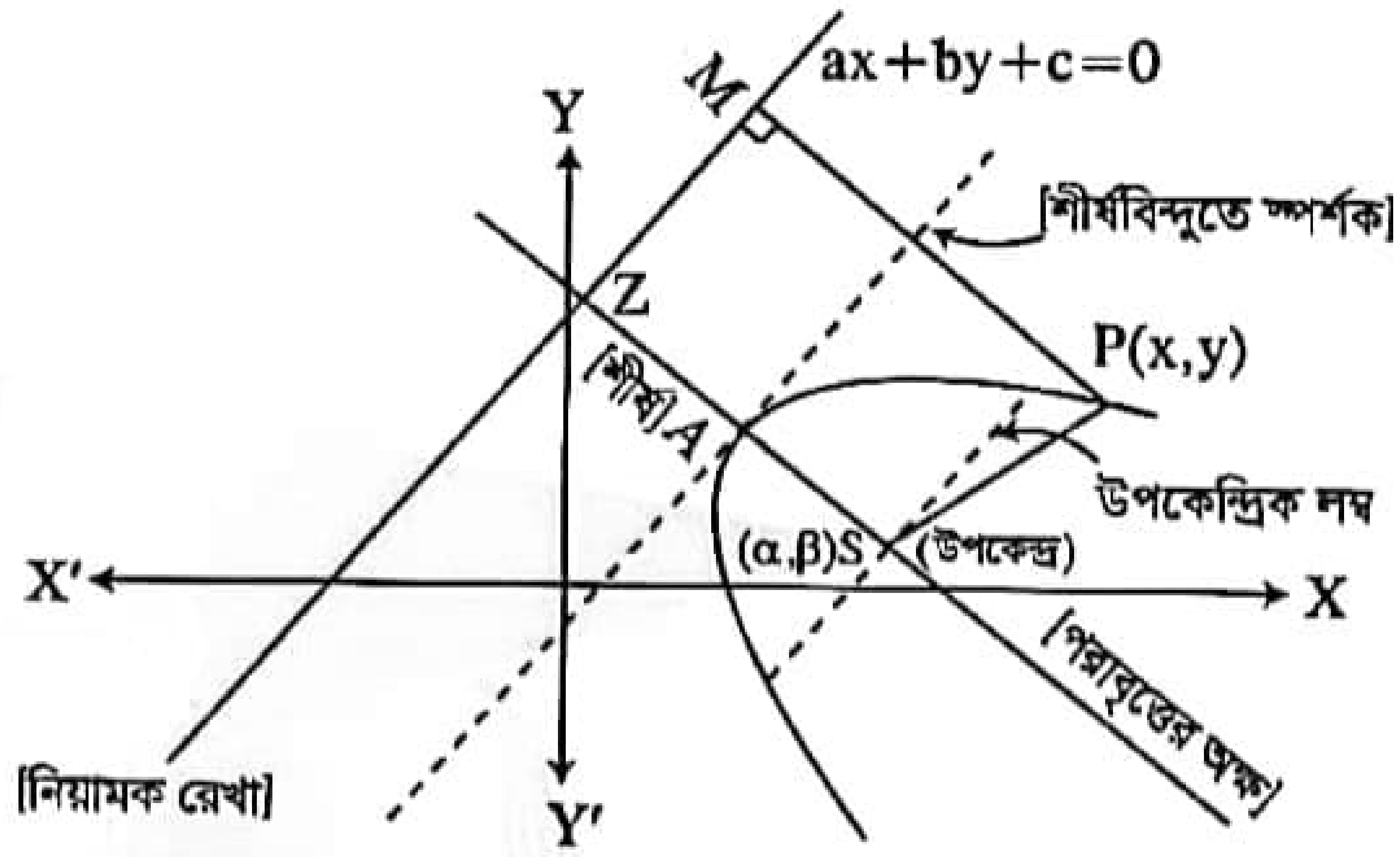
উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (α, β) এবং নিয়ামক রেখার সমীকরণ $ax + by + c = 0$ হলে পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করতে হবে।
মনে করি, $P(x, y)$ উক্ত পরাবৃত্তের উপর যেকোন একটি বিন্দু।

$\frac{SP}{MP} = e = 1$

$\Rightarrow SP = MP$

$\Rightarrow SP^2 = MP^2$

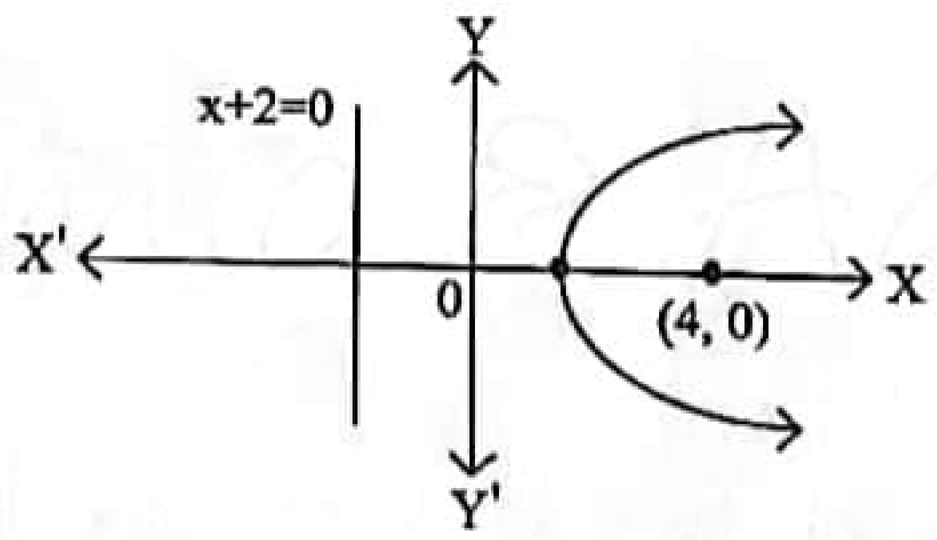
$\Rightarrow (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \frac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2}$



Tips: এক্ষেত্রে ব্যবহৃত সূত্র, $SP = ePM$
S = উপকেন্দ্র, P = পরাবৃত্তের উপর যেকোন বিন্দু, e = উৎকেন্দ্রিকতা

MCQ

01. From the figure below, equation of the parabola is- **[IUT'17-18]**

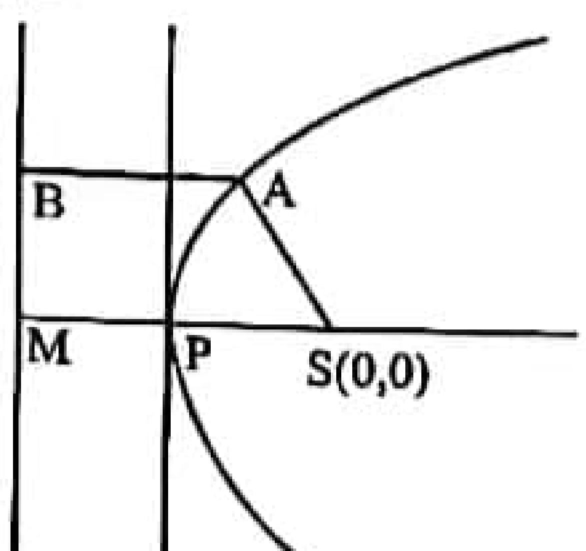


(a) $y^2 = 4(x-1)$ (b) $y^2 = 6(x-2)$ (c) $y^2 = 4(x-3)$ (d) $y^2 = 12(x-1)$
Solution: (a); From fig. we find vertex $= \left(\frac{4+(-2)}{2}, 0\right) = (1, 0)$ $\therefore$ eq^n $(y-0)^2 = 4(x-1)$ (Ans.)

02. এরূপ একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর, যার উপকেন্দ্র $(0,0)$ বিন্দুতে অবস্থিত এবং $x - y + 1 = 0$ রেখাটি উহার শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শ করে। **[KUET'11-12]**
(a) $(x+y)^2 - 7x = 9y + 2$ (b) $(x+y)^2 - 4x + 5y = 0$
(c) $(x+2y)^2 - 7x + 5y = 5$ (d) $(x-y)^2 + 4x = 7y$
(e) $(x+y)^2 - 4x + 4y - 4 = 0$

সমাধান: (e); প্রশ্নে অধিবৃত্তের সমীকরণ বের করতে বলা হয়েছে, কিন্তু প্রদত্ত ডাটা অনুযায়ী একমাত্র পরাবৃত্তের সমীকরণই নির্ণয় করা সম্ভব।
এখন, শীর্ষ স্পর্শক $x - y + 1 = 0$; এর উপর লম্বরেখার সমীকরণ $x + y + k = 0$ যা $(0,0)$ বিন্দুগামী।

$\therefore$ অক্ষের সমীকরণ, $x + y = 0$



$\therefore$ P বিন্দু স্থানাঙ্ক $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; P বিন্দু M ও S এর মধ্যবিন্দু। $\therefore$ M বিন্দু $(-1, 1)$

$\therefore$ M বিন্দুতে স্পর্শকের সমান্তরাল রেখা: $x - y + 2 = 0$

$\therefore$ দিকাক্ষের সমীকরণ: $x - y + 2 = 0$

$\therefore SA = AB \Rightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \frac{x-y+2}{\sqrt{2}} \Rightarrow 2(x^2+y^2) = (x-y+2)^2$

$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 - x^2 - y^2 + 2xy + 4y - 4x - 4 = 0 \Rightarrow (x+y)^2 - 4x + 4y - 4 = 0$

Written

03. $(-8,-2)$ উপকেন্দ্র ও $2x-y-9=0$ দিকাক্ষ বিশিষ্ট পরাবৃত্তের সমীকরণ বের কর। **[RUET'08-09]**

সমাধান: ধরি, পরাবৃত্তের উপর একটি চলমান বিন্দু $P(x,y)$

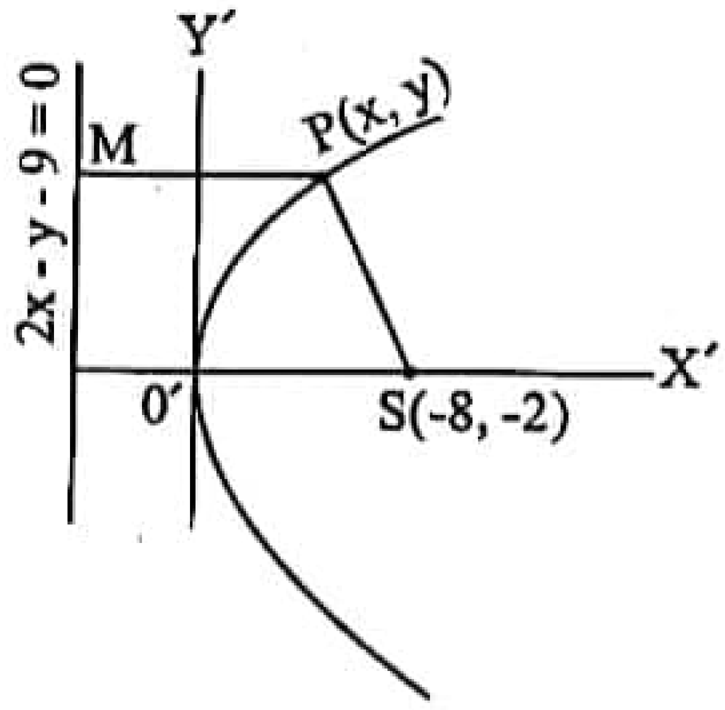
$\therefore$ সংজ্ঞানুসারে, $\frac{SP}{PM}=1 \Rightarrow SP^2=PM^2$

$\Rightarrow (x+8)^2+(y+2)^2=\left[\frac{2x-y-9}{\sqrt{2^2+1^2}}\right]^2$

$\Rightarrow x^2+64+16x+y^2+4+4y=\frac{4x^2+y^2+81-4xy+18y-36x}{5}$

$\Rightarrow 5x^2+5y^2+80x+20y+340=4x^2+y^2+81-4xy+18y-36x$

$\Rightarrow x^2+4y^2+116x+2y+4xy+259=0$ [Ans]



Question Type-06: উপকেন্দ্র ও শীর্ষে স্পর্শকের সমীকরণ / শীর্ষের স্থানাঙ্ক দেয়া আছে, সমীকরণ বের করতে হবে

➲ **Formula & Concept:**

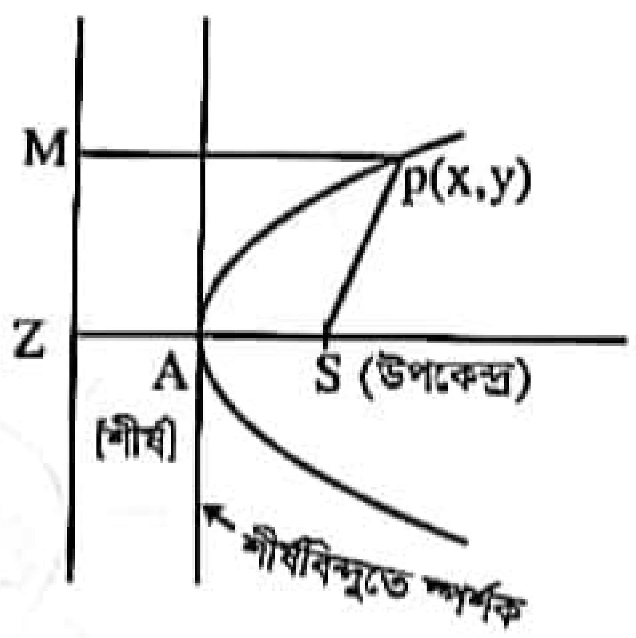
♦ **Process-1:** এক্ষেত্রে ব্যবহৃত সূত্র: | উপকেন্দ্র থেকে দিকাক্ষের দূরত্ব | = 2 × (উপকেন্দ্র থেকে শীর্ষে স্পর্শকের দূরত্ব) [$SZ=2.AS$]

♦ **Process-2:** Z ও S এর মধ্যবিন্দু শীর্ষ A

এখন,

- অক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর [অক্ষ ⊥ শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শক এবং উপকেন্দ্র (S) দিয়ে যায়]
- অক্ষ এবং শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শকের এর ছেদবিন্দু (পরাবৃত্তের শীর্ষ, A) নির্ণয় কর।
- এখন, Z ও S এর মধ্যবিন্দু শীর্ষ A শর্তে Z নির্ণয় কর
- নিয়ামক রেখা ∥ শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শক এবং Z বিন্দুগামী → নিয়ামক রেখার সমীকরণ নির্ণয় কর।
- $\frac{SP}{MP}=e=1 \Rightarrow \frac{SP}{MP}=1 \Rightarrow SP^2=MP^2$ দ্বারা পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর।

[যেখানে, $P(x,y)$ পরাবৃত্তের উপর যেকোন একটি বিন্দু]



MCQ

01. একটি পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু $(0,2)$ অক্ষরেখা y অক্ষরেখার সমান্তরাল এবং যা $(2,5)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে, তার সমীকরণ হলো–

(a) $4x^2=3(y-2)$ (b) $3x^2=12(y-2)$ (c) $3x^2=4(y-2)$ (d) $2x^2=3(y-2)$ **[BUTEX'12-13]**

সমাধান: (c); প্রশ্নমতে, সমীকরণ: $(x-0)^2=4a(y-2)$

$(2,5)$ বিন্দুগামী $\therefore (2-0)^2=4a(5-2) \Rightarrow 4a=\frac{4}{3}$; অর্থাৎ সমীকরণ: $x^2=\frac{4}{3}(y-2) \Rightarrow 3x^2=4(y-2)$

Written

02. $x-y+2=0$ রেখাটি কোন পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দুতে তার অক্ষের উপর লম্ব। পরাবৃত্তের ফোকাস $(1,-1)$ বিন্দুতে হলে তার সমীকরণ নির্ণয় কর। **[BUET'08-09]**

সমাধান: অক্ষের সমীকরণঃ $x+y+k=0$ যা $(1,-1)$ বিন্দুগামী

$\therefore x+y=0$ ……… (i)

$x-y+2=0$ ……… (ii)

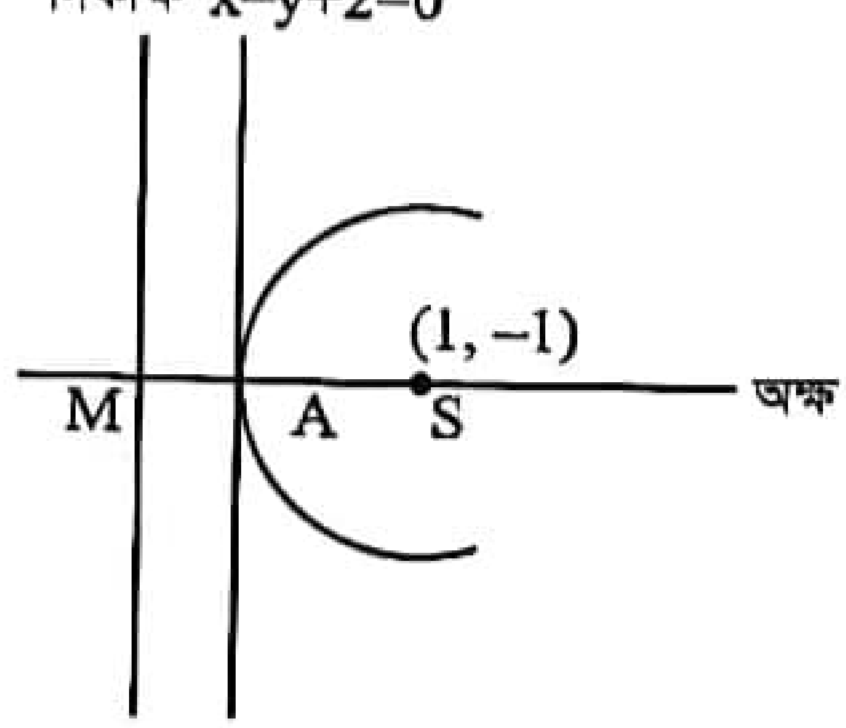
A হলো (i) ও (ii) এর ছেদবিন্দু। $\therefore A \equiv (-1,1)$

$\therefore M(\alpha,\beta)$ ও $S(1,-1)$ এর মধ্যবিন্দু A

$\therefore \frac{\alpha+1}{2}=-1 \Rightarrow \alpha=-3$; $\frac{\beta-1}{2}=1 \Rightarrow \beta=3$

$\therefore M(\alpha,\beta) \equiv (-3,3)$

$\therefore$ দিকাক্ষের সমীকরণ: $x-y-(-3-3)=0 \Rightarrow x-y+6=0$



সুতরাং, পরাবৃত্তের সমীকরণ: $(x-1)^2+(y+1)^2=\frac{(x-y+6)^2}{(\sqrt{2})^2}$

03. (3, 4) উপকেন্দ্র ও (0, 0) শীর্ষবিশিষ্ট পরাবৃত্তের দিকাক্ষের সমীকরণ নির্ণয় কর। [BUET'06-07]

সমাধান: পরাবৃত্তটির অক্ষের সমীকরণঃ $y = \frac{4}{3}x \Rightarrow 4x - 3y = 0$

মনে করি, দিকাক্ষ অক্ষরেখাকে (α, β) বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, $\frac{\alpha+3}{2} = 0$

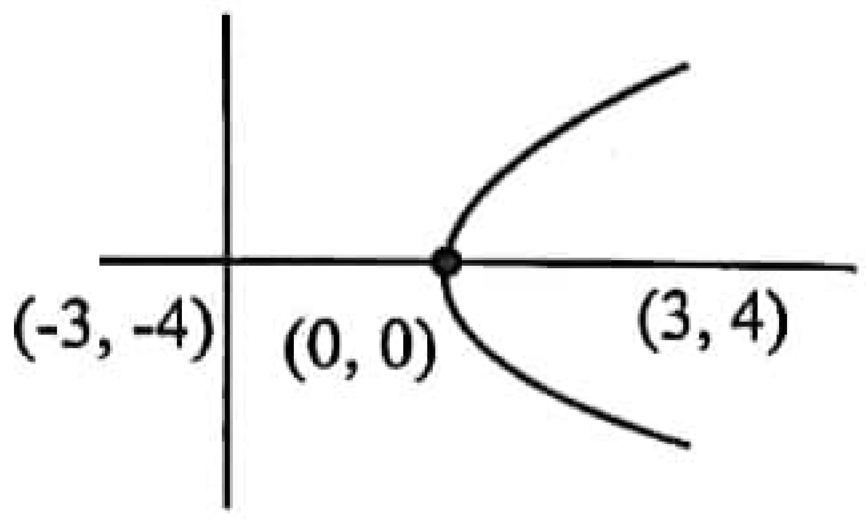
$\Rightarrow \alpha = -3$ এবং $\frac{\beta+4}{2} = 0 \Rightarrow \beta = -4$

অক্ষরেখার উপর লম্ব এরূপ সরলরেখার সমীকরণ, $3x + 4y + k = 0$

যেখানে, k ইচ্ছামূলক ধ্রুবক।

এটি $(-3, -4)$ বিন্দুগামী হলে, $-9 - 16 + k = 0 \Rightarrow k = 25$

দিকাক্ষের সমীকরণ, $3x + 4y + 25 = 0$ (Ans.)



04. একটি পরাবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র মূল বিন্দুতে অবস্থিত এবং $x - y + 1 = 0$ রেখাটি পরাবৃত্তকে এর শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শ করে। [BUET'05-06]

সমাধান: $SA = a = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

ধরি, দিকাক্ষের সমীকরণঃ $x - y + k = 0$

উপকেন্দ্র (0,0) থেকে দিকাক্ষের দূরত্ব $\frac{0-0+k}{\sqrt{1^2+1^2}} = 2a = 2.\frac{1}{\sqrt{2}} = 2$

$\therefore k = 2$. $\therefore$ দিকাক্ষের সমীকরণঃ $x - y + 2 = 0$.

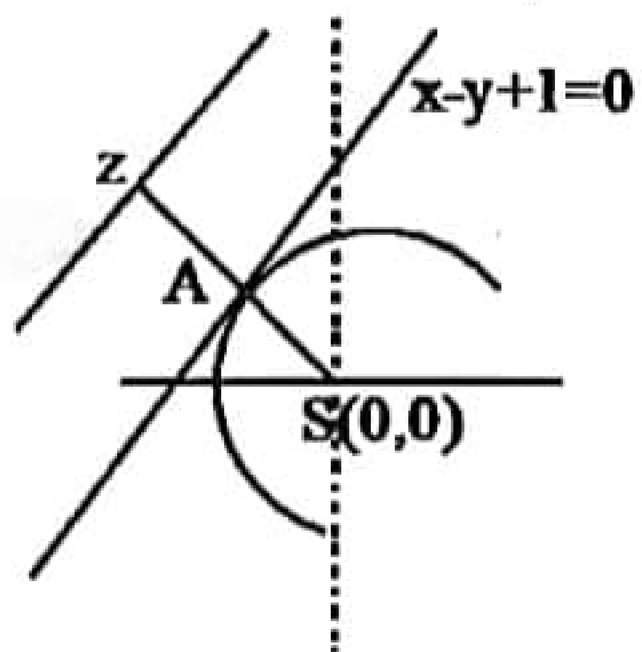
$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $\{(x-0)^2 + (y-9)^2\} = \frac{(x-y+2)}{(\sqrt{1^2+1^2})}$

$\Rightarrow 2(x^2 + y^2) = (x - y + 2)^2$

$\Rightarrow (x+y)^2 + (x-y)^2 = (x-y+2)^2 \Rightarrow (x+y)^2 = (x-y+2)^2 - (x-y)^2$

$\Rightarrow (x+y)^2 = (x-y+2+x-y)(x-y+2-x+y)$

$\Rightarrow (x+y)^2 = 2(2x-2y+2) \Rightarrow (x+y)^2 = 4\cdot(x-y+1)$



05. (−1, 1) উপকেন্দ্র এবং (2, −3) শীর্ষ বিন্দু বিশিষ্ট পরাবৃত্তটির অক্ষ ও নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [KUET'05-06]

সমাধান: অক্ষ ও দিকাক্ষের ছেদবিন্দু (x,y) হলে, $2 = \frac{-1+x}{2} \Rightarrow x = 5$

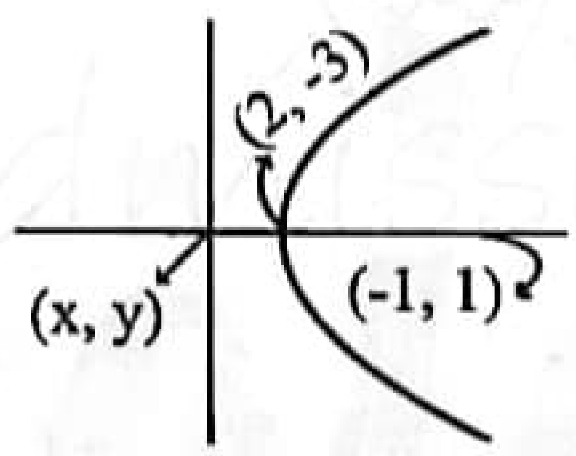
$-3 = \frac{1+y}{2}$ $\therefore y = -7$

$\therefore (x,y) = (5,-7)$

$\therefore$ অক্ষের সমীকরণ, $\frac{x-5}{5+1} = \frac{y+7}{-7-1} \Rightarrow \frac{x-5}{3} = \frac{y+7}{-4}$

$\Rightarrow -4x + 20 = 3y + 21 \Rightarrow 4x + 3y + 1 = 0$ (Ans.)

$\therefore$ দিকাক্ষের বা নিয়ামকের সমীকরণ, $3x - 4y + c = 0$ $\therefore 3(5) - 4(-7) + c = 0 \Rightarrow c = -43$ $\therefore 3x - 4y - 43 = 0$ (Ans.)



Question Type-07: বহিঃস্থ বিন্দু থেকে পরাবৃত্তের ক্ষুদ্রতম দূরত্ব

Formula & Concept:

এই সমস্যাগুলোর ক্ষেত্রে পরাবৃত্তের উপরস্থ একটি বিন্দু P (x, y) ধরে বহিঃস্থ বিন্দু থেকে এর দূরত্ব নির্ণয় করা হয়। এরপর অন্তরীকরণের গুরুমান লঘুমানের শর্তসমূহ ব্যবহার করে ন্যূনতম দূরত্ব নির্ণয় করা যায়।

Written

01. $y = x^2$ বক্র রেখার উপর একটি বিন্দু নির্ণয় কর যা (18, 0) বিন্দুর সর্বোচ্চ নিকটবর্তী। [RUET'18-19]

সমাধানঃ ধরি, নির্ণেয় বিন্দু (x, y); (x, y) হতে (18, 0) বিন্দুর দূরত্ব, $D = \sqrt{(x-18)^2 + y^2}$

$\therefore D^2 = (x-18)^2 + y^2 = (x-18)^2 + x^4$. $[\because y = x^2]$

ন্যূনতম দূরত্বের জন্য, $\frac{d}{dx}(D^2) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}[(x-18)^2 + x^4] = 0$

$\Rightarrow 2(x-18) + 4x^3 = 0 \Rightarrow 2x - 36 + 4x^3 = 0$

Solving by calculator, $x = 2$ $[\because x \in \mathbb{R}]$ $\therefore y = x^2 = 2^2 = 4$ $\therefore$ বিন্দুটি $(x,y) \equiv (2,4)$(Ans.)

Question Type-08: পরাবৃত্ত সংক্রান্ত

Formula & Concept:

এক্ষেত্রে চিত্র এঁকে প্রশ্নে প্রদত্ত ডাটা বিশ্লেষণ করে পরাবৃত্তের সাথে তুলনা করে কাঙ্ক্ষিত উত্তর বের করতে হবে।

Written

01. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ দুইবার বর্গ করে কণিকটি সনাক্ত কর। অক্ষের সমীকরণ, শীর্ষবিন্দু এবং স্থানাঙ্ক অক্ষদ্বয়ের স্পর্শ বিন্দু দেখিয়ে ছবি আঁক। **[BUET'02-03]**

সমাধান: $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a} \Rightarrow \sqrt{x}=\sqrt{a}-\sqrt{y}$

$\Rightarrow x=a+y-2\sqrt{ay} \Rightarrow (x-y-a)^2=4ay \Rightarrow x^2+y^2+a^2-2xy+2ay-2ax=4ay$

$\Rightarrow (x-y)^2=2ay+2ax-a^2 \Rightarrow (x-y)^2=a(2y+2x-a)$ $\therefore$ কণিকটি একটি পরাবৃত্ত।

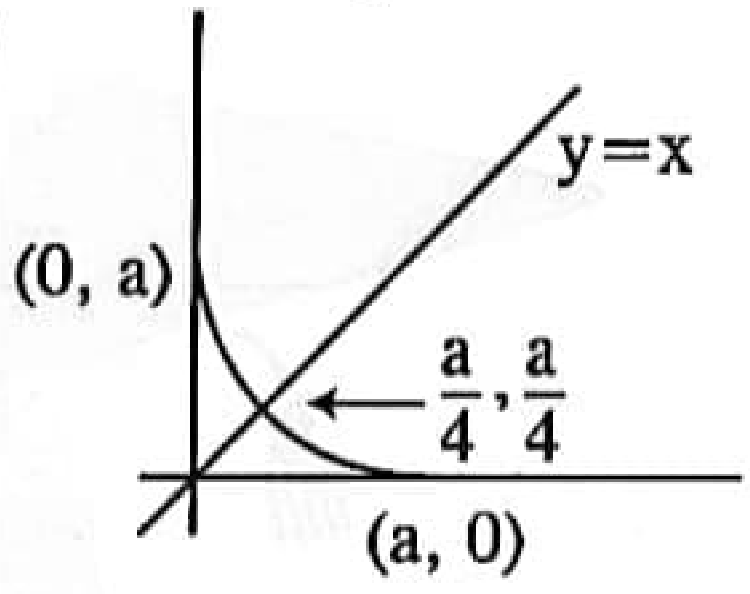
অক্ষ $x-y=0 \;\Rightarrow \sqrt{x}=\sqrt{a}-\sqrt{y}$

শীর্ষ $x-y=0$ এবং $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$ এর ছেদক।

$\sqrt{x}+\sqrt{x}=\sqrt{a} \Rightarrow 2\sqrt{x}=\sqrt{a}$

$x=\frac{a}{4}$, $y=\frac{a}{4}$

$\therefore$ শীর্ষ-এর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{a}{4},\frac{a}{4}\right)$, x অক্ষে ছেদবিন্দু $(a,0)$, Y অক্ষে ছেদবিন্দু $(0,a)$



Question Type-09: উপবৃত্তের সমীকরণ থেকে বিভিন্ন উপাদান নির্ণয় করা সংক্রান্ত

Formula & Concept:

এসব ক্ষেত্রে $\frac{x^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$, আকারের উপবৃত্তের আদর্শ সমীকরণের সাথে তুলনা করে বিভিন্ন উপাদান বের করতে হবে।

ক্রমিক নং	আদর্শ সমীকরণ	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, a>b$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, a<b$	$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1, a>b$	$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1, a<b$
(i)	কেন্দ্র, C	$(0,0)$	$(0,0)$	(α,β)	(α,β)
(ii)	বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য	2a	2b	2a	2b
(iii)	ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য	2b	2a	2b	2a
(iv)	উপকেন্দ্র, S	$(\pm ae, 0)$	$(0, \pm be)$	$(\alpha \pm ae, \beta)$	$(\alpha, \beta \pm be)$
(v)	বৃহৎ অক্ষের সমীকরণ	$y=0$	$x=0$	$y-\beta=0$	$x-\alpha=0$
(vi)	ক্ষুদ্র অক্ষের সমীকরণ	$x=0$	$y=0$	$x-\alpha=0$	$y-\beta=0$
(vii)	দিকাক্ষের সমীকরণ	$x=\pm\frac{a}{e}$	$y=\pm\frac{b}{e}$	$x=\alpha\pm\frac{a}{e}$	$y=\beta\pm\frac{b}{e}$
(viii)	উপকেন্দ্রিক লম্ব, LL'	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2a^2}{b}$	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2a^2}{b}$
(ix)	উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ	$x=\pm ae$	$y=\pm be$	$x=\alpha\pm ae$	$y=\beta\pm be$
(x)	উপকেন্দ্রিক লম্বের প্রান্তবিন্দুগুলো	$\left(\pm ae, \pm\frac{b^2}{a}\right)$	$\left(\pm\frac{a^2}{b}, \pm be\right)$	$\alpha\pm ae, \beta\pm\frac{b^2}{a}$	$\alpha\pm\frac{a^2}{b}, \beta\pm be$
(xi)	উৎকেন্দ্রিকতা, e	$\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$	$\sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^2}}=\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}$	$\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$	$\sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^2}}=\sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}}$

ক্রমিক নং	আদর্শ সমীকরণ	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, a>b$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, a<b$	$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1, a>b$	$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1, a<b$
(xii)	বৃহৎ অক্ষের প্রান্ত বিন্দু (শীর্ষবিন্দু)	$(\pm a, 0)$	$(0, \pm b)$	$(\alpha \pm a, \beta)$	$(\alpha, \beta \pm b)$
(xiii)	ক্ষুদ্র অক্ষের প্রান্ত বিন্দু	$(0, \pm b)$	$(\pm a, 0)$	$(\alpha, \beta \pm b)$	$(\alpha \pm a, \beta)$
(xiv)	ফোকাসদ্বয়ের দূরত্ব, SS′	2ae	2be	2ae	2be
(xv)	নিয়ামকের দূরত্ব, ZZ′	$2\frac{a}{e}$	$2\frac{b}{e}$	$2\frac{a}{e}$	$2\frac{b}{e}$
(xvi)	ক্ষেত্রফল	πab	πab	πab	πab
(xvii)	পরামিতিক সমীকরণ	$x = a\cos\theta, y = b\sin\theta$, যেখানে $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{ay}{bx}\right)$	$x = a\cos\theta, y = b\sin\theta$, যেখানে $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{ay}{bx}\right)$	$x = \alpha + a\cos\theta, y = \beta + b\sin\theta$ যেখানে $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{a(y-\beta)}{b(x-\alpha)}\right)$	$x = \alpha + a\cos\theta, y = \beta + b\sin\theta$, যেখানে $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{a(y-\beta)}{b(x-\alpha)}\right)$

MCQ

01. For the ellipse $5x^2 + 4y^2 = 20$, find the equation of the directrix. **[IUT'21-22]**
(a) $y = \pm 5$ (b) $x = \pm 5$ (c) $y = \pm\sqrt{5}$ (d) $x = \pm\sqrt{5}$
Solution: (a); $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1 \therefore a = 2, b = \sqrt{5}\ (b > a); e = \sqrt{1-\frac{a^2}{b^2}} = \sqrt{1-\frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$
Equation of the directrix, $y = \pm be = \pm\sqrt{5} \times \sqrt{5} = \pm 5$

02. The equation of an ellipse is $4x^2 + 9y^2 = 36$. The area (in square unit) bounded by the ellipse is-
(a) 6π (b) 2π (c) 8π (d) 12π **[IUT'21-22]**
Solution: (a); $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \therefore a = 3, b = 2 \therefore \text{Area} = \pi ab = \pi(3)(2)\text{ sq. units} = 6\pi\text{ sq. units}$

03. Consider an ellipse with major and minor axes along the x-axis and y-axis. If the length of the minor axis is three times the length of the latus rectum, find the eccentricity. **[IUT'19-20]**
(a) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ (b) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (c) $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ (d) $\frac{\sqrt{2}}{3}$
Solution: (b); Length of minor axis = 3 × length of latus rectum
$\Rightarrow 2b = 3 \times \frac{2b^2}{a} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{9}$; Now, $e = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

04. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **[Ans: b] [RUET'14-15]**
(a) πa^2 (b) πab (c) $\frac{\pi}{4}ab$ (d) ab (e) None

05. $3x^2 + 5y^2 = 15$ উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা হবে- **[KUET'06-07, BUTEX'14-15]**
(a) $\sqrt{\frac{3}{5}}$ (b) $\sqrt{\frac{5}{3}}$ (c) $\sqrt{\frac{5}{2}}$ (d) $\sqrt{\frac{2}{5}}$
সমাধান: (d); $e = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1-\frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{2}{5}}\ \left[\because 3x^2+5y^2=15 \Rightarrow \frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=1\right]$

06. $25x^2 + 16y^2 = 400$ উপবৃত্তটির উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য কত? **[BUTEX'12-13, 13-14]**
(a) $\frac{7}{30}$ (b) $\frac{32}{5}$ (c) $\frac{5}{32}$ (d) $\frac{30}{7}$
সমাধান: (b); $25x^2 + 16y^2 = 400 \Rightarrow \frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{5^2}=1 \therefore a = 4;\ b = 5;\ b > a$
$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2a^2}{b} = \frac{2\times4^2}{5} = \frac{32}{5}$ একক।

07. কোন উপবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্ব উপবৃত্তটির বৃহৎ অক্ষের অর্ধেক। এর উপকেন্দ্রিকতা হল- **[BUET'11-12]**

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (c) 2 (d) $\sqrt{2}$

সমাধান: (b); উপকেন্দ্রিক লম্ব $= \frac{2b^2}{a}$ ও বৃহৎ অক্ষ $= 2a$; $\frac{2b^2}{a} = \frac{2a}{2} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{2}$ $\therefore e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

08. কোন উপবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্ব উপবৃত্তটির বৃহৎ অক্ষের অর্ধেক। তার উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর।

(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ **[BUET'08-09]**

সমাধান: (d); $\frac{2b^2}{a} = a \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{1}{2} \therefore e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Written

09. $2x^2 + y^2 - 8x - 2y + 1 = 0$ কনিকটিকে প্রমিত আকারে প্রকাশ কর এবং উপকেন্দ্র নির্ণয় কর। **[BUTEX'21-22]**

সমাধান: $2x^2 + y^2 - 8x - 2y + 1 = 0 \Rightarrow 2(x^2 - 4x + 4) + y^2 - 2y + 1 = 8 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{8} = 1$

$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{2^2} + \frac{(y-1)^2}{(2\sqrt{2})^2} = 1$; যা একটি উপবৃত্ত। $\therefore$ প্রদত্ত কনিকটিকে প্রমিত আকারে প্রকাশ করা হলো।

$\therefore$ উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 - \frac{a^2}{b^2}} [\because a < b] = \sqrt{1 - \frac{4}{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\therefore$ উপকেন্দ্রের ক্ষেত্রে, $x - 2 = 0$ $\therefore x = 2$

এবং $y - 1 = \pm be \Rightarrow y - 1 = \pm 2\sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y - 1 = \pm 2$ $\therefore y = 3, -1$ উপকেন্দ্রদ্বয় $(2, 3), (2, -1)$

10. $16x^2 + 9y^2 - 32x - 128 = 0$ উপবৃত্তটির অক্ষদ্বয়ের দৈর্ঘ্য এবং ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **[CUET'13-14]**

সমাধান: $16x^2 + 9y^2 - 32x - 128 = 0 \Rightarrow 16x^2 - 32x + 16 + 9y^2 = 144$

$\Rightarrow 16(x-1)^2 + 9y^2 = 144 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

$\therefore a = 3$
$b = 4$

$\therefore$ বৃহৎ অক্ষ $= 8$, ক্ষুদ্র অক্ষ $= 6$, ক্ষেত্রফল $= \pi ab = 12\pi$ [Ans. $8, 6, 12\pi$]

11. p - এর মান কত হলে $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{5^2} = 1$ উপবৃত্তটি $(6, 4)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করবে। উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রিকতা এবং উপকেন্দ্রের অবস্থান নির্ণয় কর। **[RUET'08-09, 13-14]**

সমাধান: $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{5^2} = 1$; $(6,4) \rightarrow \frac{36}{p} + \frac{16}{25} = 1 \Rightarrow \frac{36}{p} = \frac{9}{25} \Rightarrow p = \frac{25 \times 36}{9} = 100$ $\therefore \frac{x^2}{10^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$

$a = 10, b = 5$ $\therefore e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{10}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore S = (\pm ae, 0) = \left(\pm 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right) = (\pm 5\sqrt{3}, 0)$

$p = 100, e = \frac{\sqrt{3}}{2}, S \equiv (\pm 5\sqrt{3}, 0)$ (Ans.)

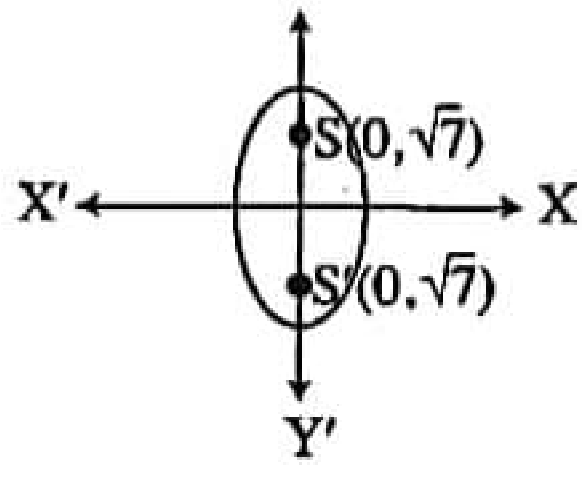
12. ফোকাসদ্বয়ের স্থানাংক উল্লেখপূর্বক খালি হাতে $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ উপবৃত্তটি অংকন কর। **[RUET'06-07]**

সমাধান:

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ তাই, $a = 3, b = 4$

$\therefore e = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{b^2}} = \sqrt{\frac{16-9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

$\therefore$ ফোকাসদ্বয়, $(0, \pm be) \equiv (0, \pm\sqrt{7})$

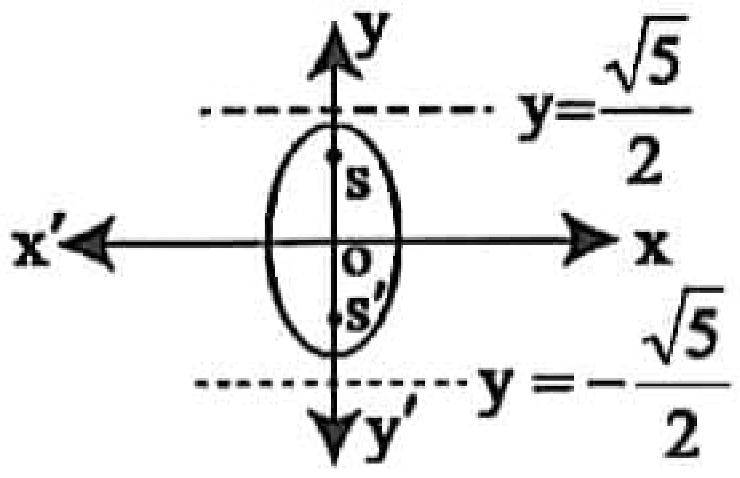


13. $5x^2 + 4y^2 = 1$ উপবৃত্তের দিকাক্ষগুলোর সমীকরণ ও ফোকাসদ্বয় কী কী ? [BUET'04-05]

সমাধান: $5x^2 + 4y^2 = 1$ সমীকরণকে $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাই,

$a^2 = \frac{1}{5},\ b^2 = \frac{1}{4},\ a = \frac{1}{\sqrt{5}} < b = \frac{1}{2}$

উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$



এখন দিকাক্ষ, $y = \pm\frac{b}{e} \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow 2y \pm \sqrt{5} = 0$ (Ans.)

ফোকাস, $(0, \pm be) = \left(0, \pm\frac{1}{2\sqrt{5}}\right)$ (Ans.)

14. $5x^2 + 9y^2 - 20x = 25$ উপবৃত্তের কেন্দ্র ও উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [BUET'02-03]

সমাধান: $5x^2 + 9y^2 - 20x = 25$

$\Rightarrow 5(x^2 - 4x + 4) + 9y^2 = 45$

$\Rightarrow 5(x-2)^2 + 9y^2 = 45$

$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1 \therefore$ কেন্দ্র (2, 0) (Ans.)

উৎকেন্দ্রিকতা e হলে,

$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9} \quad \therefore e = \frac{2}{3}$

উপকেন্দ্র, $X = x - 2 = \pm ae \Rightarrow x - 2 = \pm 3 \times \frac{2}{3}$

$\therefore x = 0, 4 \therefore$ উপকেন্দ্র $(0, 0); (4, 0)$

Question Type-10: বিভিন্ন শর্ত থেকে উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় সংক্রান্ত

Formula & Concept:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ আদর্শ সমীকরণের সাথে তুলনা করে অন্যান্য উপাদানের মান বের করতে হবে।

MCQ

01. এরূপ উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার অক্ষদ্বয় স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়ের উপর অবস্থিত, উপকেন্দ্রিক লম্ব ও উৎকেন্দ্রিকতা যথাক্রমে 8 এবং $\frac{1}{\sqrt{2}}$। [CKRUET'21-22]

(a) $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{64} = 1$ (b) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{32} = 1$ (c) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$ (d) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ (e) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{81} = 1$

সমাধান:**(b)**; $e = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{2b^2}{a} = 8 \Rightarrow b^2 = 4a \therefore e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow \frac{1}{2} = 1 - \frac{4a}{a^2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{4}{a} \Rightarrow a = 8 \therefore b^2 = 32$

$\therefore$ নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{8^2} + \frac{y^2}{32} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{32} = 1$

02. বৃহৎ অক্ষ ও ক্ষুদ্র অক্ষকে যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ ধরে একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{3}$ এবং বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য 12 একক। [CKRUET'20-21]

(a) $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{36} = 1$ (b) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{32} = 1$ (c) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{32} = 1$ (d) $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{16} = 1$ (e) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{32} = 1$

সমাধান: (c); $2a = 12 \Rightarrow a = 6; b = a\sqrt{1-e^2} = 6\sqrt{1-\frac{1}{9}} = 6 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = 4\sqrt{2}$

$\frac{x^2}{6^2} + \frac{y^2}{(4\sqrt{2})^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{32} = 1$

03. উপকেন্দ্রিক লম্ব ও উৎকেন্দ্রিকতা যথাক্রমে 8 ও $\frac{1}{\sqrt{2}}$ এবং যার অক্ষদ্বয় স্থানাংকের অক্ষদ্বয়ের উপর অবস্থিত, এরূপ উপবৃত্তের সমীকরণ কোনটি? [KUET'18-19]

(a) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{32} = 1$ (b) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ (c) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ (d) $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{64} = 1$ (e) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{32} = 1$

সমাধান: (e); $\frac{2b^2}{a} = 8 \Rightarrow b^2 = 4a; e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$

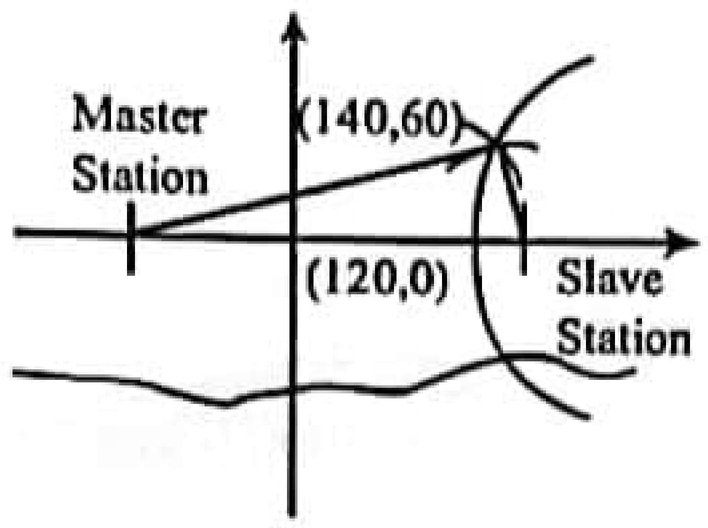
$\Rightarrow \frac{1}{2} = 1 - \frac{4a}{a^2} \Rightarrow a = 8 \Rightarrow a^2 = 64 \therefore b^2 = 32 \therefore \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{32} = 1$

04. একটি উপবৃত্তের অক্ষদ্বয়ের স্থানাংক অক্ষদ্বয়ের উপর অবস্থিত উপবৃত্তটি $\frac{x}{5}+\frac{y}{2}=1$ রেখাকে x-অক্ষের উপরে এবং $\frac{x}{2}+\frac{y}{6}=1$ রেখাকে y অক্ষের উপরে ছেদ করে। উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রিকতা কোনটি? [KUET'17-18]

(a) $\frac{\sqrt{7}}{6}$ (b) $\frac{\sqrt{11}}{6}$ (c) $\frac{\sqrt{13}}{6}$ (d) $\frac{\sqrt{5}}{6}$ (e) $\frac{\sqrt{17}}{6}$

সমাধানঃ (b); উপবৃত্তটি, $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{6^2}=1 \therefore e=\sqrt{\frac{6^2-5^2}{6^2}}=\frac{\sqrt{11}}{6}$

05. Long-range navigation (LORAN) is a radio navigation system developed during World War II. The system enables a pilot to guide aircraft by maintaining a constant difference between the aircraft's distances from two fixed points: the master station and the slave station. Write an equation for the hyperbola depicted in the following figure. [IUT'16-17]



(a) $\frac{x^2}{3600}-\frac{13y^2}{19600}=1$ (b) $\frac{x^2}{19600}-\frac{y^2}{3600}=1$ (c) $\frac{x^2}{14400}-\frac{y^2}{19600}=1$ (d) $\frac{x^2}{14400}-\frac{13y^2}{129600}=1$

Solution: (d); $\frac{140^2}{14400}-\frac{1360^2}{129600}=1$ [Check the options by plotting the point (140, 60) in the equation.]

06. একটি উপবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্ব উহার ক্ষুদ্র অক্ষের সমান। উপবৃত্তটি $(0,1)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করলে উহার সমীকরণ নির্ণয় কর। [KUET'14-15]

(a) $3x^2+y^2=16$ (b) $3x^2+y^2=11$ (c) $x^2+y^2=9$ (d) $x^2+9y^2=25$ (e) $x^2+4y^2=4$

সমাধান: (e); শুধুমাত্র (e) নং-ই $(0,1)$ বিন্দুগামী।

07. একটি উপবৃত্তের শীর্ষদ্বয় $(0,\pm5)$ ও দিকাক্ষদ্বয় $y=\pm\frac{25}{3}$ হলে উপবৃত্তের সমীকরণ হল- [Ans: d][KUET'13-14]

(a) $16x^2+25y^2=400$ (b) $9x^2+25y^2=225$
(c) $25x^2+9y^2=225$ (d) $25x^2+16y^2=400$ (e) $9x^2+16y^2=144$

08. ধরি উপবৃত্তের বৃহৎ ও ক্ষুদ্র অক্ষ যথাক্রমে x ও y অক্ষ বরাবর। যদি উপবৃত্তটির ফোকাসদ্বয়ের মধ্যকার দূরত্ব 8 একক এবং দিকাক্ষদ্বয়ের মধ্যকার দূরত্ব 18 একক হয়, তবে তার সমীকরণ- [KUET'12-13]

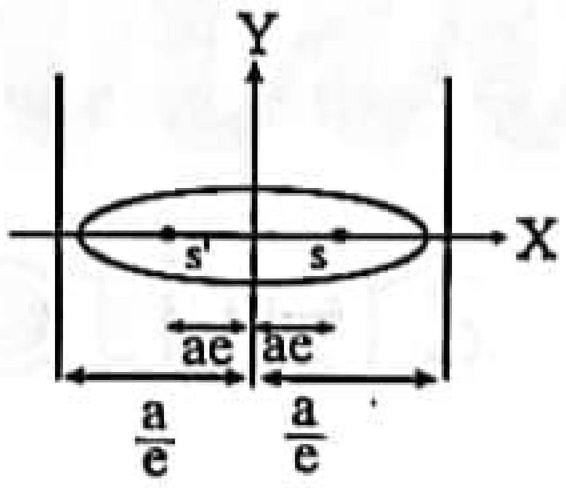
(a) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{81}=1$ (b) $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{16}=1$ (c) $\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{36}=1$ (d) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1$ (e) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$

সমাধান: (e); প্রশ্নমতে, $2ae=8$........(i); $\frac{2a}{e}=18$.........(ii)

(i) × (ii) $\Rightarrow 4a^2=144\Rightarrow a^2=36$

(i) ÷ (ii) $\Rightarrow e^2=\frac{4}{9}\Rightarrow 1-\frac{b^2}{a^2}=\frac{4}{9}\Rightarrow b^2=20$

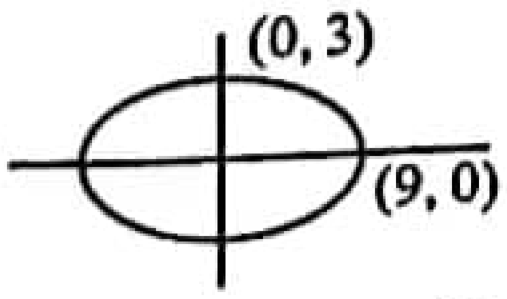
$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ বা, $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$ (Ans.)



Written

09. একটি উপবৃত্তের অক্ষদ্বয় স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয় বরাবর অবস্থিত। উপবৃত্তটি $\frac{x}{9}+\frac{y}{4}=1$ রেখাকে x-অক্ষের উপর এবং $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ রেখাকে y-অক্ষের উপর ছেদ করে। উপবৃত্তটির সমীকরণ, উৎকেন্দ্রিকতা এবং উপকেন্দ্র দুটির স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। [BUET'11-12]

সমাধান:



$\frac{x}{9}+\frac{y}{4}=1$ রেখা x-অক্ষকে $(9,0)$ বিন্দুতে ছেদ করে; $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ রেখা y-অক্ষকে $(0,3)$ বিন্দুতে ছেদ করে

$\therefore$ উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{9^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$; উৎকেন্দ্রিকতা, $e=\sqrt{1-\frac{3^2}{9^2}}=\frac{\sqrt{72}}{9}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(\pm ae,0)\Rightarrow(\pm9\times\frac{\sqrt{72}}{9},0)\Rightarrow(\pm\sqrt{72},0)\Rightarrow(\pm6\sqrt{2},0)$

10. কোন উপবৃত্তের অক্ষদ্বয় স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয় বরাবর আছে এবং তা $5x + 9y = 45$ রেখাকে x -অক্ষের উপর এবং $7x + 5y = 36$ রেখাকে y- অক্ষের উপর ছেদ করে। তার উৎকেন্দ্রতা ও উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাঙ্ক নির্ণয় কর। **[BUET'07-08]**

সমাধান: মনে করি, উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ……… (i); প্রশ্নমতে এটি $\left(\frac{45}{5},0\right)$ বা $(9,0)$

এবং $\left(0,\frac{36}{5}\right)$ বিন্দুগামী $\therefore \left(\frac{36}{5}\right)^2=b^2$; সুতরাং, $\left(\frac{45}{5}\right)^2=a^2 \therefore a^2=81$

$e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}=1-\left(\frac{\frac{36}{5}}{9}\right)^2=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25} \quad \therefore e=\frac{3}{5} \therefore$ উপকেন্দ্র $(\pm ae,0)\equiv\left(\pm\frac{27}{5},0\right)$

11. একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্রিক লম্ব 5 এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{2}{3}$। **[CUET'05-06]**

সমাধান: ধরি, নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$e^2=1-\frac{b^2}{a^2}\Rightarrow\frac{4}{9}=1-\frac{b^2}{a^2}\Rightarrow\frac{b^2}{a^2}=\frac{5}{9}$ ……… (i)

$\therefore \frac{\frac{5a}{2}}{a^2}=\frac{5}{9}$ [(i) থেকে] $\therefore a=\frac{9}{2}$ এবং $\frac{2b^2}{a}=5\Rightarrow b^2=\frac{5a}{2}$ ……… (ii)

$\therefore b^2=\frac{5}{2}\times\frac{9}{2}=\frac{45}{4} \quad \therefore \frac{x^2}{\frac{81}{4}}+\frac{y^2}{\frac{45}{4}}=1\Rightarrow 20x^2+36y^2=405$ (Ans.)

12. একটি উপবৃত্তের অক্ষদ্বয় স্থানাংকের অক্ষদ্বয় বরাবর অবস্থিত। $3x+2y-9=0$ সরলরেখাটি উপবৃত্তটিকে অক্ষদ্বয়ের উপর ছেদ করে। উপবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর এবং উহার উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাংক নির্ণয় কর। **[BUTEX'01-02]**

সমাধান: উপবৃত্তটির সাধারণ সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$………(i)

প্রদত্ত রেখা $3x+2y-9=0 \Rightarrow \frac{x}{3}+\frac{y}{\frac{9}{2}}=1 \quad \therefore$ উপবৃত্তটির ছেদবিন্দু হবে- $(3,0),\left(0,\frac{9}{2}\right)$

বিন্দু দুটি সমীকরণ (i) কে সিদ্ধ করে, $\frac{9}{a^2}=1\Rightarrow a=3;\frac{81}{4\times b^2}=1 \quad\Rightarrow b=\frac{9}{2}$

$\therefore$ সমীকরণটি হবে, $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{81/4}=1 \Rightarrow 9x^2+4y^2=81$ (Ans.)

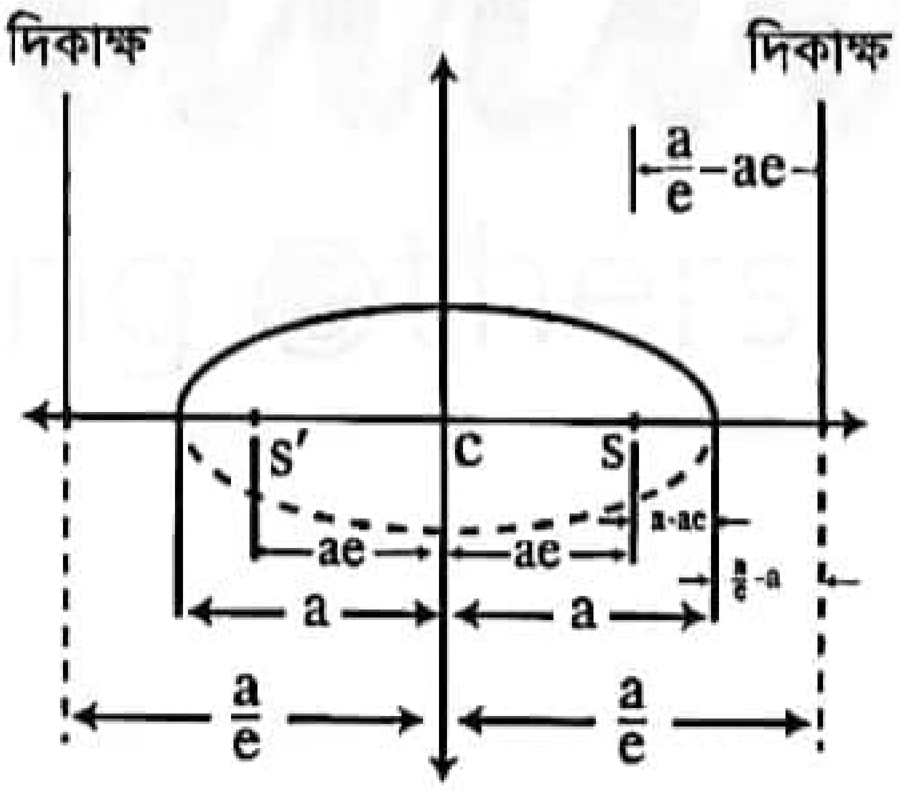
$\therefore e^2=\frac{b^2-a^2}{b^2}$ [$\because b>a$] $\Rightarrow e^2=1-\frac{9\times4}{81}\Rightarrow e^2=\frac{45}{81}\Rightarrow e=\frac{\sqrt{5}}{3}$

$\therefore$ উপকেন্দ্রদ্বয় $(0,\pm be)=\left(0,\pm\frac{9}{2}\times\frac{\sqrt{5}}{3}\right)=\left(0,\pm\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$ (Ans.)

Question Type-11: উপকেন্দ্র ও দিকাক্ষের /শীর্ষের মধ্যবর্তী দূরত্ব সংক্রান্ত

Formula & Concept:

- উপকেন্দ্র ও অনুরূপ দিকাক্ষের মধ্যবর্তী দূরত্ব $=\frac{a}{e}-ae$
- উপকেন্দ্র ও বিপরীত দিকাক্ষের মধ্যবর্তী দূরত্ব $=\frac{a}{e}+ae$
- উপকেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $=2ae$
- দিকাক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব $=2\frac{a}{e}$
- উপকেন্দ্র ও অনুরূপ শীর্ষের মধ্যবর্তী দূরত্ব $=a-ae$
- উপকেন্দ্র ও বিপরীত শীর্ষের মধ্যবর্তী দূরত্ব $=a+ae$
- $(a+ae)(a-ae)=b^2$



MCQ

01. The orbit of the earth around the sun is an ellipse with the sun at one focal point. If the ellipse has a major axis of length 186 million miles and an eccentricity of approximately 0.016. Then, the shortest and greatest distances between the earth and the sun are- **[IUT'14-15]**

(a) 91.5 and 184.5 million miles, respectively
(b) 92.9 and 185.5 million miles, respectively
(c) 92.9 and 184.5 millions miles, respectively
(d) 91.5 and 185.5 millions miles, respectively

Solution: (No answer); $2a=186\Rightarrow a=93$; $e=0.016$

$\therefore$ Shortest distance $=a-ae=91.5$ millions miles; Greatest distance $=a+ae=94.488$ millions miles

02. $4x^2 + 5y^2 = 1$ উপবৃত্তের একটি ফোকাস এবং ইহার অনুরূপ দিকাক্ষের মধ্যকার দূরত্ব নির্ণয় কর? [CUET'11-12]

(a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (b) 4 (c) $4\sqrt{5}$ (d) None of these

সমাধান: (d) ; $4x^2 + 5y^2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y^2}{\frac{1}{5}} = 1 \quad \therefore e = \sqrt{\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

এখানে, $a^2 = \frac{1}{4} \therefore a = \frac{1}{2}$ এবং $b^2 = \frac{1}{5} \therefore b = \frac{1}{\sqrt{5}}$

∴ উপবৃত্তের ১টি ফোকাস ও তার অনুরূপ দিকাক্ষের মধ্যকার দূরত্ব $= ae - \frac{a}{e} = \frac{1}{2\sqrt{5}} - \frac{\sqrt{5}}{2}$

$= \left|\frac{1-5}{2\sqrt{5}}\right| = \left|\frac{-4}{2\sqrt{5}}\right| = \left|\frac{-2}{\sqrt{5}}\right| = \left|\frac{2}{\sqrt{5}}\right|$ [∵ দূরত্ব সর্বদা ধনাত্মক]

03. কোন উপবৃত্তের ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্যের অর্ধেক তার কেন্দ্র ও উপকেন্দ্রের মধ্যবর্তী দূরত্বের সমান হলে তার উপকেন্দ্রিকতা হবে-

(a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (c) $\sqrt{2}$ (d) $\frac{1}{2}$ [BUET'10-11]

সমাধান: (a); $b = ae \therefore e = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}} \Rightarrow a^2e^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow a^2e^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow a^2 = 2b^2 \therefore e = \sqrt{\frac{2b^2-b^2}{2b^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Written

04. কোন উপবৃত্তের ক্ষুদ্র অক্ষের দৈর্ঘ্য তার উপকেন্দ্র দুটির মধ্যকার দূরত্বের সমান এবং উপকেন্দ্রিক লম্ব 10; উপবৃত্তটির উৎকেন্দ্রিকতা ও সমীকরণ নির্ণয় কর। [BUET'09-10]

সমাধান: ধরি, সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; a > b$

শর্তমতে, $2b = 2ae \Rightarrow b = ae.......(i)$ এবং $\frac{2b^2}{a} = 10 \Rightarrow b^2 = 5a.......(ii)$

(i) হতে পাই, $b^2 = a^2e^2 \Rightarrow b^2 = a^2\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) \Rightarrow 5a = a^2\left(1 - \frac{5a}{a^2}\right)$

$\Rightarrow 5 = a\left(1 - \frac{5}{a}\right)$ তাহলে, $\Rightarrow \frac{5}{a} = 1 - \frac{5}{a} \quad \therefore \frac{10}{a} = 1 \quad \therefore a = 10 \quad \therefore a^2 = 100 \quad \therefore b^2 = 5 \times 10 = 50$

$e^2 = 1 - \frac{50}{100} = \frac{1}{2} \therefore e = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ∴সমীকরণ, $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{50} = 1$(Ans.)

Question Type-12: উপবৃত্তের পরামিতিক সমীকরণ সংক্রান্ত

Formula & Concept:

কার্তেসীয় সমীকরণ	পরামিতিক সমীকরণ (ত্রিকোণমিতিক)	পরামিতিক সমীকরণ (বীজগাণিতিক)	ধরন
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$x = a\cos\theta, y = b\sin\theta$, যেখানে, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{ay}{bx}\right)$	$x = a.\frac{1-t^2}{1+t^2}, y = b.\frac{2t}{1+t^2}$	কেন্দ্র (0,0) এবং উপবৃত্তের অক্ষদ্বয় স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয় বরাবর
$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$	$x = \alpha + a\cos\theta$, $y = \beta + b\sin\theta$, যেখানে $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{a(y-\beta)}{b(x-\alpha)}\right)$	$x = \alpha + a.\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $y = \beta + b.\frac{2t}{1+t^2}$	কেন্দ্র (α, β) এবং উপবৃত্তের অক্ষদ্বয় স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়ের সমান্তরাল

Note: পরামিতিক সমীকরণ (ত্রিকোণমিতিক) থেকে কার্তেসীয় সমীকরণ পাওয়ার জন্য $\sin\theta$ এবং $\cos\theta$ কে এক পাশে রেখে প্রাপ্ত রাশিদ্বয়কে বর্গ করে যোগ করতে হবে।

MCQ

01. If a moving point $P \equiv (a\sin\theta, b\cos\theta)$, then the locus of P will be a– [IUT'10-11]

(a) parabola (b) circle (c) ellipse (d) straight line

Solution: (c); $x = a\sin\theta,\ y = b\cos\theta$

$\therefore \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \sin^2\theta + \cos^2\theta \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (equation of an ellipse)

Question Type-13: উপবৃত্তের একটি উপকেন্দ্র, তার অনুরূপ দিকাক্ষ ও উৎকেন্দ্রিকতা থেকে সমীকরণ নির্ণয় সংক্রান্ত

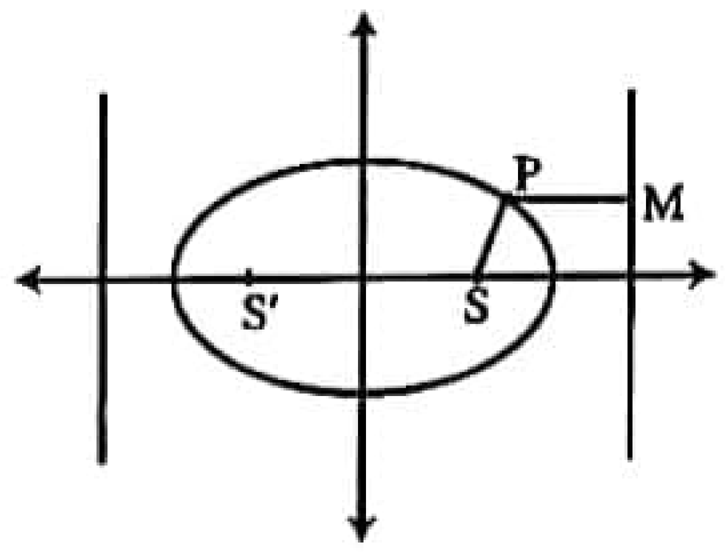
Formula & Concept:

এসব ক্ষেত্রে, $SP = e.PM$ $[e < 1]$

$S =$ উপকেন্দ্র

$e =$ উৎকেন্দ্রিকতা

$P =$ উপবৃত্তের উপর যেকোন বিন্দু



Written

01. একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(0, 2)$, উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{2}$ এবং নিয়ামক রেখার সমীকরণ, $y + 4 = 0$। এর উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্যও নির্ণয় কর। **[BUET'19-20]**

সমাধানঃ $\sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2} = \frac{1}{2}\left|\frac{y+4}{1}\right| \Rightarrow x^2 + y^2 + 4 - 4y = \frac{1}{4}(y^2 + 16 + 8y)$

$\Rightarrow 4x^2 + 4y^2 - 16y + 16 = y^2 + 8y + 16 \Rightarrow 4x^2 + 3y^2 - 24y = 0$

$\Rightarrow 4x^2 + 3(y^2 - 8y + 4^2) = 48 \Rightarrow \frac{x^2}{12} + \frac{(y-4)^2}{4^2} = 1$ এখানে, $4^2 > 12$

$\therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2\times12}{4} = 6$ একক

02. একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার একটি উপকেন্দ্রের স্থানাংক $(1, -1)$, অনুরূপ দিকাক্ষ $x - y - 4 = 0$ এবং যা $(1, 1)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। **[BUET'03-04, BUET'17-18]**

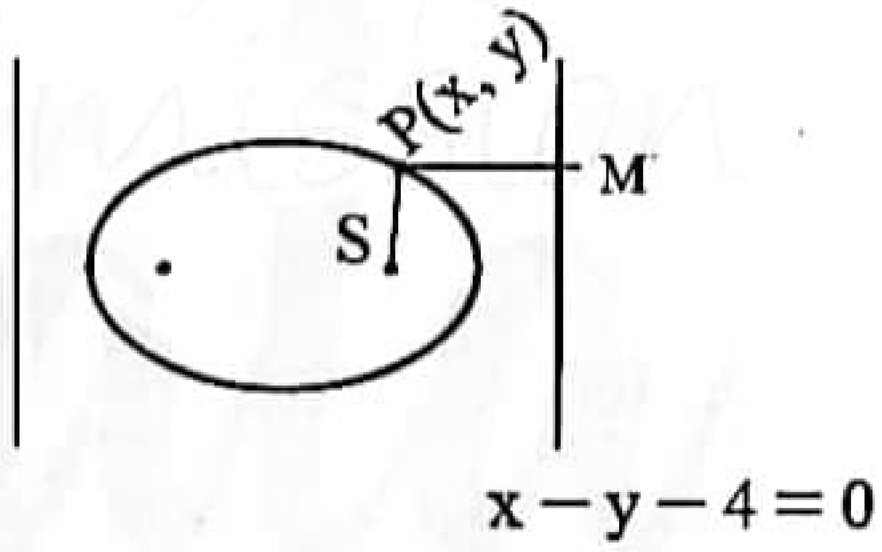
সমাধান: ধরি উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা$= e$

দেওয়া আছে, $S \equiv (1, -1)$; দিকাক্ষ বা নিয়ামক রেখা $\equiv x - y - 4 = 0$

ধরি, উপবৃত্তের উপর $P(x, y)$ বিন্দু

$\therefore SP = e \cdot PM \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = e^2 \cdot \left|\frac{x-y-4}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}\right|$

$\Rightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = e^2 \cdot \frac{(x-y-4)^2}{2}$ .... (i)



(i) নং উপবৃত্তটি $(1, 1)$ বিন্দুগামী

সুতরাং, $(1-1)^2 + (1+1)^2 = e^2 \cdot \frac{(1-1-4)^2}{2} \Rightarrow 0 + 4 = e^2 \cdot \frac{16}{2} \Rightarrow e^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow e = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(i) নং থেকে পাই$(x-1)^2 + (y+1)^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x-y-4)^2}{2}$

$\Rightarrow 4x^2 + 4y^2 - 8x + 8y + 8 = x^2 + y^2 + 16 - 2xy - 8x + 8y \Rightarrow 3x^2 + 3y^2 + 2xy - 8 = 0$ (Ans.)

Question Type-14: $SP + S'P =$ বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য

Formula & Concept:

$SP + S'P =$ বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য

বৃহৎ অক্ষ x অক্ষের সমান্তরাল হলে: $SP + S'P = 2a$

বৃহৎ অক্ষ y অক্ষের সমান্তরাল হলে: $SP + S'P = 2b$

$SP = (a + ex)$ | $S'P = (a - ex)$

$S =$ ১ম উপকেন্দ্র
$S' =$ ২য় উপকেন্দ্র
$P =$ উপবৃত্তের উপর যেকোনো বিন্দু।
$2a =$ বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য (বৃহৎ অক্ষ x অক্ষের সমান্তরাল হলে)
$2b =$ বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্য (বৃহৎ অক্ষ y অক্ষের সমান্তরাল হলে)

Written

01. একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র দুইটি $S'(2, 0)$ ও $S(-2, 0)$ এবং যা $P\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে।

সমাধান: মনে করি, উপবৃত্তের সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ **[RUET'05-06]**

$PS=\sqrt{\left(\frac{3}{2}+2\right)^2+\left(\frac{\sqrt{15}}{2}-0\right)^2}=4$ এবং $PS'=\sqrt{\left(\frac{3}{2}-2\right)^2+\left(\frac{\sqrt{15}}{2}-0\right)^2}=2$

P বিন্দুর ফোকাস দূরত্বের যোগফল বৃহৎ অক্ষের দৈর্ঘ্যের সমান, $2a=PS+PS'=4+2=6 \therefore a=3$

$\therefore$ উপবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{b^2}=1$ যা $\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{15}}{2}\right)$ বিন্দুগামী।

$\therefore \frac{1}{4}+\frac{15}{4b^2}=1 \Rightarrow 3b^2=15 \therefore b^2=5$ $\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $=\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ (Ans.)

02. একটি উপবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র দুটি $(0, 4)$ ও $(0, -4)$ এবং $(3, 0)$ বিন্দু দিয়ে অতিক্রম করে। **[RUET'03-04]**

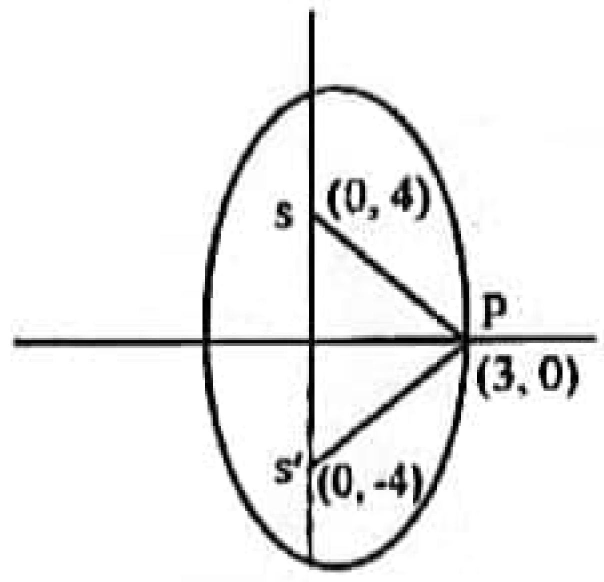
সমাধান: এখানে, $sp+s'p=2b$

$\Rightarrow \sqrt{3^2+4^2}+\sqrt{3^2+4^2}=2b$

$\Rightarrow \sqrt{25}+\sqrt{25}=2b \Rightarrow b=5$

আবার, $(3,0)$ বিন্দুগামী বলে, $\frac{9}{a^2}=1=a^2=9$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ, $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$



03. যে উপবৃত্তের উপকেন্দ্রদ্বয় $(-1, -1), (1, 1)$ এবং বৃহৎ অক্ষের পরিমাণ $2\sqrt{3}$. তার সমীকরণটি নির্ণয় কর। **[BUET'00-01]**

সমাধান: মনে করি $P(x, y)$ উপবৃত্তের উপরে অবস্থিত একটি বিন্দু। $S\equiv(-1,-1), S'(1,1)$ & $2a=2\sqrt{3}$

আমরা জানি, $SP+S'P=2a \Rightarrow \sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2}=2\sqrt{3}-\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$

$\Rightarrow x^2+y^2+2x+2y+2=12+x^2+y^2-2x-2y+2-4\sqrt{3}\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$

$\Rightarrow 4(x+y-3)=-4\sqrt{3}\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} \Rightarrow x^2+y^2+9+2xy-6x-6y=3(x^2+y^2-2x-2y+2)$

$\Rightarrow 2x^2+2y^2-2xy-3=0$ ইহাই নির্ণেয় উপবৃত্তের সমীকরণ. (Ans.)

Question Type-15: উপবৃত্ত সংক্রান্ত বিশেষ সমস্যাবলি

Formula & Concept:

এসব ক্ষেত্রে চিত্র এঁকে তারপর উপবৃত্তের সমীকরণের সাথে তুলনা করে অজানা রাশির মান বের করতে হবে।

MCQ

01. একটি উপবৃত্তের কেন্দ্র $\left(\frac{19}{3}, 0\right)$ এবং একটি ফোকাস বিন্দু $(5, 0)$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\frac{1}{2}$ হলে উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক?

(a) $\frac{32}{3}\pi$ (b) $\frac{19\sqrt{3}}{3}\pi$ (c) $\frac{32\sqrt{3}}{9}\pi$ (d) $\frac{32\sqrt{3}}{3}\pi$ (e) $\frac{19\sqrt{5}}{3}\pi$ **[SUST'18-19]**

সমাধান: (c); উপবৃত্তটির বৃহদাক্ষ x-অক্ষ বরাবর $\therefore a>b$

এখন, $ae=\frac{19}{3}-5 \therefore ae=\frac{4}{3} \therefore a=\frac{8}{3}$; $e^2=1-\frac{b^2}{a^2} \therefore b=\frac{4}{\sqrt{3}}$; ক্ষেত্রফল $=\pi ab=\frac{32\sqrt{3}}{9}\pi$

02. Find the area of the triangle whose vertices are the origin and foci of the ellipse $16(x-2)^2+25(y-3)^2=400$.

(a) 9 sq. units (b) 12 sq. units (c) 16 sq. units (d) 10 sq. units **[IUT'17-18]**

Solution: (a); $16(x-2)^2+25(y-3)^2=400 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{5^2}+\frac{(y-3)^2}{4^2}=1$

$\therefore$ focus: $(5,3); (-1,3)$ and origin $(0,0)$ $\therefore$ Area $=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=9$ sq. unit (Ans.)

03. $9(x-2)^2+25(y-3)^2=225$ উপবৃত্তের ফোকাসদ্বয় ও মূলবিন্দু দিয়ে গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নীচের কোনটি? [KUET'16-17]

(a) 11 বর্গ একক (b) 12 বর্গ একক (c) 13 বর্গ একক (d) 14 বর্গ একক (e) 15 বর্গ একক

সমাধান: (b): $\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-3)^2}{9}=1$; $e=\sqrt{\frac{25-9}{25}}=\frac{4}{5}$

উপবৃত্তের ফোকাসদ্বয় $(2\pm4,3)\equiv F_1(6,3)$ এবং $F_2(-2,3)$ $\therefore \Delta$ ক্ষেত্র $OF_1F_2=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}6 & 3\\ -2 & 3\end{vmatrix}=12$ বর্গ একক

04. The point in a lunar orbit nearest the surface of the moon in called perilune and the point farthest from the surface is called apolune. The Apollo 11 spacecraft was placed in an elliptical lunar orbit with the perilune altitude 110 km and apolune altitude 314 km (above the moon). Find the equation of the ellipse if the radius of the moon is 1728 km and the centre of the moon is at one focus. [IUT'16-17]

(a) $\frac{x^2}{37,63,600}+\frac{y^2}{41,69,764}=1$ (b) $\frac{x^2}{37,63,600}+\frac{y^2}{37,53,196}=1$

(c) $\frac{x^2}{33,78,244}+\frac{y^2}{37,53,196}=1$ (d) $\frac{x^2}{33,78,2441}+\frac{y^2}{41,69,7644}=1$

Solution: (d); $\frac{x^2}{(1728+110)^2}+\frac{y^2}{(1728+314)^2}=1$

05. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$ উপবৃত্তের ফোকাসদ্বয় ও $2x^2+2y^2+12x-16y-13=0$ বৃত্তের কেন্দ্র দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল কত?

(a) 6 sq. units (b) 9 sq. units (c) 12 sq. units (d) 19 sq. units (e) 24 sq. units

সমাধান: (b); $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1 \ldots\ldots (i)$ [KUET'15-16]

$2x^2+2y^2+12x-16y-13=0 \Rightarrow x^2+y^2+6x-8y-\frac{13}{2}=0 \ldots\ldots (ii)$

(ii) নং বৃত্তের কেন্দ্র $C\equiv(-3,4)$

(i) নং উপবৃত্তের ফোকাস বিন্দুদ্বয়, $A\equiv\left(0,5\times\sqrt{\frac{25-16}{25}}\right)\equiv(0,3)$ এবং $B\equiv\left(0,-5\times\sqrt{\frac{25-16}{25}}\right)\equiv(0,-3)$

$\therefore \Delta ABC=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0 & 3 & 1\\ 0 & -3 & 1\\ -3 & 4 & 1\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\times3(3+3)=-9$ $\therefore$ ক্ষেত্রফল $=9$

06. A man made satellite orbits the earth in an elliptical path whose center is at the center of the earth. If the altitude of the satellite ranges from 1000 to 2000 miles, find the equation of its path. The radius of the earth is approximately 4000 miles. [IUT'14-15]

(a) $\frac{x^2}{(2000)^2}+\frac{y^2}{(1000)^2}=1$ (b) $\frac{x^2}{(4000)^2}+\frac{y^2}{(3000)^2}$ (c) $\frac{x^2}{0.9\times10^7}+\frac{y^2}{0.4\times10^7}=1$ (d) $\frac{x^2}{3.6\times10^7}+\frac{y^2}{2.5\times10^7}=1$

Solution: (d); $a=4000+2000=6000, b=4000+1000=5000$

$\therefore \frac{x^2}{(6000)^2}+\frac{y^2}{(5000)^2}=1\Rightarrow\frac{x^2}{3.6\times10^7}+\frac{y^2}{2.5\times10^7}=1$

Written

07. কোনো ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলো $16(x-2)^2+25(y-3)^2=400$ উপবৃত্তের উপকেন্দ্রদ্বয় ও মূলবিন্দু। উক্ত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [BUTEX'20-21]

সমাধানঃ প্রদত্ত উপবৃত্তের সমীকরণ, $16(x-2)^2+25(y-3)^2=400$

$\Rightarrow\frac{(x-2)^2}{5^2}+\frac{(y-3)^2}{4^2}=1\ [a>b]\Rightarrow\frac{X^2}{5^2}+\frac{Y^2}{4^2}=1$

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক, $(X,Y)=(\pm ae,0)$; $X=x-2=\pm ae$; $Y=y-3=0$

$e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{4^2}{5^2}}=\frac{3}{5}$ $\therefore x=2\pm5\times\frac{3}{5}=2\pm3=5,-1$ এবং $y=3$

$\therefore$ নির্ণেয় ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুত্রয় যথাক্রমে $(0,0)$, $(5,3)$ এবং $(-1,3)$

$\therefore$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল, $\Delta=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 5 & 3 & 1\\ -1 & 3 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}[15-(-1)\times3]=\frac{1}{2}(15+3)=9$ বর্গ একক

$\therefore$ নির্ণেয় ক্ষেত্রফল 9 বর্গ একক।

08. যে ত্রিভুজের শীর্ষ বিন্দুগুলি $9(x-2)^2 + 25(y-3)^2 = 225$ উপবৃত্তের ফোকাসদ্বয় ও মূল বিন্দু, সে ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। [KUET'04-05]

সমাধান: $9(x-2)^2 + 25(y-3)^2 = 225 \Rightarrow \frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$

$a = 5,\ b = 3,\ e = \left(\frac{25-9}{25}\right)^{1/2} = \frac{4}{5}$

$X = \pm ae \therefore x-2 = \pm 5 \times \frac{4}{5} = \pm 4 \therefore x = 6,\ x = -2$

$Y = y-3 = 0 \quad \therefore y = 3 \quad \therefore s \equiv (6, 3), s' \equiv (-2, 3) \therefore \Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 6 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 12$ বর্গ একক (Ans.)

Question Type-16: সমীকরণ থেকে বিভিন্ন উপাদান নির্ণয় সংক্রান্ত

Formula & Concept:

এক্ষেত্রে $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ আদর্শ সমীকরণের আকারে নিয়ে তুলনা করতে হবে।

(i)	আদর্শ সমীকরণ	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$	$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(y-\beta)^2}{b^2} - \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} = 1$
(ii)	পরামিতিক সমীকরণ	$x = a\sec\theta$, $y = b\tan\theta$	$x = a\tan\theta$, $y = b\sec\theta$	$x = \alpha + a\sec\theta$, $y = \beta + b\tan\theta$	$x = \alpha + a\tan\theta$, $y = \beta + b\sec\theta$
(iii)	পোলার স্থানাংকে সমীকরণ	$r^2(b^2\cos^2\theta - a^2\sin^2\theta) = a^2b^2$	$r^2(a^2\sin^2\theta - b^2\cos^2\theta) = a^2b^2$	$b^2(r\cos\theta - \alpha)^2 - a^2(r\sin\theta - \beta)^2 = a^2b^2$	$a^2(r\sin\theta - \beta)^2 - b^2(r\cos\theta - \alpha)^2 = a^2b^2$
(iv)	কেন্দ্র, C	$(0, 0)$	$(0, 0)$	(α, β)	(α, β)
(v)	উপকেন্দ্র, S	$(\pm ae, 0)$	$(0, \pm be)$	$(\alpha \pm ae, \beta)$	$(\alpha, \beta \pm be)$
(vi)	অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য	2b	2a	2b	2a
(vii)	শীর্ষদ্বয়ের স্থানাংক	$(\pm, a, 0)$	$(0, \pm b)$	$(\alpha \pm a, \beta)$	$(\alpha, \beta \pm b)$
(viii)	আড় অক্ষের দৈর্ঘ্য	2a	2b	2a	2b
(ix)	উৎকেন্দ্রিকতা, e	$e = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$	$e = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{b^2}} = \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}$	$e = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$	$e = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{b^2}} = \sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2}}$
(x)	উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2a^2}{b}$	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2a^2}{b}$
(xi)	আড় অক্ষের সমীকরণ	$y = 0$	$x = 0$	$y - \beta = 0$	$x - \alpha = 0$
(xii)	অনুবন্ধী অক্ষের সমীকরণ	$x = 0$	$y = 0$	$x - \alpha = 0$	$y - \beta = 0$
(xiii)	উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ	$x = \pm ae$	$y = \pm be$	$x = \alpha \pm ae$	$y = \beta \pm be$
(xiv)	নিয়ামক রেখার সমীকরণ	$x = \pm\frac{a}{e}$	$y = \pm\frac{b}{e}$	$x = \alpha \pm \frac{a}{e}$	$y = \beta \pm \frac{b}{e}$
(xv)	উপকেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব, SS'	2ae	2be	2ae	2be
(xvi)	উপকেন্দ্র ও অনুরূপ নিয়ামকের মধ্যবর্তী দূরত্ব	$ae - \frac{a}{e}$	$be - \frac{b}{e}$	$ae - \frac{a}{e}$	$be - \frac{b}{e}$
(xvii)	নিয়ামক/দিকাক্ষদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব, ZZ'	$\frac{2a}{e}$	$\frac{2b}{e}$	$\frac{2a}{e}$	$\frac{2b}{e}$
(xviii)	অসীমতটের সমীকরণ	$y = \pm\frac{b}{a}x$	$y = \pm\frac{b}{a}x$	$y - \beta = \pm\frac{b}{a}(x - \alpha)$	$y - \beta = \pm\frac{b}{a}(x - \alpha)$
(xix)	শীর্ষ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ	$x = \pm a$	$y = \pm b$	$x = \alpha \pm a$	$y = \beta \pm b$

MCQ

01. Equation of asymptote of the hyperbola, $\frac{y^2}{3}-\frac{x^2}{4}=1$ is- **[IUT'19-20]**

(a) $\sqrt{3}y=\pm 2x$ (b) $3y=\pm 4x$ (c) $4y=\pm 3x$ (d) $2y=\pm\sqrt{3}x$

Solution: (d); eq^n of asymptotes, $\frac{y^2}{3}-\frac{x^2}{4}=0 \Rightarrow y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}x \therefore 2y=\pm\sqrt{3}x$

02. $4(x-2)^2+5(y+3)^2=20$ বক্ররেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত একক? **[KUET'16-17]**

(a) $2\sqrt{5}\pi$ (b) $5\sqrt{2}\pi$ (c) 20π (d) 10π (e) 9π

সমাধান: (a); $\frac{(x-2)^2}{5}+\frac{(y+3)^2}{4}=1$ উপবৃত্তের ক্ষেত্রফল $=\pi ab=\pi.\sqrt{5}.2$

03. আড় অক্ষের দৈর্ঘ্য 8 এবং $(\pm 2,0)$ উপকেন্দ্রদ্বয় বিশিষ্ট অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা হচ্ছে- **[BUET'13-14]**

(a) 3 (b) $\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) 2

সমাধান: (c); $2a = 8 \therefore a = 4$; $ae = 2 \therefore e = \frac{1}{2}$

04. $\frac{y^2}{2}-x^2=1$ অধিবৃত্তের উৎকেন্দ্রিকতা নির্ণয় কর। **[RUET'12-13]**

(a) $\frac{\sqrt{13}}{3}$ (b) $\frac{13}{\sqrt{3}}$ (c) $\frac{3}{\sqrt{13}}$ (d) $\pm\sqrt{13}$ (e) $\pm\sqrt{3}$

সমাধান: (No correct answer); $\frac{y^2}{2}-x^2=1$ এবং $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$; $e=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{b^2}}=\sqrt{\frac{2+1}{2}}=\sqrt{\frac{3}{2}}$

05. $x^2-y^2=18$ অধিবৃত্তের ফোকাসদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব কত? **[CUET'11-12]**

(a) $2\sqrt{2}$ একক (b) 12 একক (c) 3 একক (d) কোনোটিই নয়

সমাধান: **(b)**; $x^2-y^2=18$; এটি একটি আয়তাকার অধিবৃত্ত। কারণ এটি উভয় অক্ষ হতে সমান অংশ ছেদ করে। $\therefore e=\sqrt{2}$

$\therefore$ ফোকাসদ্বয়ের মধ্যকার দূরত্ব $=2ae=2\times\sqrt{18}\times\sqrt{2}=12$ একক

Written

06. $9x^2-16y^2+72x-32y-16=0$ বক্ররেখাটির প্রকৃতি, তার কেন্দ্র ও উপকেন্দ্রদ্বয়ের স্থানাংক, নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ এবং নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। **[BUET'10-11]**

সমাধান: $9x^2-16y^2+72x-32y-16=0 \Rightarrow 9x^2+72x+144-16y^2-32y-16=144$

$\Rightarrow 9(x+4)^2-16(y+1)^2=144 \Rightarrow \frac{(x+4)^2}{16}-\frac{(y+1)^2}{9}=1 \ldots\ldots\ldots(i)$

এটি একটি অধিবৃত্ত (Ans.)

এটি কেন্দ্র $(x,y)\equiv 6,0$

$\therefore x+4=0, \quad y+1=0$

$\Rightarrow x=-4, \quad y=-1$

$(x,y)\equiv(-4,-1)$

উপকেন্দ্র $(x,y)=(\pm 5,0)\Rightarrow x+4=\pm 5 \Rightarrow x=1,-9 \Rightarrow y+1=0\Rightarrow y=-1$

$\therefore (x,y)\equiv(1,-1),(-9,-1)$

দিকাক্ষের সমীকরণ, $x=\pm\frac{a}{e} \Rightarrow x+4=\pm\frac{16}{5}$ (Ans.)

উপকেন্দ্রিক লম্ব $=\frac{2\times 9}{4}=\frac{18}{4}=\frac{9}{2}$ একক (Ans.)

Question Type-17: বিভিন্ন শর্ত থেকে অধিবৃত্তের সমীকরণ বের কর

Formula & Concept:

এখানে প্রদত্ত উপাদানগুলো থেকে অধিবৃত্তের সমীকরণ বের করতে হবে। এক্ষেত্রে অধিবৃত্তের শুরুর অংশের ছকটি তোমাদের কাজে দেবে।

MCQ

01. অক্ষ দুইটিকে স্থানাঙ্কের অক্ষ ধরে একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার উপকেন্দ্র দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব 16 একক এবং উৎকেন্দ্রিতা $\sqrt{2}$। **[CKRUET'21-22]**

(a) $x^2 - y^2 = 32$ (b) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{6} = 1$ (c) $x^2 - y^2 = 42$ (d) $x^2 - y^2 = 36$ (e) $x^2 - y^2 = 16$

সমাধান: (a); $e = \sqrt{2}$; $2ae = 16 \Rightarrow ae = 8 \Rightarrow a \times \sqrt{2} = 8 \Rightarrow a = 4\sqrt{2}$

$e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow 2 = 1 + \frac{b^2}{32} \Rightarrow \frac{b^2}{32} = 1 \therefore b^2 = 32 \therefore x^2 - y^2 = 32$; যা নির্ণেয় অধিবৃত্তের সমীকরণ।

02. একটি অধিবৃত্ত $(6, 4)$ এবং $(-3, 1)$ বিন্দুগামী। এর কেন্দ্র মূল বিন্দুতে এবং x-অক্ষ বরাবর এর আড় অক্ষ অবস্থিত। অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য হল- **[BUET'11-12]**

(a) $\frac{36}{\sqrt{5}}$ (b) 8 (c) 2 (d) 4

সমাধান: (d); ধরি, অধিবৃত্তের সমীকরণঃ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\therefore$ এটি $(6,4)$ ও $(-3,1)$ বিন্দুগামী।$\therefore \frac{6^2}{a^2} - \frac{4^2}{b^2} = 1$ ও $\frac{(-3)^2}{a^2} - \frac{1^2}{b^2} = 1$

$\frac{1}{a^2} = \frac{5}{36}$ ও $\frac{1}{b^2} = \frac{1}{4}$ বা, $b = 2$ $\therefore$ অনুবন্ধী অক্ষের দৈর্ঘ্য $= 2b = 4$

03. The standard equation of the Hyperbola is- **[Ans: a] [IUT'11-12]**

(a) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (b) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (c) $y^2 = 4ax$ (d) $x^2 = 4by$

04. উপবৃত্তের বৃহৎ ও ক্ষুদ্র অক্ষ দুইটিকে যথাক্রমে x ও y অক্ষরেখা ধরিয়া উপবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর, যাহার ফোকাসদ্বয়ের মধ্যকার দূরত্ব 8 এবং দিকাক্ষদ্বয়ের মধ্যকার দূরত্ব 18। **[KUET'10-11]**

(a) $5x^2 + 9y^2 = 180$ (b) $6x^2 + 9y^2 = 183$ (c) $2x^2 + y^2 = 25$
(d) $5x^2 + 7y^2 = 25$ (e) $3x^2 + 2y^2 = 16$

সমাধান: (a); $2ae = 8$; $\frac{2a}{e} = 18$; $a = 6; e = \frac{2}{3} \therefore b^2 = 20 \therefore \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1 \therefore 5x^2 + 9y^2 = 180$

Written

05. একটি অধিবৃত্তের উপকেন্দ্র দুইটির দূরত্ব 16, উপকেন্দ্রিকতা $\sqrt{2}$ এবং এর অক্ষ দুইটি স্থানাঙ্কের অক্ষ বরাবর। অধিবৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর। **[BUET'01-02, 12-13]**

সমাধান: উপকেন্দ্র দুটির দূরত্ব $= 2ae$

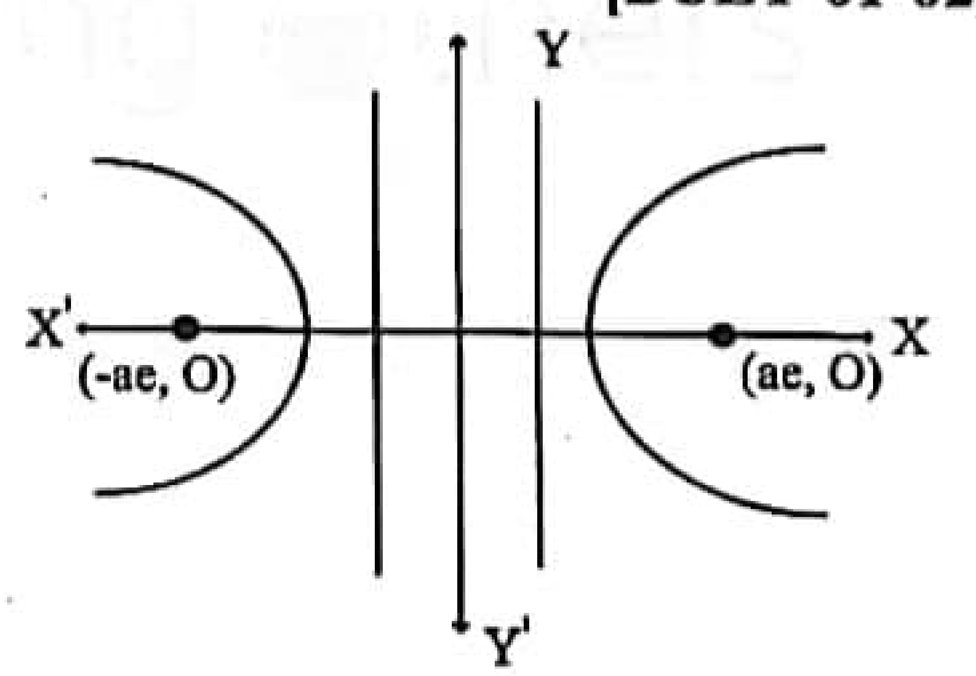
প্রশ্নমতে, $2ae = 16 \Rightarrow 2a(\sqrt{2}) = 16 \Rightarrow a = 4\sqrt{2}$ .... (i)

আবার, $e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow (\sqrt{2})^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2}$

$\Rightarrow 2 = 1 + \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow 1 = \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow b^2 = a^2 \Rightarrow b = a = 4\sqrt{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণঃ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{(4\sqrt{2})^2} - \frac{y^2}{(4\sqrt{2})^2} = 1$

$\Rightarrow \frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{32} = 1 \Rightarrow x^2 - y^2 = 32$ (Ans.)



06. (a) অধিবৃত্তের সমীকরণটি লিখ। **[BUTEX'10-11]**

সমাধান: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

(b) হাইপারবোলার বিকেন্দ্রীতা কত?

সমাধান: বিকেন্দ্রীকতা, $e = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}$ or $e = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{b^2}}$

Question Type-18: অসীমতট থেকে অধিবৃত্তের সমীকরণ ও কোণ নির্ণয় সংক্রান্ত

MCQ

01. $4x^2 - 9y^2 - 8x + 18y - 41 = 0$ কণিকের অসীমতটদ্বয়ের ঢালের গুণফল কত? [SUST'19-20]

(a) $-\frac{4}{9}$ (b) -1 (c) $\frac{4}{9}$ (d) $\frac{3}{2}$ (e) $-\frac{2}{3}$

সমাধান: (a); $4x^2 - 9y^2 - 8x + 18y = 41 \Rightarrow 4(x^2 - 2x + 1) - 9(y^2 - 2y + 1) = 41 - 5$

$\Rightarrow 4(x-1)^2 - 9(y-1)^2 = 36 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$

অসীমতটদ্বয়, $\left(\frac{x-1}{3}\right)^2 - \left(\frac{y-1}{2}\right)^2 = 0 \therefore \frac{x-1}{3} = \pm\left(\frac{y-1}{2}\right)$

$+$ নিয়ে, $2x - 2 = 3y - 3 \therefore$ ঢাল $= \frac{2}{3}$

$-$ নিয়ে, $2x - 2 = -3y + 3 \therefore$ ঢাল $= -\frac{2}{3}$

$\therefore$ ঢালদ্বয়ের গুণফল $= -\frac{4}{9}$

Question Type-19: পরামিতিক সমীকরণ

Formula & Concept:

কার্তেসীয় সমীকরণ	পরামিতিক সমীকরণ (ত্রিকোণমিতিক)	পরামিতিক সমীকরণ (বীজগাণিতিক)	ধরন
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$x = a\sec\theta,\ y = b\tan\theta$ $\left[\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{b}\right)\right]$	$x = a.\frac{1+t^2}{1-t^2}, y = b.\frac{2t}{1-t^2}$	কেন্দ্র $(0,0)$ আড় অক্ষ x অক্ষের উপর অবস্থিত
$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$	$x = a\tan\theta,\ y = b\sec\theta$ $\left[\theta = \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right]$	$x = a.\frac{2t}{1-t^2}, y = b.\frac{1+t^2}{1-t^2}$	কেন্দ্র $(0,0)$ আড় অক্ষ y অক্ষের উপর অবস্থিত
$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$	$x = \alpha + a\sec\theta, y = \beta + b\tan\theta$ $\left[\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y-\beta}{b}\right)\right]$	$x = \alpha + a.\frac{1+t^2}{1-t^2}, y = \beta + b.\frac{2t}{1-t^2}$	কেন্দ্র (α,β) আড় অক্ষ x অক্ষের সমান্তরাল
$\frac{(y-\beta)^2}{b^2} - \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} = 1$	$x = \alpha + a\tan\theta, y = \beta + b\sec\theta$ $\left[\theta = \tan^{-1}\left(\frac{x-\alpha}{a}\right)\right]$	$x = \alpha + a.\frac{2t}{1-t^2}, y = \beta + b.\frac{1+t^2}{1-t^2}$	কেন্দ্র (α,β) আড় অক্ষ y অক্ষের সমান্তরাল

Note:

- $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর θ বিন্দুতে স্পর্শক $\frac{x}{a}\sec\theta - \frac{y}{b}\tan\theta = 1$
- $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ এর θ বিন্দুতে স্পর্শক $\frac{y}{b}\sec\theta - \frac{x}{a}\tan\theta = 1$

Written

01. $(2\sec\theta, 3\tan\theta)$ বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর এবং সেখান থেকে ঐ কণিকের দিকাক্ষ, উৎকেন্দ্রতা ও উপকেন্দ্র নির্ণয় কর।

সমাধানঃ $(x,y) \equiv (2\sec\theta, 3\tan\theta)$ [KUET'19-20]

$x = 2\sec\theta \Rightarrow \sec\theta = \frac{x}{2}$ ……… (i) এবং $y = 3\tan\theta \Rightarrow \tan\theta = \frac{y}{3}$ ……… (ii)

$(i)^2 - (ii)^2 \Rightarrow \sec^2\theta - \tan^2\theta = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1 \therefore$ সঞ্চারপথ $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$, যা একটি অধিবৃত্ত।

উৎকেন্দ্রিকতা, $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \frac{3^2}{2^2}}$ $[a = 2, b = 3]$

দিকাক্ষ বা নিয়ামকরেখার সমীকরণ, $x = \pm\frac{a}{e} = \pm\frac{2}{\frac{\sqrt{13}}{2}} \Rightarrow x = \pm\frac{4}{\sqrt{13}} \Rightarrow \sqrt{13}x = \pm 4$

উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক$\equiv (\pm ae, 0) \equiv \left(\pm 2\cdot\frac{\sqrt{13}}{2}, 0\right) \equiv (\pm\sqrt{13}, 0)$ (Ans.)

Question Type-20: SP = e.PM

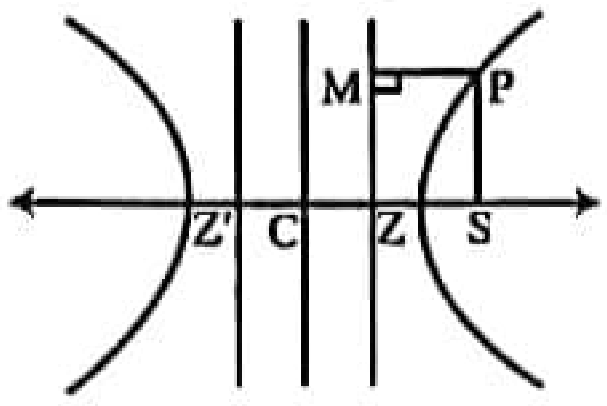
Formula & Concept:

এসব ক্ষেত্রে, $SP = e.PM$

S = উপকেন্দ্র

e = উৎকেন্দ্রিকতা

P = অধিবৃত্তের উপর যেকোন বিন্দু



Written

01. একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার দিকাক্ষ, উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক এবং উৎকেন্দ্রিকতা যথাক্রমে $x + 2y = 1, (1, 2)$ এবং $\sqrt{2}$।

সমাধান: দেওয়া আছে, অধিবৃত্তের উপকেন্দ্র $S(1, 2)$ এবং দিকাক্ষ $x + 2y - 1 = 0$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{2}$ **[BUET'20-21]**

এখন $P(x, y)$ অধিবৃত্তের উপর যেকোনো একটি বিন্দু হলে,

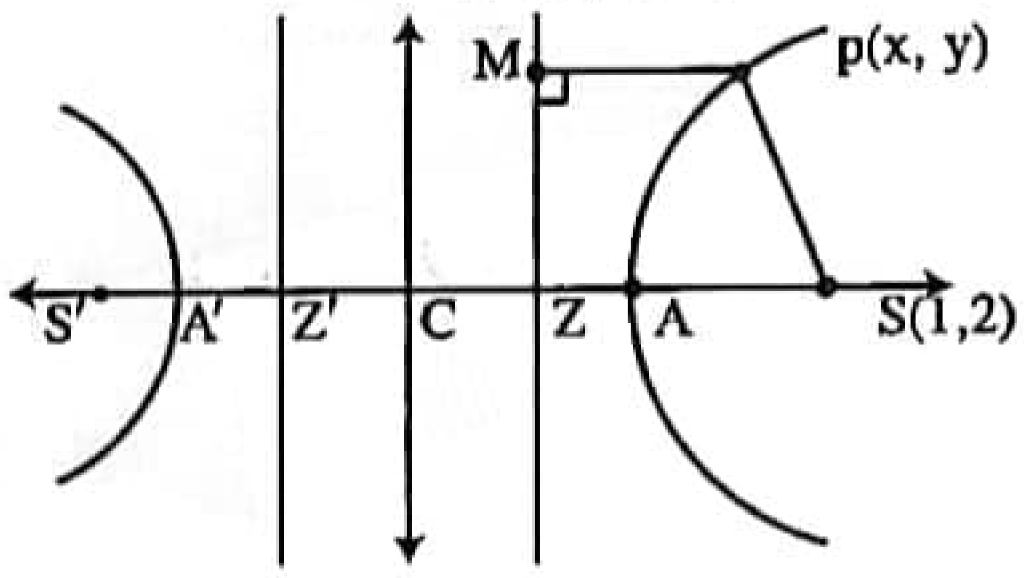
$SP = e.MP \Rightarrow SP^2 = e^2.MP^2$

$\Rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 2.\frac{(x+2y-1)^2}{\left(\sqrt{1^2+2^2}\right)^2}$

$\Rightarrow 5(x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5) = 2(x^2 + 4y^2 + 1 + 4xy - 2x - 4y)$

$\Rightarrow 5x^2 + 5y^2 - 10x - 20y + 25 = 2x^2 + 8y^2 + 2 + 8xy - 4x - 8y$

$\therefore 3x^2 - 3y^2 - 8xy - 6x - 12y + 23 = 0$



02. যে কনিকের আড় অক্ষ $x - 2y + 1 = 0$, উপকেন্দ্র $(1, 1)$, উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{2}$ এবং নিয়ামকের উপর একটি বিন্দু $(2, -3)$ তার সমীকরণ এবং উপকেন্দ্রিক লম্বের সমীকরণ নির্ণয় কর। **[BUET'14-15]**

সমাধান: নিয়ামক রেখা আড় অক্ষের উপর লম্ব এবং $(2, -3)$ বিন্দুগামী।

$\therefore$ নিয়ামক রেখার সমীকরণ: $2x + y = 2.2 - 3 \Rightarrow 2x + y - 1 = 0$

$(1, 1)$ উপকেন্দ্র, $\sqrt{2}$ উৎকেন্দ্রিকতা ও $2x + y - 1 = 0$ নিয়ামক রেখা বিশিষ্ট কণিকের সমীকরণ:

$(x-1)^2 + (y-1)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 \frac{(2x+y-1)^2}{2^2+1^2} \Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = \frac{2}{5}(2x + y - 1)^2$

উপকেন্দ্রিক লম্ব: $x - 2y + 1 = 0$ এর লম্ব $2x + y = 2.1 + 1 \Rightarrow 2x + y = 3$ (Ans.)

Question Type-21: অধিবৃত্ত সংক্রান্ত বিশেষ সমস্যা

Formula & Concept:

এসব ক্ষেত্রে অধিবৃত্তের সমীকরণের সাথে তুলনা করে অন্যান্য উপাদান বের করতে হবে।

MCQ

01. An architect's design for a building includes some pillars in the shape of hyperbolas. The curve can be modeled by the equation- $\frac{x^2}{0.0625} - \frac{y^2}{0.1875} = 1$where units are in meters. If the heights of the pillars are same as height of the latus rectum of the hyperbola, find the diameter of the top of the pillars. **[IUT'14-15]**

(a) 1 meter (b) 0.5 meter (c) 0.25 meter (d) 2 meter

Solution: (a); The equation of the hyperbola given is, $\frac{x^2}{0.25^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = 1, a = \frac{1}{4}, b = \frac{\sqrt{3}}{4}$

$\therefore$ length of the latus rectum $= \frac{2b^2}{a} = \frac{3}{2}$m; Now, $\frac{x^2}{0.25^2} - \frac{0.75^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = 1 \Rightarrow x = 0.5$m $\therefore$ diameter $= 2x = 1$m

02. Two listening posts, A and B are 500m apart. An explosion is heard at these posts. From the difference in times it is determined that the site of explosion is 800m closer to A then to B. If the site of explosion lies on a hyperbolic curve, then the equation of the hyperbola is- [IUT'14-15]

(a) $\frac{x^2}{(400)^2}-\frac{y^2}{(5000)^2}=1$ (b) $\frac{x^2}{(400)^2}-\frac{y^2}{(2468)^2}=1$ (c) $\frac{x^2}{(8000)^2}-\frac{y^2}{(2500)^2}=1$ (d) $\frac{x^2}{(800)^2}-\frac{y^2}{(2468)^2}=1$

Solution: (No answer); $PB-PA=2a=800 \Rightarrow a=400;\ AB=2ae=500 \Rightarrow e=\frac{500}{800}=\frac{5}{8}<1$

∴ It cannot be a hyperbola. ∴ The question is wrong.

Question Type-22: উপকেন্দ্রিক দূরত্ব

➲ **Formula & Concept:**

পরাবৃত্তের উপকেন্দ্র S হতে পরাবৃত্তের উপরস্থ কোন বিন্দু $P(x,y)$ এর দূরত্বকে উপকেন্দ্রিক দূরত্ব (Focal length) বলে।

♦ **Case 1 :**

পরাবৃত্তের সমীকরণ	$y^2=4ax$	$x^2=4ay$	$(y-\beta)^2=4a(x-\alpha)$	$(x-\alpha)^2=4a(y-\beta)$
উপকেন্দ্রিক দূরত্ব, SP	$a+x$	$a+y$	$a+x-\alpha$	$a+y-\beta$

MCQ

01. $y^2=9x$ প্যারাবোলার উপরে অবস্থিত একটি বিন্দু P এর কোটি 12; P এর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব কত? [BUET'10-11, 12-13, BUTEX'15-16, IUT'19-20]

(a) $19\frac{1}{2}$ (b) $18\frac{1}{4}$ (c) 10 (d) 16

সমাধান: (b); $y^2=9x$ ∴ $4a=9 \Rightarrow a=\frac{9}{4}$; $y^2=9x \Rightarrow (12)^2=9x \Rightarrow x=16$

উপকেন্দ্রিক দূরত্ব $=a+x=\frac{9}{4}+16=18\frac{1}{4}$

Written

02. $y^2=16x$ পরাবৃত্তের উপরিস্থিত কোন বিন্দুর উপকেন্দ্রিক দূরত্ব 6; ঐ বিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় কর। [CUET'05-06]

সমাধান: $y^2=4ax$ ∴ $y^2=16x$

∴ $a=4$ নির্ণেয় বিন্দুটি $p(x,y)$

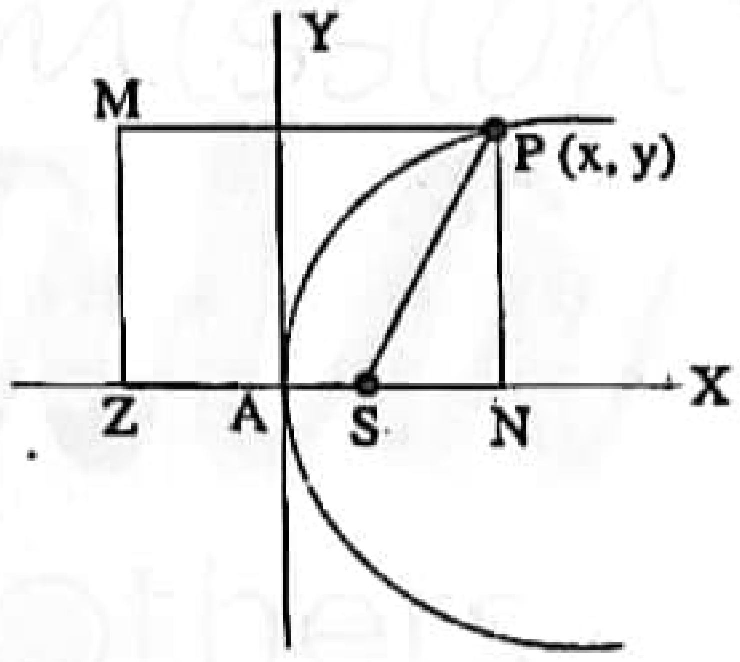
উপকেন্দ্রিক দূরত্ব, $SP=PM=ZN$

$=AZ+AN=AS+AN$ [∴$AZ=AS$]

$=4+x$ [∴$AS=a$]

প্রশ্নমতে, $4+x=6$ ∴ $x=2$

∴ $y^2 = 16\times 2 = 32, y=\pm 4\sqrt{2}$ নির্ণেয় স্থানাঙ্ক: $P\equiv(2,\pm4\sqrt{2})$



Question Type-23: স্পর্শক/ছেদক সম্পর্কিত

➲ **Formula & Concept:**

♦ কনিকের উপরস্থ কোন একটি বিন্দুতে স্পর্শক:

$ax^2+by^2+2hxy+2gx+2fy+c=0$ কনিকের উপরস্থ যেকোন একটি বিন্দু (x_1,y_1) হলে, (x_1,y_1) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক নির্ণয়ের জন্য,

x^2 এর পরিবর্তে $\rightarrow xx_1$	x এর পরিবর্তে $\rightarrow \frac{x+x_1}{2}$	xy এর পরিবর্তে $\rightarrow \frac{xy_1+yx_1}{2}$
y^2 এর পরিবর্তে $\rightarrow yy_1$	y এর পরিবর্তে $\rightarrow \frac{y+y_1}{2}$	

∴ $ax^2+by^2+2hxy+2gx+2fy+c=0$ এর উপরস্থ (x_1,y_1)

বিন্দুতে কনিকটির স্পর্শকের সমীকরণ, $axx_1+byy_1+2h.\frac{xy_1+yx_1}{2}+2g\frac{x+x_1}{2}+2f\frac{y+y_1}{2}+c=0$

∴ $\boxed{axx_1+byy_1+h(xy_1+yx_1)+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0}$

◆ $y = mx + c$ বিভিন্ন বক্ররেখার ছেদক/স্পর্শক বা কোনটিই না হবার শর্ত সমূহ:

বক্ররেখার সমীকরণ	$y = mx + c$ বক্ররেখাটির		
	ছেদক হলে [$D > 0$]	স্পর্শক হলে [$D = 0$]	স্পর্শক/ছেদক না হলে [$D < 0$]
(i) $y^2 = 4ax$	$c < \frac{a}{m} [m \neq 0, a > 0]$ $c > \frac{a}{m} [m \neq 0, a < 0]$	$c = \frac{a}{m} [m \neq 0]$	$c > \frac{a}{m} [m \neq 0, a > 0]$ $c < \frac{a}{m} [m \neq 0, a < 0]$
(ii) $x^2 = 4ay$	$c > -am^2 [a > 0]$ $c < -am^2 [a < 0]$	$c = -am^2$	$c < -am^2 [a > 0]$ $c > -am^2 [a < 0]$
(iii) $x^2 + y^2 = r^2$	$c^2 < r^2(m^2 + 1)$ $\boxed{-r\sqrt{m^2+1} < c < r\sqrt{m^2+1}}$	$c^2 = r^2(m^2 + 1)$ $\therefore c = \pm r\sqrt{m^2+1}$	$c^2 > r^2(m^2 + 1)$ $\boxed{c > r\sqrt{m^2+1},\ c < -r\sqrt{m^2+1}}$
(iv) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$c^2 < b^2 + a^2m^2$ $\boxed{-\sqrt{b^2+a^2m^2} < c < \sqrt{b^2+a^2m^2}}$	$c^2 = b^2 + a^2m^2$	$c^2 > b^2 + a^2m^2$ $\boxed{c > \sqrt{b^2+a^2m^2}, c < -\sqrt{b^2+a^2m^2}}$
(v) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$c^2 > a^2m^2 - b^2$ $\boxed{c > \sqrt{a^2m^2-b^2}, c < -\sqrt{a^2m^2-b^2}}$	$c^2 = a^2m^2 - b^2$	$c^2 < a^2m^2 - b^2$ $\boxed{-\sqrt{a^2m^2-b^2} < c < \sqrt{a^2m^2-b^2}}$
(vi) $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$	$c^2 > b^2 - a^2m^2$ $\boxed{c > \sqrt{b^2-a^2m^2}, c < -\sqrt{b^2-a^2m^2}}$	$c^2 = b^2 - a^2m^2$	$c^2 < b^2 - a^2m^2$ $\boxed{-\sqrt{b^2-a^2m^2} < c < \sqrt{b^2-a^2m^2}}$

MCQ

01. যদি $y = 2x + 2$ রেখাটি $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তকে স্পর্শ করে তবে উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য কি হবে? **[CKRUET'21-22]**
(a) 4 (b) 8 (c) 16 (d) 32 (e) 64
সমাধান: (c); $y^2 = 4ax \ldots\ldots\ldots (i)$ এবং $y = 2x + 2 \ldots\ldots\ldots (ii)$
$c = \frac{a}{m} \Rightarrow 2 = \frac{a}{2} \Rightarrow a = 4 \therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= 4a = 16$ একক।

02. m এর সকল মানের জন্য যে সরলরেখা $y^2 = 4ax$ কে স্পর্শ করে- **[Ans: b][CKRUET'20-21]**
(a) $y = mx - \frac{a}{m}$ (b) $y = mx + \frac{a}{m}$ (c) $y = mx + am$ (d) $y = ma - am$ (e) None of them

03. $5y = x + 50$ is the tangent of $y^2 = 4ax$, then focus of the parabola is- **[IUT'18-19]**
(a) $(1,0)$ (b) $(10,0)$ (c) $(2,0)$ (d) $(5,0)$
Solution:(c); $5y = x + 50 \Rightarrow y = \frac{x}{5} + 10 \quad y = 4ax$
$\therefore m = \frac{1}{5}, c = 10;\ c = \frac{a}{m} \Rightarrow a = cm = \frac{10}{5} = 2;$ focus $\equiv (a,0) \equiv (2,0)$

04. $y = 3x + 1$ রেখাটি $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের একটি স্পর্শক হলে, পরাবৃত্তের উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য কত? **[BUTEX'16-17]**
(a) 8 (b) 10 (c) 12 (d) 12.5
সমাধান: (c); $y = 3x + 1 \ldots\ldots\ldots (i);\ \ y^2 = 4ax \ldots\ldots\ldots (ii)$
$\therefore (3x+1)^2 = 4ax \Rightarrow 9x^2 + x(6 - 4a) + 1 = 0 \ldots\ldots\ldots (iii)$ and $3 = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}}$ [ঢাল সমান] .... (iv)
$\Rightarrow a = 9x \ \therefore x = \frac{1}{3}$ এবং $a = 3 \ \therefore y^2 = 4ax = 12x \ \therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য $= 12$

05. যদি $5y = x + 50$ রেখাটি $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তের একটি স্পর্শক হয়, তবে তার ফোকাস হলো- **[KUET'12-13]**
(a) $(1,0)$ (b) $(10,0)$ (c) $(2,0)$ (d) $(5,0)$ (c) $(4,0)$
সমাধান: (c) ; $5y = x + 50 \Rightarrow x = 5y - 50$
$y^2 = 4ax \Rightarrow y^2 = 4a(5y - 50) \Rightarrow y^2 - 20ay + 200a = 0$
যেহেতু স্পর্শ করে তাই ছেদবিন্দু একটি, ফলে নিশ্চায়ক শূন্য।
$\therefore D = (-20a)^2 - 4.200a.1 \Rightarrow 0 = 400a^2 - 800a \Rightarrow a^2 - 2a = 0$

06. $y = x + 5$ সরলরেখাটি যে সমীকরণকে কখনও স্পর্শ করে না- [RUET'11-12]

(a) $y^2 = 20x$ (b) $9x^2 + 16y^2 = 144$ (c) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$

(d) $x^2 + y^2 = 25$ (e) $y^2 - x^2 = 25$

সমাধান: (d); $x^2 + (x+5)^2 = 25$; $x = -5, 0$

$\therefore y = x + 5$, $x^2 + y^2 = 25$ কে ছেদ করে।

07. যদি $y = 3x + 1$ রেখাটি $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তকে স্পর্শ করে তবে উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্যের মান কত? [KUET'10-11]

(a) 10 (b) 11 (c) 12 (d) 13 (e) 14

সমাধান: (c); এখানে, $m = 3$ এখন, $a = mc = 3 \times 1$; $a = 3$

$\therefore y^2 = 4 \times 3 \times x = 12x$; $c = 1 \therefore$ উপকেন্দ্রিক লম্ব 12 একক।

Written

08. $y = 4x + 2$ সরলরেখা $y^2 = 12x$ পরাবৃত্তকে স্পর্শ করলে স্পর্শবিন্দুর স্থানাংক নির্ণয় কর। [BUTEX'18-19]

সমাধান (a); $y = 4x + 2 \Rightarrow 3y - 12x - 6 = 0$

$\Rightarrow 3y - y^2 - 6 = 0$ $[y^2 = 12x]$ $\Rightarrow y^2 - 3y + 6 = 0$

যেহেতু নিশ্চায়ক $b^2 - 4ac = 9 - 4.1.6 = 9 - 24 = -15 < 0$

সরল রেখাটি পরাবৃত্তটিকে স্পর্শ করে না।

বিকল্প: $y = 4x + 2$, $y^2 = 12x$

$\Rightarrow (4x+2)^2 - 12x = 0 \Rightarrow 16x^2 + 16x + 4 - 12x = 0 \Rightarrow 16x^2 + 4x + 4 = 0$

এখানে, নিশ্চায়ক, $D = 0$ হবে যদি স্পর্শক হয় রেখাটি।

$\therefore D = 4^2 - 4.16.4 = -240$

পরাবৃত্তটিকে যেহেতু $D < 0$, সেহেতু উক্ত রেখাটি পরাবৃত্তটিকে স্পর্শ করবে না।

09. $(0, 2)$ বিন্দুটি $y = 5x^2 + 3x + c$ বক্ররেখার উপর অবস্থিত। ঐ বিন্দুতে বক্ররেখার উপর অঙ্কিত স্পর্শক $ax + cy + 1 = 0$ রেখার সমান্তরাল হলে a এর মান কত? [SUST'12-13]

সমাধান: $(0, 2)$ বিন্দুটি $y = 5x^2 + 3x + c$ বক্ররেখার উপর অবস্থিত। $\therefore 2 = 5 \times 0^2 + 3 \times 0 + c$

$\therefore c = 2$ $\therefore$ সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ $ax + 2y + 1 = 0$ এবং বক্ররেখার সমীকরণ, $y = 5x^2 + 3x + 2$

$\therefore y' = 10x + 3$ [বক্ররেখার সমীকরণকে x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে]

$\therefore (0,2)$ বিন্দুতে, $y' = 3$

$\therefore (0, 2)$ বিন্দুতে বক্ররেখার উপর অঙ্কিত স্পর্শক, $(y - 2) = y'(x - 0) \Rightarrow y - 2 = 3x \therefore 3x - y + 2 = 0$

$\therefore -6x + 2y - 4 = 0$ যা $-6x + 2y + 1 = 0$ রেখার সমান্তরাল। $\therefore a = -6.$

10. $y = 3x + 1$ সরলরেখা $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্তকে স্পর্শ করলে, a এর মান, স্পর্শবিন্দুর স্থানাংক, উপকেন্দ্রের স্থানাংক, উপকেন্দ্রিক লম্বের দৈর্ঘ্য ও নিয়ামকের সমীকরণ নির্ণয় কর। [CUET'04-05]

সমাধান: $y^2 = 4ax$ কে $y = mx + c$ স্পর্শ করলে $a = mc$

প্রশ্নমতে, $a = 3 \times 1$ $\therefore a = 3$ হবে

এখন, $y = 3x + 1$ $\Rightarrow y^2 = 12x$

$\Rightarrow (3x+1)^2 = 12x \Rightarrow 9x^2 + 6x + 1 = 12x$

$\Rightarrow 9x^2 - 6x + 1 = 0 \Rightarrow (3x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

$\therefore y = 3.\frac{1}{3} + 1 = 2$

উপকেন্দ্র $(3, 0)$

উপকেন্দ্রিক লম্ব $4 \times 3 = 12$

দিকাক্ষ ঃ $x + a = 0 \Rightarrow x + 3 = 0$

স্পর্শ বিন্দুর স্থানাংক $\left(\frac{1}{3}, 2\right)$ (Ans.)