Question Type-01: দুইটি বলের লব্ধি নির্ণয়ের ক্ষেত্রে সামান্তরিক সূত্রের প্রয়োগ সংক্রান্ত

➲ **Formula & Concept:**

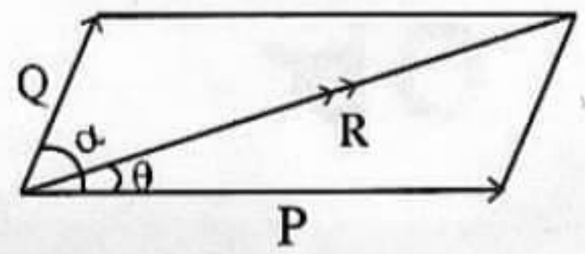
♦ লব্ধি, $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$; $\tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}$

➢ মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha = 0°$, হলে, $R = R_{max} = P + Q$ (বৃহত্তম লব্ধি)

➢ মধ্যবর্তী কোণ, $\alpha = 180^0$ হলে, $R = R_{min} = P \sim Q$ (ক্ষুদ্রতম লব্ধি)

➢ $\alpha = 90°$ হলে লব্ধি, $R_p = \sqrt{P^2 + Q^2}$ [p ⇒ Perpendicular (লম্ব)]

➢ $P = Q$ হলে, $R_e = 2P\cos\frac{\alpha}{2}$; $\theta = \frac{\alpha}{2}$ [e ⇒ Equal (সমান)]



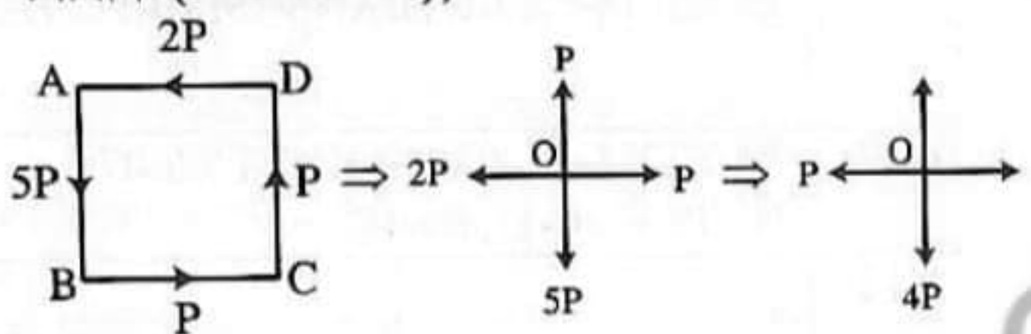
➢ $(P+Q)^2 + (P\sim Q)^2 = 2(P^2 + Q^2) \Rightarrow R_{max}^2 + R_{min}^2 = 2R_p^2$

MCQ

01. একটি বর্গক্ষেত্রের চারবাহু $\overrightarrow{AB} = 5P, \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD} = P$ এবং $\overrightarrow{DA} = 2P$ বরাবর বলগুলো ক্রিয়ারত। বলগুলোর লব্ধি নির্ণয় কর। **[CKRUET'21-22]**

(a) 9P unit (b) $\sqrt{45}$P unit (c) $4\sqrt{2}$P unit (d) 5P unit (e) $5\sqrt{2}$P unit

সমাধান: (No Answer);

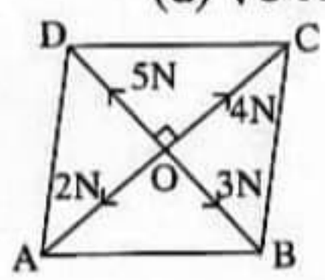


∴ লব্ধি, $R = \sqrt{P^2 + (4P)^2} = \sqrt{P^2 + 16P^2} = \sqrt{17}P$

02. Suppose the two diagonals of a rhombus ABCD intersect at point O. Four forces 2 N, 3 N, 4 N and 5 N are applied along the sides OA, OB, OC and OD respectively. What is the resultant force? **[IUT'21-22]**

(a) 5 N (b) $2\sqrt{2}$ N (c) $\sqrt{2}$ N (d) $\sqrt{5}$ N

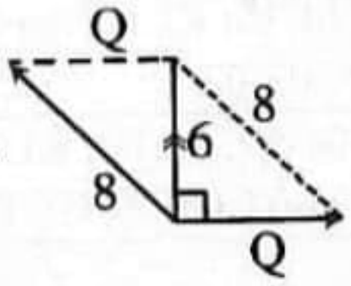
Solution: (b); $R = \sqrt{(5-3)^2 + (4-2)^2}\ N = \sqrt{2^2 + 2^2}\ N = 2\sqrt{2}\ N$



03. The resultant of two forces 8 N and Q acting at a point is 6 N, acting at right angle to the direction of Q. The value of Q is- **[IUT'20-21]**

(a) $3\sqrt{7}$ N (b) $3\sqrt{5}$ (c) $2\sqrt{7}$ N (d) $2\sqrt{5}$ N

Solution: (c);



; $Q = \sqrt{8^2 - 6^2}\ N = \sqrt{64 - 36}\ N = \sqrt{28}\ N = 2\sqrt{7}\ N$

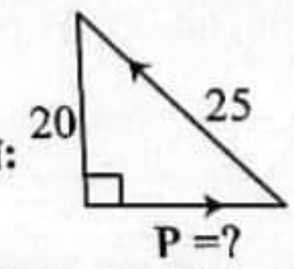
04. কোন বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও Q মানের দুইটি বলের লব্ধি 20N যা P এর দিকের সাথে সমকোণ উৎপন্ন করে। Q এর মান 25 N হলে P এর মান কোনটি? **[BUET'13-14, KUET'18-19]**

(a) 5 N (b) 15 N (c) 10 N (d) 20 N (e) 25 N

সমাধান: (b); $P + Q\cos\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{P}{25}$

$R^2 = 20^2 = P^2 + 25^2 + 2.P.25\left(-\frac{P}{25}\right) \Rightarrow P = 15N$

বিকল্প:

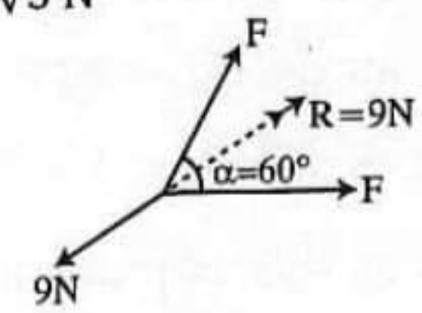


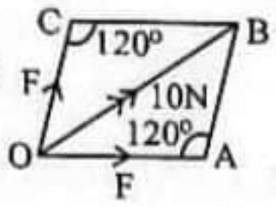
; $P = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15N$

05. Two equal forces acting at a point at $60°$ are balanced by a force 9N acting on the same point. Value of each of the equal forces- **[BUTEX'10-11, IUT'18-19]**

(a) 3 N (b) $\sqrt{3}$ N (c) 7 N (d) $3\sqrt{3}$ N

Solution: (d); $R_e = 2F\cos\frac{\alpha}{2} \Rightarrow 9 = 2F\cos\frac{60°}{2} \Rightarrow 9 = 2F\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow F = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$ N



06. In figure OABC is a rhombus 

What is the value of F? **[IUT'18-19]**

(a) $\frac{10\sqrt{10}}{\sqrt{3}}$N (b) $\frac{10\sqrt{30}}{\sqrt{10}}$N (c) $\frac{10\sqrt{10}}{\sqrt{30}}$N (d) $\frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{10}}$N

Solution: (c); $\angle AOC = 60°$; $\theta = \frac{1}{2}\angle AOC = 30°$; $2F\cos\theta = 10 \therefore \sqrt{3} \times F = 10$

$\therefore F = \frac{10}{\sqrt{3}} = 10 \times \sqrt{\frac{10}{30}} = \frac{10\sqrt{10}}{\sqrt{30}}$N

07. একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল দুইটি বলের বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম লব্ধির মান 8 ও 2 কেজি ওজন। যখন বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ $60°$ তখন লব্ধির মান কত? **[BUTEX'14-15]**

(a) 5 kg − wt (b) 7 kg − wt (c) 3 kg − wt (d) 9 kg − wt

সমাধান: (b) ; $P + Q = 8; P - Q = 2 \Rightarrow P = 5, Q = 3$

$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha} = \sqrt{5^2 + 3^2 + 2.5.3\cos60°} = 7\text{kg} - \text{wt}$

08. 3N ও 5N মানের দুইটি বল এক বিন্দুতে পরস্পর বিপরীত দিকে ক্রিয়া করে। তাদের লব্ধির মান কোনটি? **[RUET'13-14]**

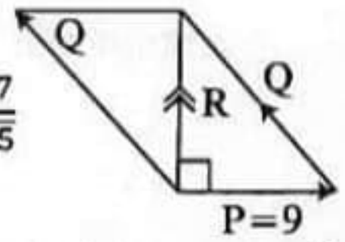
(a) 12N (b) 10N (c) 8N (d) 2N (e) None

সমাধান: (d) ; 3N ←——— 5N ∴ লব্ধির মান = 2N.

09. যদি 9 একক বিশিষ্ট একটি বল ও অজানা একটি বল একই বিন্দুতে এমনভাবে ক্রিয়া করে যে তাদের লব্ধি অজানা বলের দুই-তৃতীয়াংশ এবং জানা বলের উপর লম্ব হয়ে তবে অজানা বলটি হবে- **[KUET'13-14]**

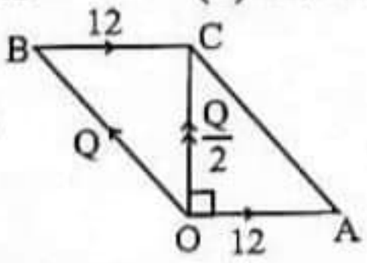
(a) $\frac{27}{\sqrt{5}}$ units (b) $\frac{72}{\sqrt{2}}$ units (c) $\frac{18}{\sqrt{5}}$ units (d) 27 units (e) $\frac{9}{\sqrt{3}}$ units

সমাধান: (a); $Q^2 = P^2 + R^2 \Rightarrow Q^2 = 9^2 + \left(\frac{2}{3}Q\right)^2 \Rightarrow \frac{5}{9}Q^2 = 9^2 \Rightarrow Q^2 = \frac{9^3}{5} \Rightarrow Q = \frac{3^3}{\sqrt{5}} \therefore Q = \frac{27}{\sqrt{5}}$



10. যদি 12 একক বিশিষ্ট একটি বল ও অজানা একটি বল একই বিন্দুতে এমনভাবে ক্রিয়া করে যে, তাদের লব্ধি অজানা বলের অর্ধেক এবং জানা বলের উপর লম্ব হয়, তবে অজানা বলটির মান কোনটি? **[KUET'12-13]**

(a) $9\sqrt{2}$ units (b) $8\sqrt{3}$ units (c) $16\sqrt{3}$ units (d) $18\sqrt{2}$ units (e) $4\sqrt{6}$ units

সমাধান: (b); 

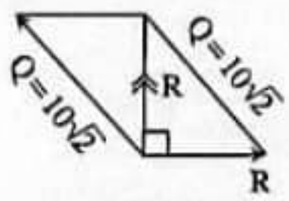
ΔOBC হতে, $OB^2 = OC^2 + BC^2 \Rightarrow Q^2 = \frac{Q^2}{4} + 144 \Rightarrow \frac{3Q^2}{4} = 144 \therefore Q = 8\sqrt{3}$ units

11. $10\sqrt{2}$ একক বিশিষ্ট একটি বল এবং অজানা অপর একটি বল একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। তাদের লব্ধি অজানা বলটির উপর লম্ব এবং এর মান অজানা বলের এক-তৃতীয়াংশ হলে, অজানা বলটির মান কত? **[KUET'10-11]**

(a) 15 একক (b) $5\sqrt{2}$ একক (c) $15\sqrt{2}$ একক (d) 12 একক (e) 10 একক

সমাধান: (No Correct Ans); $Q^2 = P^2 + R^2 \Rightarrow Q^2 = P^2 + \left(\frac{1}{3}P\right)^2$

$\Rightarrow \left(10\sqrt{2}\right)^2 = \frac{10}{9}P^2 \Rightarrow P = \sqrt{\frac{10^2 \times 2 \times 9}{10}} \therefore P = \sqrt{180}$ একক



Written

12. দুইটি বলের অন্তবর্তী কোণ $\frac{\pi}{3}$ থেকে $\frac{2\pi}{3}$ ঘুরালে লব্ধি অর্ধেক হয়। একটি বলের মান 1 একক হলে অপরটির মান নির্ণয় কর।

সমাধানঃ ধরি, বলদ্বয় P ও Q। P = 1 হলে Q =? $\therefore R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta$ **[RUET'18-19]**

১ম শর্তে, $R^2 = 1 + Q^2 + 2Q\cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow R^2 = 1 + Q^2 + Q$

২য় শর্তে, $\left(\frac{R}{2}\right)^2 = 1 + Q^2 + 2Q\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow \frac{R^2}{4} = 1 + Q^2 - 2Q$

$\Rightarrow 1 + Q^2 + Q = 4 + 4Q^2 - 8Q \Rightarrow 3Q^2 - 9Q + 3 = 0 \Rightarrow Q^2 - 3Q + 1 = 0$; Solving, $Q = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ (Ans.)

13. ΔABC এর CA এবং CB বাহু বরাবর ক্রিয়ারত দুটি বলের মান cosA এবং cosB এর সমানুপাতিক। প্রমাণ কর যে, তাদের লব্ধির মান sinC এর সমানুপাতিক তার দিক C কোণকে $\frac{1}{2}(C + B - A)$ এবং $\frac{1}{2}(C + A - B)$ অংশে বিভক্ত করে।

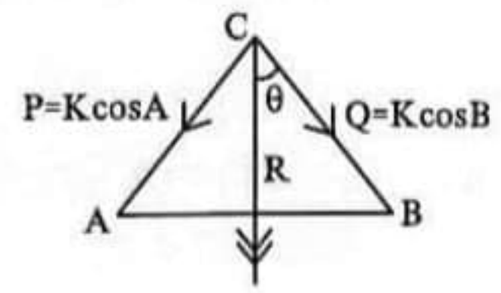
সমাধানঃ $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos C$ **[BUTEX'18-19]**

আমরা পাই, $R^2 = k^2\cos^2 A + k^2\cos^2 B + 2k^2\cos A\cos B\cos C$

$\Rightarrow R^2 = k^2(\cos^2 A + \cos^2 B + 2\cos A\cos B\cos C)$

$\Rightarrow R^2 = k^2(1 - \cos^2 C)$ [$\because \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C = 1$]

$\Rightarrow R^2 = k^2\sin^2 C \Rightarrow R = k\sin C \therefore R \propto \sin C$ (Proved)



মনে করি, R এর দিক CB এর সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে।

$\therefore R\cos\theta = k\cos B + k\cos A\cos C \mid \cos B = \cos(\pi - (A + C)) = -\cos(A + C)$

$\Rightarrow K\sin C\cos\theta = k\cos B + k\cos A\cos C \Rightarrow \sin C\cos\theta = -\cos(A + C) + \cos A\cos C$

$\Rightarrow \cos\theta = \sin A = \cos\left(\frac{\pi}{2} - A\right) \Rightarrow \theta = \frac{A+B+C}{2} - A = \frac{A+B+C-2A}{2} = \frac{B-A+C}{2}$

$\therefore$ অপর কোণ $\theta' = C - \theta = C - \frac{B-A+C}{2} = \frac{2C-B+A-C}{2} = \frac{C-B+A}{2}$ [Showed]

14. কখন সমবিন্দু দুইটি বলের লব্ধি ক্ষুদ্রতম হবে? **[BUTEX'10-11]**

সমাধান: সমবিন্দু দুটি বল যদি 180° কোণে ক্রিয়া করে তবে এদের লব্ধি ক্ষুদ্রতম হবে।

15. কখন সমবিন্দু দুইটি বলের লব্ধি বৃহত্তম হবে? **[BUTEX'09-10]**

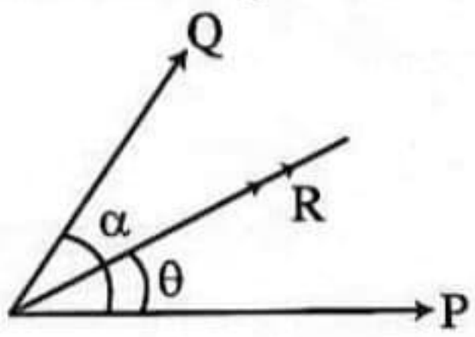
সমাধান: যদি তাদের দিক একই হয়।

Click to edit

Question Type-02: দুটি বলের অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয় সংক্রান্ত সমস্যা

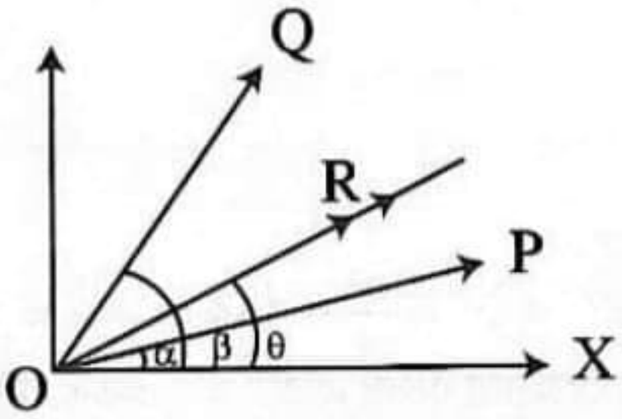
➲ **Formula & Concept:**

➢ সামান্তরিকের সূত্র ব্যবহার করে



$\tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$

➢ লম্বাংশ উপপাদ্য ব্যবহার করে



OX বরাবর লম্বাংশ নিলে, $P\cos\alpha + Q\cos\beta = R\cos\theta$ ..... (i)

OX এর লম্ব বরাবর লম্বাংশ নিলে, $P\sin\alpha + Q\sin\beta = R\sin\theta$ ..... (ii)

(ii) ÷ (i) করে $\tan\theta$ নির্ণয় করা যায়।

$\sqrt{(ii)^2 + (i)^2}$ করে R নির্ণয় করা যায়।

MCQ

01. সমমানের দুইটি বলের লব্ধির বর্গ বলদ্বয়ের গুণফলের তিনগুণ হলে তাদের মধ্যবর্তী কোণ কত? **[BUET'10-11, BUTEX'16-17]**

(a) 0° (b) 45° (c) 60° (d) 90°

সমাধান: (c); প্রশ্নমতে, $3p^2 = p^2 + p^2 + 2p^2\cos\theta \Rightarrow \theta = 60^\circ$

02. 3p, 2p বল দুইটির লব্ধি R; যদি প্রথম বলকে দ্বিগুণ করা হয় তবে, লব্ধিও দ্বিগুণ হয়। বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ কত?

(a) 60° (b) 240° (c) 120° (d) -60° **[IUT'10-11, BUTEX'15-16]**

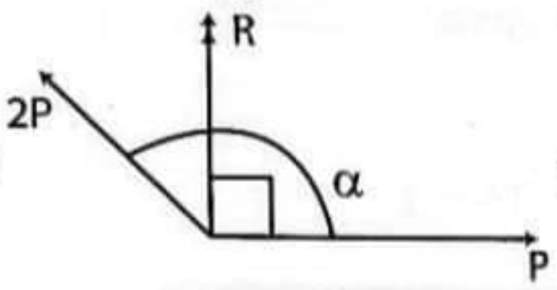
সমাধান: (c); $R^2 = (3p)^2 + (2p)^2 + 2.3p.2p.\cos\theta = 13p^2 + 12p^2\cos\theta$

$(2R)^2 = (6p)^2 + (2p)^2 + 2.6p.2p.\cos\theta \Rightarrow 4\{13p^2 + 12p^2\cos\theta\} = 36p^2 + 4p^2 + 24p^2\cos\theta$

$\Rightarrow 52p^2 + 48p^2\cos\theta = 40p^2 + 24p^2\cos\theta \Rightarrow 24p^2\cos\theta = -12p^2 \Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 120^\circ$

03. কোন বিন্দুতে ক্রিয়ারত p এবং 2p মানের বলদ্বয়ের লব্ধি যদি p এর ক্রিয়ারেখার উপর লম্ব হয়, তবে বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের মান কত? **[BUTEX'12-13]**

(a) 135° (b) 60° (c) 45° (d) 120°

সমাধান: (d); 

; P বরাবর লম্বাংশ $P + 2p\cos\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 120^\circ$

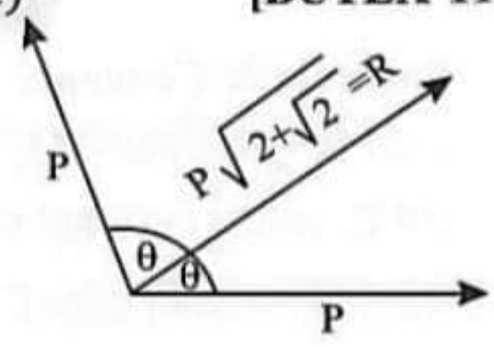
04. P মানের দুটি বলের লব্ধি $P\sqrt{2+\sqrt{2}}$, এদের যে কোন একটি বলের সাথে লব্ধির নতি (Angle) - **[BUTEX'11-12]**

(a) $22\frac{1}{2}^\circ$ (b) 60° (c) 45° (d) 90°

সমাধান: (c); $R^2 = P^2 + P^2 + 2P^2\cos\alpha$

$\Rightarrow 2 + \sqrt{2} = 2(1 + \cos\alpha) \therefore \alpha = 45^\circ$

সমান বল অন্তর্গত কোণকে সমদ্বিখন্ডিত করে। অতএব, লব্ধির নতি $22\frac{1}{2}^\circ$



05. কোন কণার উপর ক্রিয়ারত 2 টি সমান বলের লব্ধির বর্গ তাদের গুণফলের 3 গুণ হলে বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর। **[CUET'10-11, BUET'10-11]**

(a) 30° (b) 120° (c) 60° (d) None of these

সমাধান: (c); P মানের বলদ্বয় α কোণে ক্রিয়াশীল হলে, $P^2 + P^2 + 2P.P\cos\alpha = 3P.P$

$\Rightarrow 2P^2\cos\alpha = P^2 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ \therefore \alpha = 60^\circ$

Written

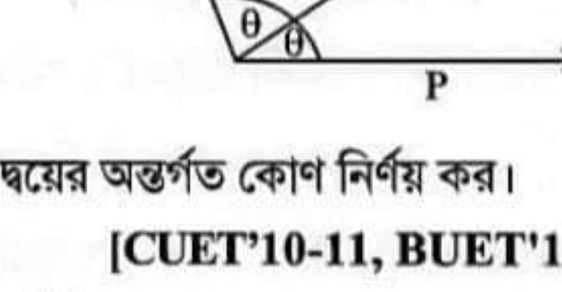
06. কোন বিন্দুতে ক্রিয়ারত P ও Q (P > Q) মানের দুটি বলের লব্ধি P বলের দিকের সাথে 60° কোণ উৎপন্ন করে। P বলটিকে দ্বিগুণ করলে উক্ত কোণ 30° হয়। বল দুটির অন্তর্ভূক্ত কোণ নির্ণয় কর। **[KUET'06-07, BUET'11-12]**

সমাধান: $\tan 60^\circ = \frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}$ এবং $\tan 30^\circ = \frac{Q\sin\alpha}{2P+Q\cos\alpha}$

$\therefore \frac{\tan 60^\circ}{\tan 30^\circ} = \frac{2P+Q\cos\alpha}{P+Q\cos\alpha} \Rightarrow 3 = \frac{2P+Q\cos\alpha}{P+Q\cos\alpha}$

$\Rightarrow 2P + Q\cos\alpha = 3P + 3Q\cos\alpha \Rightarrow P = -2Q\cos\alpha$

$\therefore \tan 60^\circ = \frac{Q\sin\alpha}{-2Q\cos\alpha+Q\cos\alpha} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{Q\sin\alpha}{-Q\cos\alpha} \Rightarrow \tan\alpha = -\sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 120^\circ$



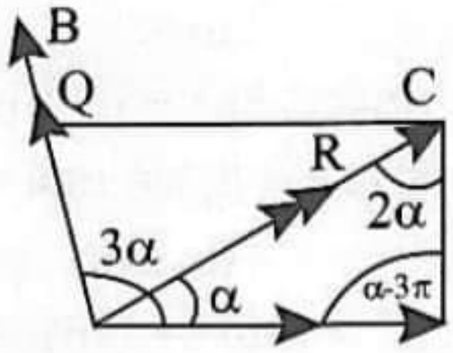
07. কোন কণার উপর ক্রিয়ারত দুইটি সমান বলের লব্ধির বর্গ তাদের গুণফলের তিনগুণ হলে, বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ কত? **[BUTEX'10-11]**

সমাধান: ধরি, সমান বলদ্বয় P, P এবং অন্তর্গত কোণ α

$\therefore 3P^2 = P^2 + P^2 + 2P^2\cos\alpha \Rightarrow P^2 = 2P^2\cos\alpha \therefore \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ$

08. P ও Q বল দুইটির ক্রিয়ারেখার মধ্যবর্তী কোণ যদি 3α হয়, তবে ইহাদের লব্ধি P বলের ক্রিয়ারেখার সহিত α কোণ তৈরি করে। দেখাও যে, $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{P}{2Q}\right)$ এবং লব্ধি $R = \frac{P^2-Q^2}{Q}$ যেখানে $P > Q$. **[BUTEX'09-10]**

সমাধান: শর্তানুসারে, $\angle AOB = 3\alpha, \angle AOC = \alpha \quad \therefore \angle BOC = 2\alpha$



বলের সাইন সূত্র প্রয়োগ করে, $\frac{P}{\sin 2\alpha} = \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin 3\alpha}$

$\therefore \frac{P}{Q} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} = 2\cos\alpha \quad \therefore \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{P}{2Q}\right)$ (Shown)

আবার, $\frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin 3\alpha} \Rightarrow R = \frac{Q\sin 3\alpha}{\sin\alpha} = \frac{Q(3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha)}{\sin\alpha}$

$= Q(3 - 4\sin^2\alpha) = Q(3 - 4 + 4\cos^2\alpha) = Q(4\cos^2\alpha - 1) = Q\left\{4\left(\frac{P}{2Q}\right)^2 - 1\right\} = \frac{P^2-Q^2}{Q}$ (Showed)

09. 3P এবং 2P মানের দুটি বলের লব্ধি R। প্রথম বলটির মান দ্বিগুণ করলে লব্ধির মানও দ্বিগুণ হয়। বলদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ নির্ণয় কর। **[BUET'03-04]**

সমাধান: ধরি, নির্ণেয় কোণ $= \alpha$

তাহলে, $R^2 = 9P^2 + 4P^2 + 2.3P.2P.\cos\alpha = P^2(13 + 12\cos\alpha)$ .....(i)

আবার, $4R^2 = 36P^2 + 4P^2 + 2.6P.2P.\cos\alpha = P^2(40 + 24\cos\alpha)$ .....(ii)

সমীকরণ (ii) কে (i) দ্বারা ভাগ করে পাই, $4 = \frac{40+24\cos a}{13+12\cos a}$

$\Rightarrow \cos\alpha\ (48 - 24) = 40 - 52 \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 120°$ (Ans.)

Question Type-03: লব্ধির দিক অপরিবর্তীত থাকা সংক্রান্ত

➲ **Formula & Concept:**

একই বিন্দুতে ক্রিয়াশীল দুইটি বলকে সমান অনুপাতে বৃদ্ধি বা হ্রাস করা হলে লব্ধির দিক অপরিবর্তীত থাকে।

অথবা, এভাবে চিন্তা করা যায়, প্রথম বলকে যতগুণ বাড়ানো হবে, ২য় বলকেও ততগুণ বাড়ালে লব্ধির দিক অপরিবর্তীত থাকে।

♦ **Note:** সদৃশকোণী ত্রিভুজের ধর্ম ব্যবহার করে অথবা $\tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}$ ব্যবহার করেও সমস্যাগুলো সমাধান করা যায়। Written Exam এর জন্য সদৃশকোণী ত্রিভুজের ধর্ম বা $\tan\theta$ এর সূত্র ব্যবহার করে সমস্যাগুলো সমাধান করাই উত্তম।

Shortcut: লব্ধির দিক অপরিবর্তিত থাকার শর্ত: $\left(\frac{\text{১ম বল}}{\text{২য় বল}}\right)_{\text{১ম ক্ষেত্র}} = \left(\frac{\text{১ম বল}}{\text{২য় বল}}\right)_{\text{২য় ক্ষেত্র}}$

MCQ

01. দুইটি বল p ও 2p একটি বস্তুর উপর ক্রিয়াশীল। যদি বল দুইটি 2p ও 2p + 8 পরিমাণ বৃদ্ধি করা হয়, তবে লব্ধির দিক অপরিবর্তিত থাকে তাহলে P এর মান **[KUET'08-09, CUET'11-12, RUET'12-13, IUT'18-19]**

(a) 2 (b) 8 (c) 4 (d) 1 (e) None

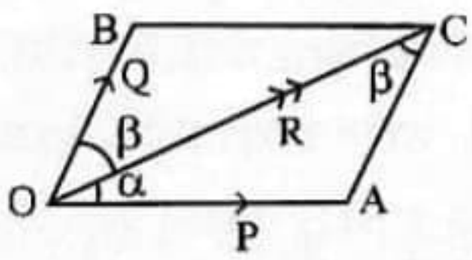
সমাধান: (c); $\frac{P}{2p} = \frac{P+2P}{2P+(2P+8)} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{3P}{4P+8} \Rightarrow 4P + 8 = 6P \ \therefore P = 4$

Question Type-04: ভেক্টরের লব্ধির Sine সূত্র প্রয়োগ সংক্রান্ত সমস্যা

➲ **Formula & Concept:**

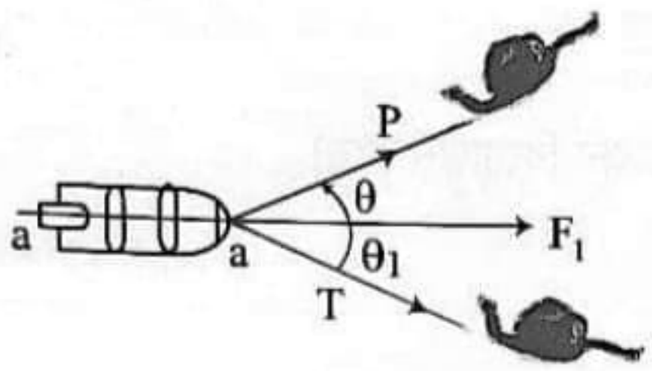
বলের sine সূত্রানুসারে, $\frac{P}{\sin\beta} = \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin(\alpha+\beta)}$ $\begin{bmatrix}\beta = Q \text{ ও } R \text{ এর মধ্যবর্তী কোণ}\\ \alpha = P \text{ ও } R \text{ এর মধ্যবর্তী কোণ}\\ \alpha+\beta = P \text{ ও } Q \text{ এর মধ্যবর্তী কোণ}\end{bmatrix}$

$\boxed{\alpha < \beta}$ [$\because \Delta OAC$-এ $AC < OA$] $\therefore$ লব্ধি বৃহত্তর বলের দিকে বেশি হেলে থাকে।



MCQ

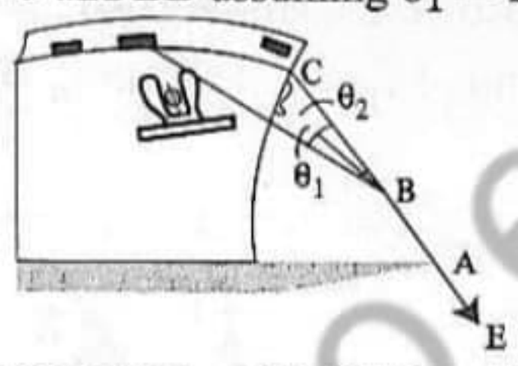
01. The boat shown in the following figure is to be pulled onto the shore using two ropes. If the resultant force is to be $F_1 = 80\ \ell b$ directed along the line aa, determine the magnitudes of the force P so that the magnitude of P is minimum. T acts at an angle $\theta_1 = 30°$ from the line aa. The force P will be minimum for a certain angle between P and T.
[IUT'16-17]



(a) $40\ell b$ (b) $56.56\ell b$ (c) $69.3\ell b$ (d) $77.27\ell b$

Solution: (a); $\frac{80\sin 30°}{\sin 90°} = 40\ell b$

02. The ship shown in the following figure is moving at a constant velocity by a tugboat applying a force $F_1 =$ 50kN. Determine the force in each of BC and BD assuming $\theta_1 = 20°$ and $\theta_2 = 30°$. **[IUT'16-17]**



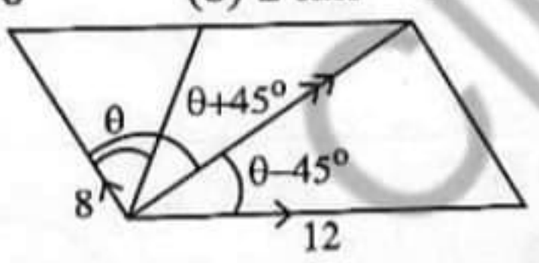
(a) 25.25 and 12.54kN (b) 22.32 and 32.64kN (c) 62.32 and 82.64kN (d) 102.32 and 32.64 kN

Solution: (b); $\frac{50\sin(20)}{\sin 50} = 22.32\text{kN}$; $\frac{50\sin 30}{\sin 50} = 32.635\text{ kN}$

03. যদি 12 ও 8 একক মানের বলদ্বয় একটি বিন্দুতে এমন কোণে ক্রিয়াশীল যেন তাদের লব্ধি তাদের অন্তর্গত কোণের সমদ্বিখন্ডক রেখার সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে, তবে তাদের মধ্যবর্তী কোণের মান কত? **[KUET'15-16]**

(a) $2\tan^{-1}10$ (b) $2\tan^{-1}4$ (c) $2\tan^{-1}2$ (d) $2\tan^{-1}5$ (e) কোনটিই নয়

সমাধান: (d);



বলের sine সূত্রানুসারে,

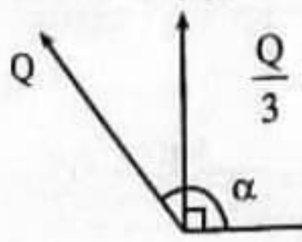
$\frac{8}{\sin(\theta-45°)} = \frac{12}{\sin(\theta+45°)} \Rightarrow 2\sin\theta\cos 45° + 2\cos\theta\sin 45° = 3\sin\theta\cos 45° - 3\cos\theta\sin 45°$

$\Rightarrow 2\sin\theta + 2\cos\theta = 3\sin\theta - 3\cos\theta \Rightarrow \tan\theta = 5 \Rightarrow \theta = \tan^{-1}5 \quad \therefore 2\theta = 2\tan^{-1}5$

04. যদি কোন কণার উপর ক্রিয়ারত দুইটি বলের লব্ধি একটি বলের উপর লম্ব এবং এর মান অপরটির মানের এক-তৃতীয়াংশের সমান হয় তবে বলদ্বয়ের মানের অনুপাত হবে- **[BUET'12-13]**

(a) $2\sqrt{2}:3$ (b) $3\sqrt{2}:2$ (c) $2:3\sqrt{3}$ (d) $2\sqrt{2}:4$

সমাধান: (a);



চিত্রে থেকে, $\frac{P}{\sin(\alpha-90°)} = \frac{Q}{\sin 90°} = \frac{Q/3}{\sin\alpha}$

$\therefore \frac{Q}{1} = \frac{Q}{3\sin\alpha} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{3}$

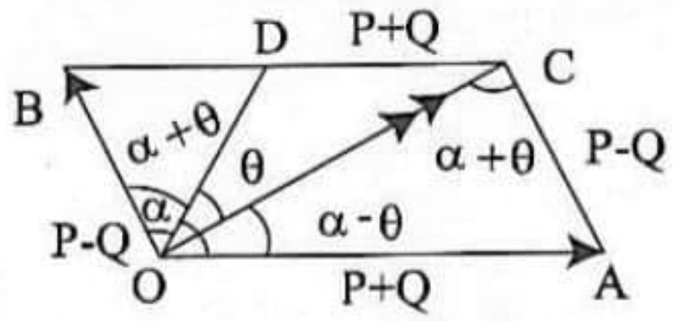
আবার, $\cos\alpha = -\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ [স্পষ্টত α স্থূলকোণ]

এখন, P বরাবর লম্বাংশ $P + Q\cos\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{P}{Q} \Rightarrow -\frac{2\sqrt{2}}{3} = -\frac{P}{Q} \Rightarrow P:Q = 2\sqrt{2}:3$

Written

05. দুইটি বল $P+Q$ এবং $P-Q$ পরস্পর 2α কোণে ক্রিয়া করে। এদের লব্ধি, বল দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণের সমদ্বিখন্ডকের সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে। দেখাও যে, $P\tan\theta = Q\tan\alpha$ **[BUTEX'08-09]**

সমাধান: বলের sine সূত্র হতে পাই,



$$\frac{P+Q}{\sin(\alpha+\theta)} = \frac{P-Q}{\sin(\alpha-\theta)} \Rightarrow \frac{P+Q}{P-Q} = \frac{\sin(\alpha+\theta)}{\sin(\alpha-\theta)}$$

$$\Rightarrow \frac{P+Q+P-Q}{P+Q-P+Q} = \frac{\sin(\alpha+\theta)+\sin(\alpha-\theta)}{\sin(\alpha+\theta)-\sin(\alpha-\theta)}$$ [যোজন-বিয়োজন করে]

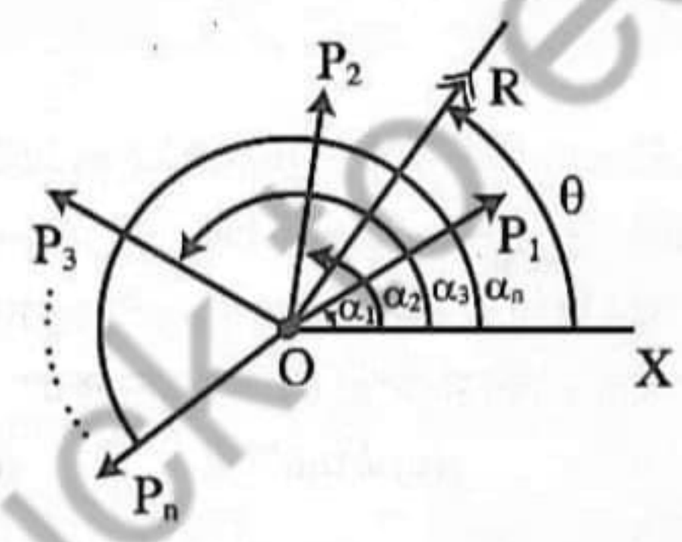
$$\Rightarrow \frac{2P}{2Q} = \frac{2\sin\alpha\cos\theta}{2\cos\alpha\sin\theta} \Rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{\tan\alpha}{\tan\theta}$$

$\therefore P\tan\theta = Q\tan\alpha$ [Showed]

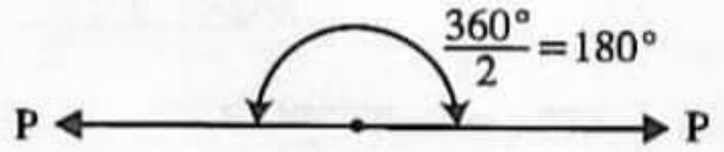
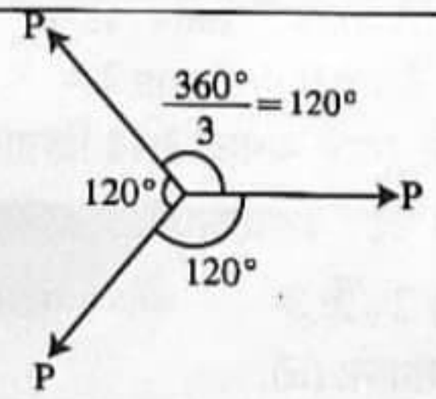
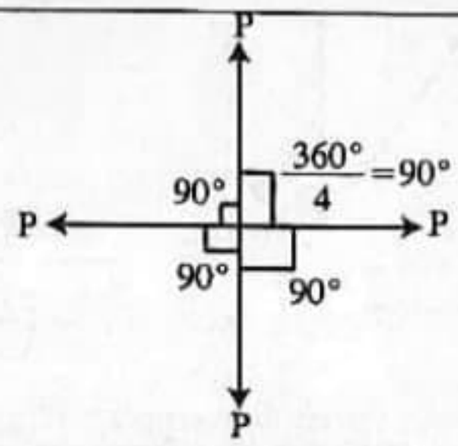
Question Type-05: দুই বা দুই এর অধিক বলের লব্ধি নির্ণয়ের ক্ষেত্রে লম্বাংশ সূত্রের প্রয়োগ

➲ **Formula & Concept:**

- $R\cos\theta = P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 + P_3\cos\alpha_3 + \ldots\ldots\ldots + P_n\cos\alpha_n = R_x$
- $R\sin\theta = P_1\sin\alpha_1 + P_2\sin\alpha_2 + P_3\sin\alpha_3 + \ldots\ldots\ldots + P_n\sin\alpha_n = R_y$
- $\tan\theta = \frac{R_y}{R_x}$ এবং $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$



◆ **Some Additional Concept:**

(i)	দুইটি সমান বল পরস্পর বিপরীত দিকে ক্রিয়া করলে তাদের লব্ধি = 0 অর্থাৎ, ২টি সমান বল 360° কে সমান দুই ভাগে ভাগ করলে তাদের লব্ধি = 0, সেক্ষেত্রে তাদের মধ্যবর্তী কোণ $\frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$	
(ii)	অনুরূপভাবে, তিনটি সমান বল 360° কে সমান তিনভাগে ভাগ করলে তাদের লব্ধি = 0, সেক্ষেত্রে যেকোন দুইটি বলের মধ্যবর্তী কোণ $\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$	
(iii)	চারটি সমান বল 360° কে সমান চারভাগে ভাগ করলে তাদের লব্ধি = 0, সেক্ষেত্রে যেকোন দুইটি বলের মধ্যবর্তী কোণ $\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$	

(iv) পাঁচটি সমান বল $360°$ কে সমান পাঁচভাগে ভাগ করলে তাদের লব্ধি $= 0$, সেক্ষেত্রে তাদের যেকোন দুইটি বলের মধ্যবর্তী কোণ $\frac{360°}{5} = 72°$

... ...

05. কোন একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল দুইটি বলের লব্ধির মান $\sqrt{10}$N এবং তাদের মধ্যকার কোণ 45°। উহাদের একটি বলের মান $\sqrt{2}$N হলে অন্যটি কত নির্ণয় কর। **[KUET'13-14]**

(a) -5N (b) 2N (c) -3N (d) 7N (e) 3N

সমাধান: (b); $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta \Rightarrow 10 = 2 + Q^2 + 2\sqrt{2}Q\cos 45° \Rightarrow 8 = Q^2 + 2Q$

$\Rightarrow Q^2 + 2Q - 8 = 0 \ \therefore Q = 2, -4$ কিন্তু, $Q \neq -4 \ \therefore Q = 2$

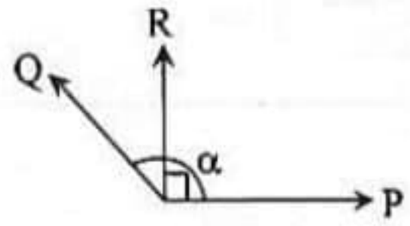
06. কোন বিন্দুতে দুইটি বল 120° কোণে ক্রিয়াশীল। বৃহত্তর বলটির মান 10N এবং তাদের ক্ষুদ্রতম বলের সাথে সমকোণ উৎপন্ন করলে ক্ষুদ্রতম বলের মান- **[BUTEX'13-14]**

(a) 4N (b) 5N (c) 6N (d) 8N

সমাধান: (b) ; $P + Q\cos\alpha = 0$

$P = -Q\cos\alpha = -10\cos 120°$

$P = 5$



07. ABC সমবাহু ত্রিভুজের AB, BC, CA বাহুর বরাবর তিনটি বল যথাক্রমে 2N, 4N ও 6N একই সময় কোন কণার উপর ক্রিয়াশীল। তাদের লব্ধির মান কত? **[CUET'11-12]**

(a) $2\sqrt{3}$N (b)12N (c) 2N (d) None of these

সমাধান: (a); ABC সমবাহু ত্রিভুজের ৩টি বাহু বরাবর ক্রিয়াশীল বলত্রয় সমান্তর ধারা হলে তাদের লব্ধি মান হবে $= \sqrt{3} \times$ সাধারণ অন্তর। এখানে 2N, 4N ও 6N বল এর সমান্তর ধারায় আছে এবং এদের সাধারণ অন্তর 2। $\therefore$ লব্ধির মান $= 2\sqrt{3}$N

Written

08. কোন বিন্দুতে একই সময়ে ক্রিয়ারত $10, 20, 30, 40, 50\ ms^{-1}$ বেগসমূহের প্রথম বেগের দিকের সাথে অপরগুলো যথাক্রমে 45°, 60°, 90° এবং 135° কোণ উৎপন্ন করে। তাদের লব্ধির মান ও দিক নির্ণয় কর। **[CUET'13-14]**

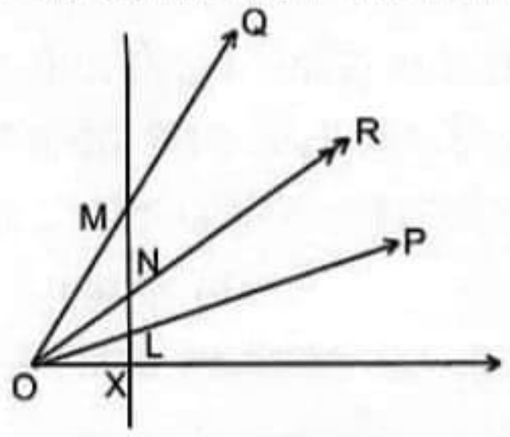
সমাধান: $F\cos\theta = 10 + 20\cos 45° + 30\cos 60° + 40\cos 90° + 50\cos 135° = 3.7868$

$F\sin\theta = 0 + 20\sin 45° + 30\sin 60° + 40\sin 90° + 50\sin 135° = 115.478$

$F = \sqrt{F^2\cos^2\theta + F^2\sin^2\theta} = 115.535 \ \therefore \tan\theta = \frac{F\sin\theta}{F\cos\theta} = 30.495 \Rightarrow \theta = 88.12°$

(Ans. $247.08 ms^{-1}, \theta = 88.12°$)

09. P, Q বলদ্বয় ও এদের লব্ধি R, O বিন্দুতে ক্রিয়া করে। যদি একটি ছেদক P, Q, R এর ক্রিয়ারেখাকে যথাক্রমে L, M, N বিন্দুতে ছেদ করে, তবে দেখাও যে $\frac{P}{OL} + \frac{Q}{OM} = \frac{R}{ON}$। **[RUET'11-12]**



সমাধান: LM ⊥ OX লম্ব আঁকি। OX বরাবর বলগুলোর লম্বাংশ নিয়ে পাই,

$P\cos X\,OL + Q\cos X\,OM = R\cos X\,ON$

$\Rightarrow P.\frac{OX}{OL} + Q.\frac{OX}{OM} = R.\frac{OX}{ON}$

$\therefore \frac{P}{OL} + \frac{Q}{OM} = \frac{R}{ON}$ (Showed)

10. P, 2P, 3P মানের তিনটি বল পরস্পর 120° কোণে আনত হয়ে একটি বিন্দুতে কার্যরত আছে। এদের লব্ধি বলের মান ও দিক নির্ণয় কর। **[BUET'01-02]**

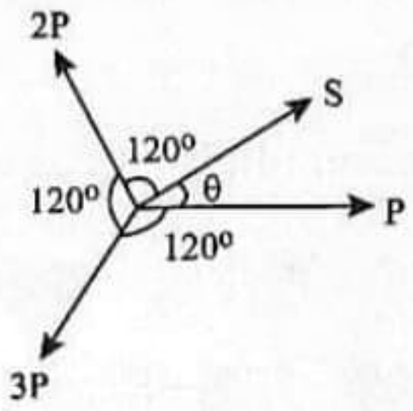
সমাধান: P এর দিক বরাবর উপাংশ নিয়ে, $S\cos\theta = P\cos 0° + 2P\cos 120° + 3P\cos(-120°)$ [চিত্র দ্রষ্টব্য]

$= P - P - \frac{3}{2}P = \frac{-3}{2}P$; P এর লম্ব দিকে উপাংশ নিয়ে, $S\sin\theta = P\sin 0° + 2P\sin 120° + 3P\sin(-120°)$

$= \sqrt{3}P - \frac{3\sqrt{3}}{2}P = \frac{-\sqrt{3}}{2}P$

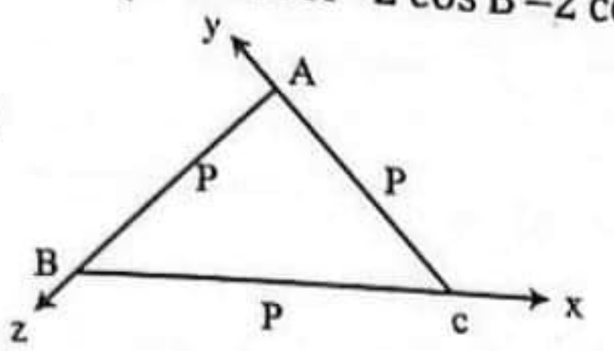
$\therefore S = P\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{P}{2}\sqrt{12} = \sqrt{3}P$

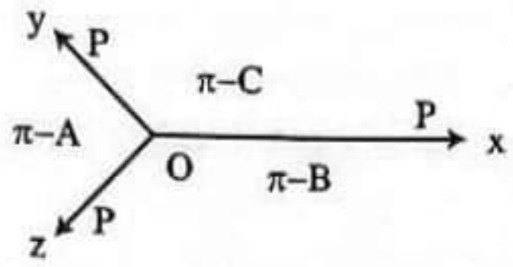
$\therefore \theta = \tan^{-1}\frac{\frac{-\sqrt{3}}{2}P}{\frac{-3}{2}P} = 180° + \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = 180° + 30° = 210°$ (Ans.)



11. ABC ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের সমান্তরালে P মান বিশিষ্ট তিনটি বল একটি বিন্দুতে কার্যকর হলে প্রমাণ কর যে, লব্ধিবল R কে $R^2 = P^2(3-2\cos A-2\cos B-2\cos C)$ দ্বারা প্রকাশ করা যায়। **[BUET'00-01]**

সমাধান:





R, OX এর সাথে θ উৎপন্ন করে।

এখানে, $F_x = P + P\cos(\pi-C) + P\cos(\pi-A+\pi-C) \Rightarrow R\cos\theta = P-P\cos C-P\cos B$

$F_y = P\sin 0° + P\sin(\pi-C) + P\sin(2\pi-A-C) \Rightarrow R\sin\theta = 0 + P\sin C-P\sin B$

$\therefore R^2 = F_x^2 + F_y^2 = P^2 + P^2\cos^2 C + P^2\cos^2 B - 2P^2\cos C - 2P^2\cos B + 2P^2\cos C\cos B + P^2\sin^2 B + P^2\sin^2 C - 2P^2\sin B\sin C$

$\Rightarrow R^2 = P^2 + P^2 + P^2 + 2P^2(\cos B\cos C - \sin B\sin C) - 2P^2\cos C - 2P^2\cos B$

$= 3P^2 - 2P^2\cos A - 2P^2\cos C - 2P^2\cos B = P^2(3 - 2\cos A - 2\cos B - 2\cos C)$ (Proved)

Question Type-06: তিনটি সমবিন্দু বল সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করলে তা হতে বলত্রয়ের অর্ন্তগত কোণ নির্ণয় সংক্রান্ত

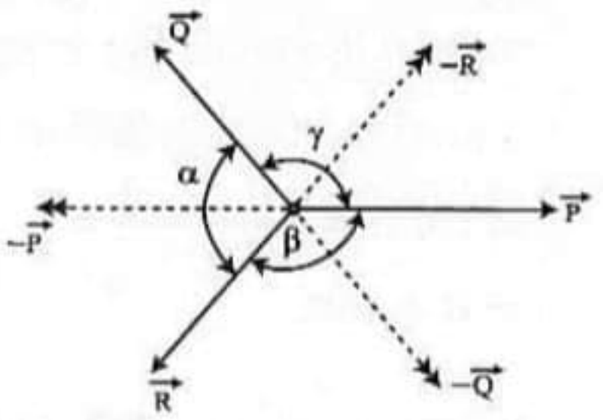
➲ **Formula & Concept:**

এখানে, $\vec{P} + \vec{Q} + \vec{R} = 0$

$\therefore \vec{P} + \vec{Q} = -\vec{R}$

$\therefore \vec{Q} + \vec{R} = -\vec{P}$ $\therefore \vec{P} + \vec{R} = -\vec{Q}$

যেহেতু বল তিনটির লব্ধি = 0 তাই যেকোন দুইটি বলের লব্ধির মান তৃতীয় বলটির সমান এবং লব্ধির দিক তৃতীয় বলটির দিকের বিপরীত দিকে কার্যরত হবে।



$\therefore \vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এর লব্ধির মান $\vec{R}$ এর মানের সমান, $\therefore R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\gamma \Rightarrow \boxed{\cos\gamma = \frac{R^2-P^2-Q^2}{2PQ}}$

অনুরূপভাবে $\boxed{\cos\alpha = \frac{P^2-Q^2-R^2}{2QR}}$ এবং $\boxed{\cos\beta = \frac{Q^2-P^2-R^2}{2PR}}$ এভাবে এদের মধ্যবর্তী কোণগুলো নির্ণয় করা যাবে।

MCQ

01. Forces 5N, 7N and 8N are making balance acting on a body. What is the angle between the forces 5N and 8N? **[IUT'19-20]**

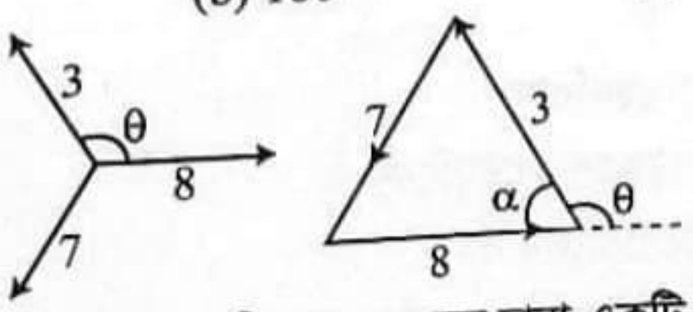
(a) 120° (b) 30° (c) 60° (d) 90°

Solution: (a); The resultant of 5N & 8N is 7N if they're making a balance, if the angle between 5N & 8N force is α then, $7^2 = 5^2+8^2 + 2.5.8\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2} \therefore \alpha = 120°$

02. একটি বস্তু কণায় $3ms^{-1}, 7ms^{-1}$ এবং $8ms^{-1}$ বেগ ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থা রক্ষা করে। বৃহত্তর ও ক্ষুদ্রতম বেগ দুইটির অর্ন্তভুক্ত কোণ নির্ণয় কর। **[BUTEX'15-16]**

(a) 90° (b) 180° (c) 160° (d) 120°

সমাধান: (d);



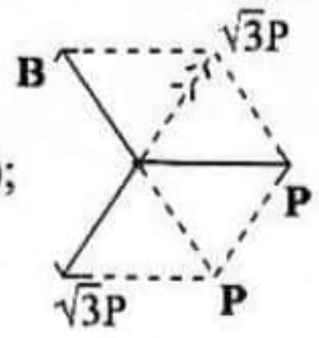
যেহেতু বেগত্রয় সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করে, এদের দ্বারা একটি ত্রিভুজ গঠন সম্ভব।

$\cos\alpha = \frac{3^2+8^2-7^2}{2.3.8} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60° \therefore \theta = 180° - \alpha = 180° - 60° = 120°$

03. তিনটি বল $P, \sqrt{3}P, P$ সাম্যাবস্থায় থাকলে প্রথম দুইটি বলের মধ্যবর্তী কোণ- **[BUTEX'14-15]**

(a) $60°$ (b) $90°$ (c) $120°$ (d) $150°$

সমাধান: (d);



$P^2 = P^2 + (\sqrt{3}P)^2 + 2P.\sqrt{3}P\cos\alpha \Rightarrow 2\sqrt{3}\cos\alpha = -3 \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 150°$

04. $2, \sqrt{5}$ এবং 3 মানের তিনটি বল কোন এক বিন্দুতে ক্রিয়ারত। ইহারা পরস্পর ভারসাম্য সৃষ্টি করলে প্রথমোক্ত বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ কত? **[BUTEX'13-14]**

(a) $30°$ (b) $45°$ (c) $60°$ (d) $90°$

সমাধান: (d); Pythagorean triple: $2^2 + (\sqrt{5})^2 = 3^2 \therefore p_2 \perp p_{\sqrt{5}}$

বিকল্প: $\cos\theta = \frac{R^2-P^2-Q^2}{2PQ} = \frac{9-5-4}{2\times2\times\sqrt{5}} = 0 \ \therefore \theta = 90°$

05. কোন কণার উপর একই সময়ে ক্রিয়াশীল তিনটি বেগ যথাক্রমে $7\ ms^{-1}$, $8\ ms^{-1}$ এবং $13\ ms^{-1}$ কণাটি স্থির থাকলে ক্ষুদ্রতর বেগদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ হবে- **[BUET'12-13]**

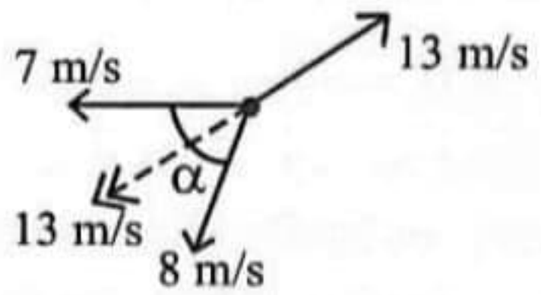
(a) $30°$ (b) $60°$ (c) $45°$ (d) $90°$

সমাধান: (b); কণাটি স্থির থাকলে $7\ ms^{-1}$ ও $8\ ms^{-1}$এর লব্ধি হবে $13\ ms^{-1}$এর সমান ও বিপরীতমুখী

$\therefore (13)^2 = (7)^2 + (8)^2 + 2.7.8\cos\alpha$ [সামান্তরিক সূত্র]

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{13^2-7^2-8^2}{2\times7\times8} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \alpha = 60°$



06. তিনটি সমান বল একটি বিন্দুতে ক্রিয়া করে ঐ বিন্দুকে সাম্যাবস্থায় রেখেছে। বলগুলির অন্তর্ভূক্ত কোণগুলির মান কোনটি? **[CUET'12-13]**

(a) $60°$, $60°$ and $240°$ (b) $90°$, $90°$ and $180°$

(c) $120°$, $120°$ and $120°$ (d) $150°$, $150°$ and $60°$

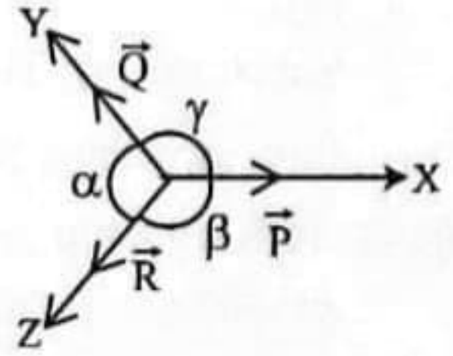
সমাধান: (c) ; $\frac{P}{\sin A} = \frac{P}{\sin B} = \frac{P}{\sin C} \therefore A = B = C$ কিন্তু, $A + B + C = 360° \Rightarrow A + A + A = 360° \therefore A = 120°$

Question Type-07: তিনটি বল সাম্যাবস্থায় থাকলে তা থেকে বিভিন্ন অজানা রাশির মান নির্ণয় সংক্রান্ত সমস্যা

➲ **Formula & Concept:**

একই বিন্দুতে ভিন্ন ভিন্ন রেখা বরাবর ক্রিয়ারত তিনটি সমতলীয় বল যদি সাম্যাবস্থায় থাকে তবে প্রত্যেকটি বলের মান অপর বল দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণের সাইন (sine) এর সমানুপাতিক।

অর্থাৎ, $\frac{P}{\sin\alpha} = \frac{Q}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin\gamma}$



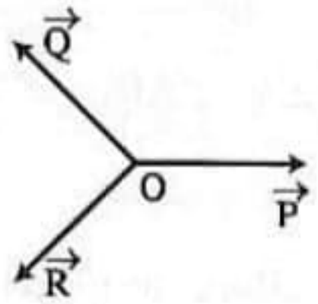
Note: যদি কোনো আংটা সুতায় গিট দিয়ে লাগানো থাকে (বা দুইটি আলাদা সুতা দ্বারা একটি আংটা ঝুলানো থাকে) তাহলে দুই পাশের টান আলাদা ধরতে হয়। গিট না থাকলে (আংটাটি যদি অবাধে চলাচলে সক্ষম হয়) তখন দুই পাশে সুতার টান সমান ধরতে হয়।

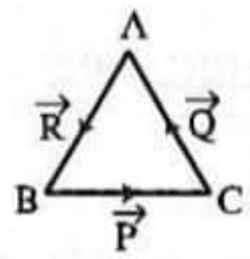
- অন্তঃকেন্দ্র: অন্তঃকেন্দ্র হলো কোন ত্রিভুজের কোণের সমদ্বিখণ্ডকগুলোর ছেদবিন্দু
- লম্ববিন্দু: লম্ববিন্দু হলো শীর্ষ থেকে বিপরীত বাহুগুলোর উপর অঙ্কিত লম্বগুলোর ছেদবিন্দু।
- পরিকেন্দ্র: পরিকেন্দ্র হলো কোন ত্রিভুজের বাহুগুলোর লম্ব সমদ্বিন্ডকগুলোর ছেদবিন্দু।
- ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র O থেকে OA, OB, OC বরাবর কার্যরত যথাক্রমে P, Q, R বল তিনটি সাম্যাবস্থায় থাকলে,

$P:Q:R = \cos\frac{A}{2}:\cos\frac{B}{2}:\cos\frac{C}{2}$ এবং $P^2:Q^2:R^2 = a(b+c-a):b(c+a-b):c(a+b-c)$

- ABC ত্রিভুজের লম্ববিন্দু O. O থেকে BC, CA এবং AB বাহুর উপর লম্ব বরাবর কার্যরত যথাক্রমে P, Q এবং R বলত্রয় সাম্যাবস্থার সৃষ্টি করলে-
  - ➢ $P: Q: R = \sin A: \sin B: \sin C$
  - ➢ $P: Q: R = a: b: c$
- ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O হতে OA, OB, OC বরাবর কার্যরত যথাক্রমে P, Q, R বলত্রয় সাম্যাবস্থা সৃষ্টি করলে-
  - ➢ $P: Q: R = \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C$
  - ➢ $P: Q: R = a^2(b^2 + c^2 - a^2) : b^2(c^2 + a^2 - b^2): c^2 (a^2 + b^2 - c^2)$
  - ➢ $P: Q: R = a\cos A: b\cos B: c\cos C$
- ত্রিভুজ সূত্রের বিপরীত সূত্রের প্রয়োগ সংক্রান্ত:

একটি বিন্দুতে কার্যরত তিনটি বল সাম্যাবস্থায় থাকলে তাদেরকে কোন ত্রিভুজের তিনটি বাহুদ্বারা মানে ও দিকে (অবস্থানে নয়) একই ক্রমে সূচিত করা যায়।



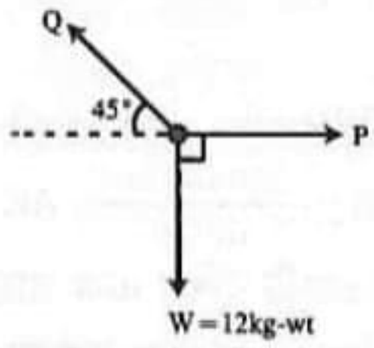


$$; \frac{P}{BC} = \frac{Q}{CA} = \frac{R}{AB}$$

MCQ

01. A hanging body weighing 12 kg is kept in a position by applying two forces P and Q on it. P is acting horizontally while Q is acting by making an angle of 45° with the horizontal. The magnitude of the Q is- **[IUT'20-21]**

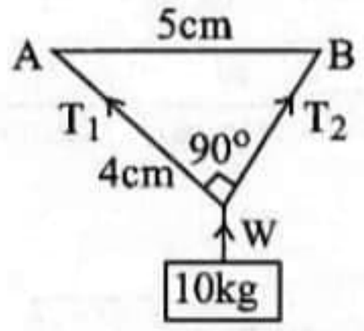
(a) $\frac{12}{\sqrt{3}}$ kg − wt (b) $12\sqrt{3}$ kg − wt (c) $6\sqrt{3}$ kg − wt (d) $12\sqrt{2}$ kg − wt



Solution: (d); Here, Lami's Theorem, $= \frac{W}{\sin(180°-45°)} = \frac{Q}{\sin 90°}$

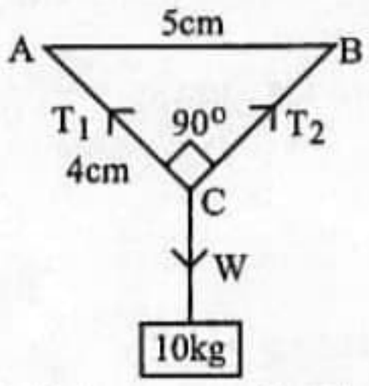
$\Rightarrow \frac{W}{\sin 135°} = Q \Rightarrow \frac{12}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = Q \therefore Q = 12\sqrt{2}$ kg-wt

02. A balance is formed at the point C due to actions of T_1, T_2 and W = 10kg-weight. Tension T_1 =? **[IUT'18-19]**



(a) 6 kg (b) 4 kg (c) 8 kg (d) 10 kg

Solution: (a); Applying Pythagorean theorem, we get, $BC = \sqrt{5^2 - 4^2}\text{cm} = 3\text{cm}$



Since the system is in equilibrium Lami's Theorem implies,

$\Rightarrow \frac{W}{\sin 90°} = \frac{T_1}{\sin(90°+B)} \Rightarrow T_1 = W\cos B = W \times \frac{3}{5} = \left(10 \times \frac{3}{5}\right)\text{kg} - \text{wt} = 6\text{kg} - \text{wt}.$

03. ABC ত্রিভুজের A, B, C কৌণিক বিন্দুগুলি হতে যথাক্রমে বিপরীত বাহুর উপর লম্ব বরাবর ক্রিয়ারত P, Q, R বলত্রয় সাম্যবস্থায় থাকলে P:Q:R এর মান কত? **[Ans:a][KUET'09-10, 17-18]**

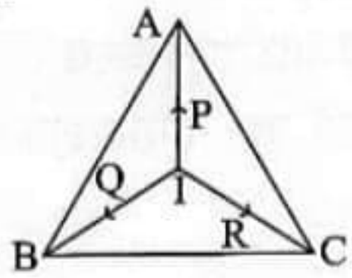
(a) a:b:c (b) 2a:b:c (c) 2a:3b:c (d) a:b:5c (e) কোনটিই নয়

04. P, Q, R তিনটি বল ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র I বিন্দুতে যথাক্রমে IA, IB, IC রেখা বরাবর ক্রিয়া করে সাম্যাবস্থায় আছে তাহলে P: Q: R এর মান কত হবে? **[KUET'16-17]**

(a) $\cos 2A : \cos 2B : \cos 2C$ (b) $\cos A : \cos B : \cos C$ (c) $\cos\frac{A}{2} : \cos\frac{B}{2} : \cos\frac{C}{2}$

(d) $\sin A : \sin B : \sin C$ (e) $\sin\frac{A}{2} : \sin\frac{B}{2} : \sin\frac{C}{2}$

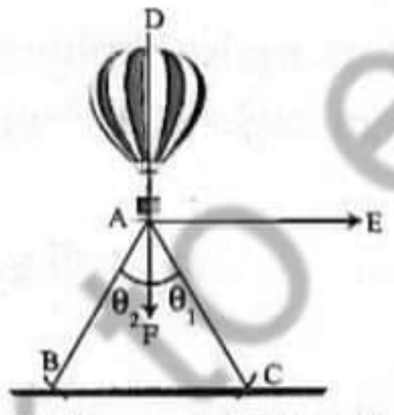
সমাধান: (c); লামীর উপপাদ্য অনুসারে, $\frac{P}{\sin\angle BIC} = \frac{Q}{\sin\angle CIA} = \frac{R}{\sin\angle AIB}$



$\Rightarrow \frac{P}{\sin\left(90^\circ+\frac{A}{2}\right)} = \frac{Q}{\sin\left(90^\circ+\frac{B}{2}\right)} = \frac{R}{\sin\left(90^\circ+\frac{C}{2}\right)}$ | $\angle BIC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A;\ \angle AIB = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle C;\ \angle CIA = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle B$

$\Rightarrow P: Q: R = \cos\frac{A}{2} : \cos\frac{B}{2} : \cos\frac{C}{2}$

05. A resultant force F equal to 350 ℓb is necessary to hold the balloon in place. Assume that $\theta_1 = 30°$ and $\theta_2 = 40°$ The force is applied along the lines AB and AC as shown in the following figure. The magnitude of forces along the lines AB and AC are? **[IUT'16-17]**

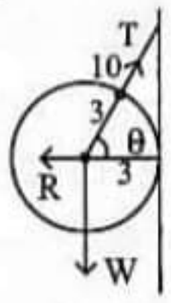


(a) 186 ℓb and 239 ℓb (b) 76 ℓb and 239 ℓb (c) 268 ℓb and 322 ℓb (d) 268 ℓb and 322 ℓb

Solution: (a); $AB = \frac{350\sin(30°)}{\sin(70°)}$; $AC = \frac{350\sin 40°}{\sin 70°}$

06. 10 ft দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট একটি রশির এক প্রান্ত একটি খাড়া দেওয়ালের সাথে আটকানো আছে এবং অপর প্রান্ত একটি মসৃণ গোলকের উপরিস্থিত একটি বিন্দুতে সংযুক্ত রয়েছে। যদি গোলকটি দেওয়ালের সংস্পর্শে স্থিতিবস্থায় থাকে তবে রশির উপর টান কত হবে? [ধর, গোলকটির ওজন 10000 lb ও ব্যাসার্ধ 3 ft] **[CUET'15-16]**

(a) 11277 lb (b) 10000 lb (c) 10277 lb (d) 9731 lb

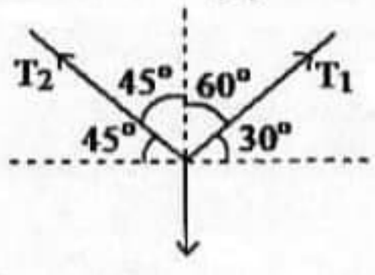
সমাধান: (c); 

; লামীর উপপাদ্য অনুসারে, $\frac{W}{\sin(\pi-\theta)} = \frac{T}{\sin 90°}$

$\Rightarrow T = \frac{W}{\sin\theta} = \frac{10000}{\frac{4\sqrt{10}}{13}} = 10277.42\ l$b [এখানে, $\sin\theta = \frac{\sqrt{13^2-3^2}}{13} = \frac{4\sqrt{10}}{13}$]

07. A mass of 8 kgs hangs in equilibrium, suspended by two light, inelastic strings making angles of 30° and 45° with the horizontal. Calculate the tensions in the two strings. **[IUT'14-15]**

(a) 59.6N and 72.4N (b) 57.4N and 70.3N (c) 53.2N and 68.3N (d) None of these

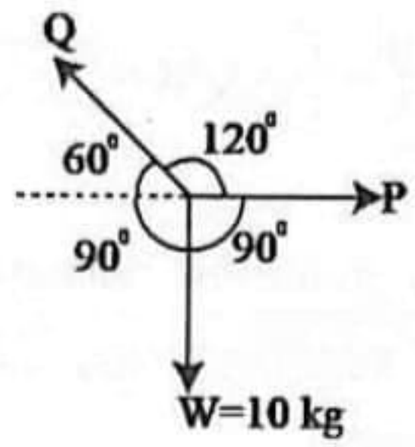
Solution: (b); 

$W = 8 \times 9.8N$

Resolving the components of W along T_1 and T_2; $T_1 = \frac{W\sin 45°}{\sin(60°+45°)} = 57.4N$; $T_2 = \frac{W\sin 60°}{\sin(60°+45°)} = 70.3N$

08. 10kg ওজনের একটি ঝুলন্ত বস্তুকে দুটি বল দ্বারা টেনে রাখা হয়েছে। তাদের একটি অনুভূমিক এবং অপরটি অনুভূমিকের সাথে 60° কোণে ক্রিয়ারত আছে। অনুভূমিক দিকে ক্রিয়ারত বলের মান কত? **[CUET'13-14]**

(a) $10\sqrt{3}$kg (b) $\frac{10}{\sqrt{3}}$kg (c) $\frac{10}{3}$kg (d) None of these



সমাধান: (b); $\frac{W}{\sin 120^\circ} = \frac{P}{\sin 150^\circ} \Rightarrow P = \frac{10 \sin 150^\circ}{\sin 120^\circ} = \frac{10}{\sqrt{3}}$ kgF

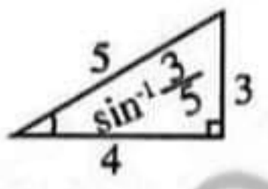
Written

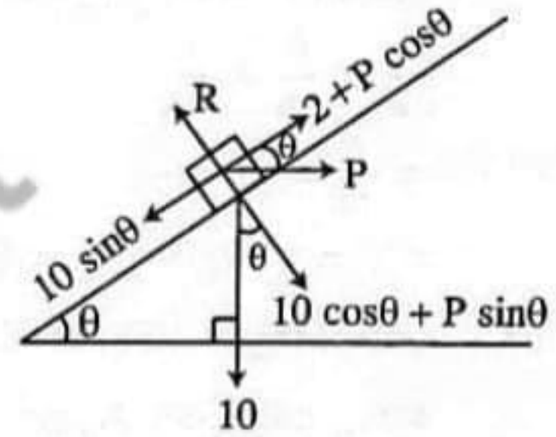
09. একটি আনত সমতলে 10 kg ওজনের একটি বস্তুকে সমতল বরাবর 2 kg ওজনের বল এবং একটি আনুভূমিক বল প্রয়োগ করে স্থিরভাবে রাখা হয়েছে। যদি ভূমির সমতলের নতি $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ হয়, তবে আনুভূমিক বলটি নির্ণয় কর। **[BUTEX'21-22]**

সমাধান: ধরি, আনুভূমিক বলটি P এবং তলের প্রতিক্রিয়া R

∴ চিত্র থেকে তল বরাবর বিবেচনায়,

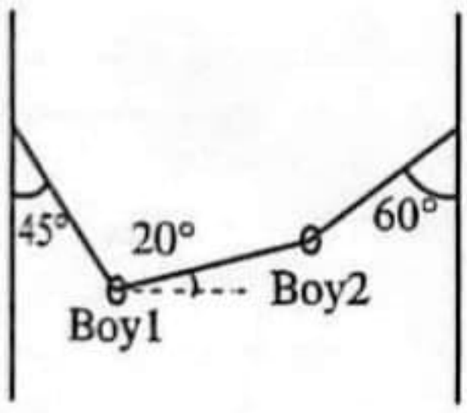
$10\sin\theta = 2 + P\cos\theta,\ \theta = \sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)$





$\Rightarrow P = \frac{10\sin\theta - 2}{\cos\theta} = \frac{10\left(\frac{3}{5}\right) - 2}{\frac{4}{5}} \Rightarrow P = 5$ kg − wt **(Ans.)**

10.



প্রতিটি 5kg ওজনের দুটি দোলনা, একটি চেইনের মাধ্যমে সংযুক্ত করা হয়েছে এবং তারপরে প্রতিটি দোলনা একেকটি চেইনের সাহায্যে উল্লম্ব খুঁটিতে আটকানো আছে। দুইজন বালক দোলনা দুটিতে বসে আছে। সমস্ত চেইনগুলো টানটান অবস্থায় আছে এবং সম্পূর্ণ সিস্টেমটি সাম্যাবস্থায় আছে। চেইনগুলি চিত্রে দেখানো মত কোণ তৈরি করলে, এবং প্রথম বালকটির ওজন 40kg হলে, দ্বিতীয় বালকটির ওজন নির্ণয় কর। **[BUET'20-21]**

সমাধান: মনে করি, ২য় বালকের ওজন W

১ম বালকের জন্য, $\frac{T_2}{\sin(90°+45°)} = \frac{45}{\sin(115°)}$

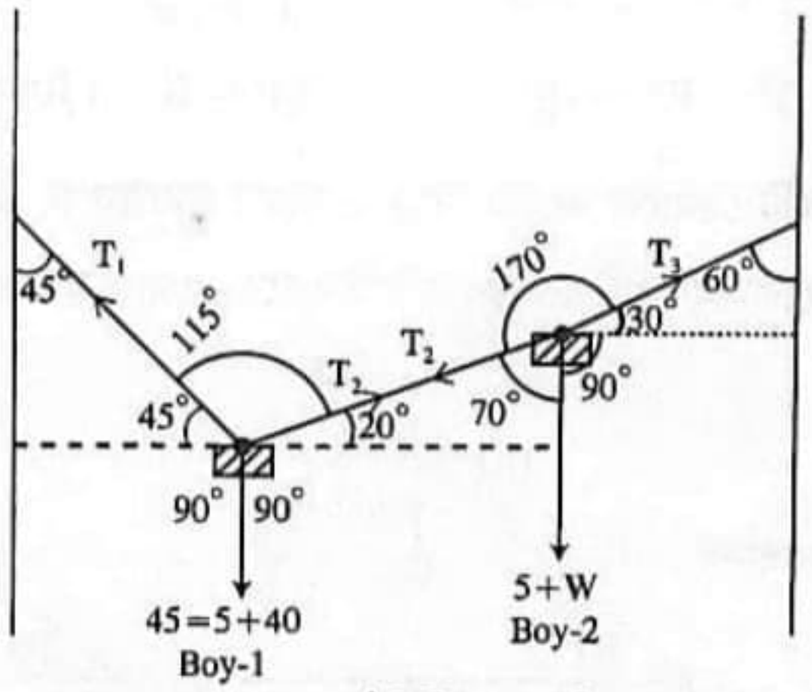
$\therefore T_2 = 45 \times \frac{\sin(135°)}{\sin(115°)} = 35.11$ kg-wt

২য় বালকের জন্য, $\frac{5+W}{\sin(170°)} = \frac{T_2}{\sin(120°)}$

$\Rightarrow 5 + W = T_2 \times \frac{\sin(170°)}{\sin(120°)}$

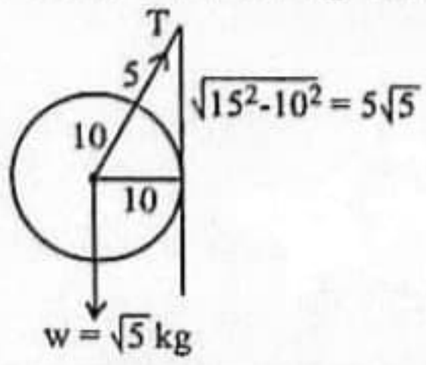
$\Rightarrow W = T_2 \times \frac{\sin(170°)}{\sin(120°)} - 5$

$\therefore W = 35.11 \times \frac{\sin 170°}{\sin 120°} - 5 = 2.04$ kg-wt **(Ans.)**



11. 5 ft দীর্ঘ একটি দড়ির একপ্রান্ত একটি উলম্ব দেয়ালে আটকানো এবং অন্য প্রান্ত 10ft ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি সুষম গোলকের সাথে যুক্ত। গোলকের ওজন $\sqrt{5}$ kg হলে দড়ির টান কত kg? **[BUET'18-19]**

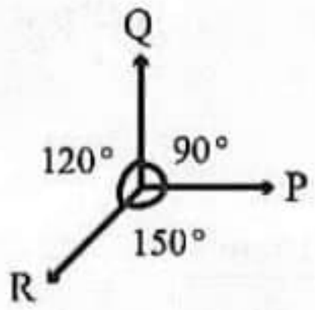
সমাধান:



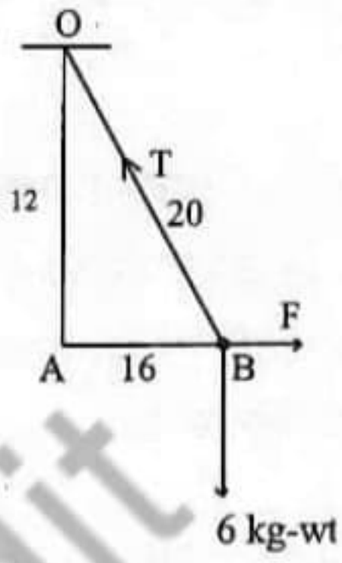
; বলের ত্রিভুজ সূত্রের বিপরীত সূত্র হতে, $\frac{W}{5\sqrt{5}} = \frac{T}{15}$; $T = 15 \times \frac{1}{5} = 3$ kg-wt (Ans.)

12. কোন বিন্দুতে ক্রিয়ারত তিনটি বল P, Q এবং R ভারসাম্য সৃষ্টি করে। P ও Q পরস্পর লম্ব Q ও R এর মধ্যবর্তী কোণ 120° হলে Q ও R এর অনুপাত কত? **[BUET'13-14]**

সমাধান: $\frac{Q}{\sin 150^\circ} = \frac{R}{\sin 90^\circ} \therefore \frac{Q}{R} = \frac{1}{2} \therefore Q:R = \boxed{1:2}$



13. 6 কেজি ওজনের একটি বস্তুকে 20 মিঃ দীর্ঘ একটি হালকা সুতার সাহায্যে একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে আবদ্ধ করা হয়েছে। তার উপর ভূমি তলের সমান্তরাল F মানের বলের ক্রিয়ার ফলে তা নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত খাড়া রেখা হতে 16 মিঃ দূরে স্থিরাবস্থায় আছে। F এর মান এবং সুতার টান নির্ণয় কর। **[RUET'10-11]**



সমাধান: OB = 20m, AB = 16m,

$\therefore OA = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12m$

সূত্রের বিপরীত সূত্রানুসারে,

$\frac{T}{OB} = \frac{F}{AB} = \frac{6}{OA}$

$\Rightarrow \frac{T}{20} = \frac{F}{16} = \frac{6}{12}$

$\therefore T = 10kg\text{-}wt, F = 8kg\text{-}wt$ (Ans.)

14. কোন বিন্দুতে ক্রিয়ারত P, Q, R বল তিনটি ভারসাম্য সৃষ্টি করছে। P ও Q এর অন্তর্গত কোণ P ও R এর অন্তর্গত কোণের দ্বিগুণ হলে, প্রমাণ কর যে, $R^2 = Q(Q - P)$ । **[RUET'07-08]**

সমাধান: প্রশ্নমতে, মনে করি, $P\hat{}Q = 2(P\hat{}R)$ মনে করি $P\hat{}R = \alpha, \therefore P\hat{}Q = 2\alpha$

লামীর উপপাদ্য হতে, $\frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin 2\alpha} = \frac{P}{\sin(2\pi - 3\alpha)}$

$\Rightarrow \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin 2\alpha} = \frac{P}{-\sin 3\alpha} \Rightarrow \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{R}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{P}{4\sin^3\alpha - 3\sin\alpha}$

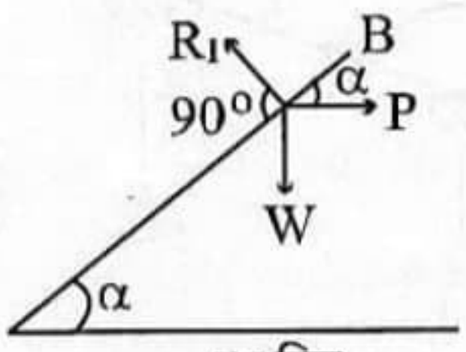
$\Rightarrow Q = \frac{R}{2\cos\alpha} = \frac{P}{4\sin^2\alpha - 3} \Rightarrow Q = \frac{R}{2\cos\alpha} = \frac{P}{1 - 4\cos^2\alpha} \therefore \cos\alpha = \frac{R}{2Q}$

আবার, $Q = \frac{P}{1 - 4\cos^2\alpha} \Rightarrow Q = \frac{P}{1 - 4 \times \frac{R^2}{4Q^2}} \Rightarrow Q = \frac{Q^2P}{Q^2 - R^2}$

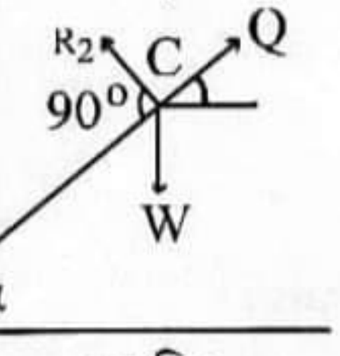
$\Rightarrow Q^2 - R^2 = QP \Rightarrow Q^2 - QP = R^2 \therefore R^2 = Q(Q - P)$ (প্রমাণিত)

15. একটি হেলানো তলের দৈর্ঘ্য ও ভূমির সমান্তরালে ক্রিয়াশীল যথাক্রমে Q ও P মানের দুইটি পৃথক বল প্রত্যেকে W ওজনের কোন বস্তুকে তলের উপর স্থির রাখতে পারে। প্রমাণ কর যে, $W = \frac{PQ}{\sqrt{P^2 - Q^2}}$. **[BUTEX'07-08]**

সমাধান:



১ম চিত্র



২য় চিত্র

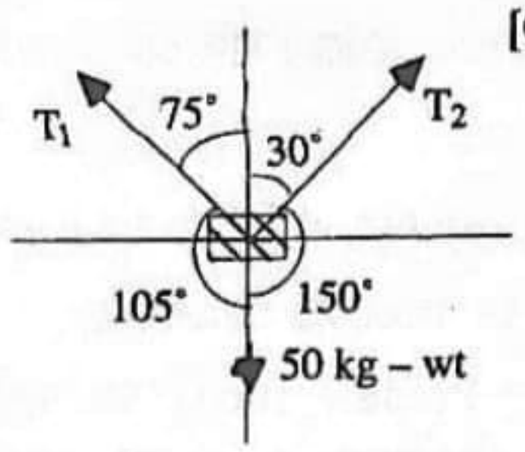
১ম চিত্রে, লামির সূত্রানুযায়ী, $\frac{R_1}{\sin 90^\circ} = \frac{P}{\sin(90^\circ + 90^\circ - \alpha)} = \frac{W}{\sin(90^\circ + \alpha)} \Rightarrow \frac{P}{\sin\alpha} = \frac{W}{\cos\alpha} \therefore P = \frac{W\sin\alpha}{\cos\alpha} \ldots\ldots (i)$

২য় চিত্রে, $\frac{R_2}{\sin(90^\circ + \alpha)} = \frac{Q}{\sin(90^\circ + 90^\circ - \alpha)} = \frac{W}{\sin 90^\circ} \Rightarrow \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{W}{1}$

$\therefore Q = W\sin\alpha \ldots\ldots\ldots (ii) \therefore \frac{1}{P^2} - \frac{1}{Q^2} = \frac{\cos^2\alpha}{W^2\sin^2\alpha} - \frac{1}{W^2\sin^2\alpha}$

$= \frac{\cos^2\alpha - 1}{W^2\sin^2\alpha} = \frac{-\sin^2\alpha}{W^2\sin^2\alpha} = -\frac{1}{W^2} \therefore \frac{1}{W^2} = \frac{1}{Q^2} - \frac{1}{P^2} = \frac{P^2 - Q^2}{P^2Q^2} \therefore W = \frac{PQ}{\sqrt{P^2 - Q^2}}$ (প্রমাণিত)

16. 50 কিলোগ্রাম ওজনের একটি বস্তুকে দুইটি রশিতে বেঁধে দুই ব্যক্তি বহন করছে। উল্লম্ব রেখার সাথে একটি রশি 75° এবং অপরটি 30° কোণ উৎপন্ন করে। প্রত্যেকটি রশিতে টানের পরিমাণ নির্ণয় কর। **[CUET'05-06]**



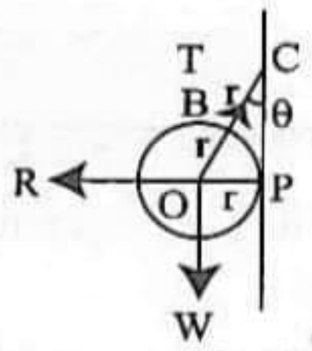
সমাধান: প্রত্যেকটি রশিতে টানের পরিমাণ T_1 এবং T_2 হলে লামীর সূত্র অনুসারে,

$$\frac{T_1}{\sin 150^\circ} = \frac{T_2}{\sin 105^\circ} = \frac{50}{\sin 105^\circ}$$

$$T_1 = \frac{50 \sin 150^\circ}{\sin 105^\circ} = 25.88 \text{ kg} \quad \text{(Ans.)}$$

$$\therefore T_2 = \frac{50 \sin 105^\circ}{\sin 105^\circ} = 50\text{kg}$$

17. 'r' ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট W-ওজনের একটি গোলক একটি মসৃণ খাড়া দেয়ালের সাথে P বিন্দুতে ঠেকিয়ে 'r' দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট একটি রশি দিয়ে গোলকের B বিন্দুতে ও দেয়ালের C বিন্দুতে সুস্থিতে বাঁধা আছে। টান T ও দেয়ালের উপর প্রতিক্রিয়া R এর মান W-এর মাধ্যমে প্রকাশ কর। **[BUET'04-05]**



সমাধান: $PC = \sqrt{(2r)^2 - r^2} = \sqrt{3}r$;

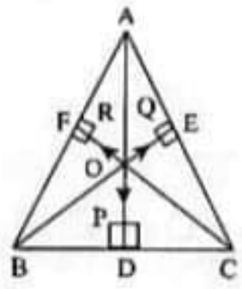
$$\frac{W}{PC} = \frac{R}{PO} = \frac{T}{OC}$$

$$\Rightarrow \frac{W}{\sqrt{3}r} = \frac{R}{r} = \frac{T}{2r} \Rightarrow R = \frac{W}{\sqrt{3}} \Rightarrow T = \frac{2W}{\sqrt{3}} \quad \text{(Ans.)}$$

18. 3 টি সমমানের সমতলীয় বল পরস্পরের সাথে 120° কোণ উৎপন্ন করে। বল তিনটির লব্ধির মান নির্ণয় কর। **[KUET'04-05]**

সমাধান: লামির বিপরীত উপপাদ্য অনুসারে, লব্ধি = 0

19. ΔABC এর মধ্যস্থ কোন বিন্দু হতে BC, CA, AB বাহুত্রয়ের উপর লম্ব বরাবর কার্যরত P, Q, R বলত্রয় সাম্যাবস্থায় আছে। দেখাও যে, P : Q : R = sin A : sin B : sin C. **[CUET'03-04]**

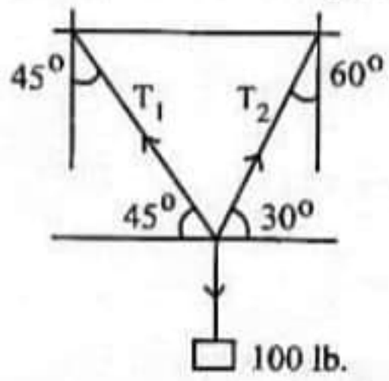


সমাধান: লামীর উপপাদ্য অনুসারে,

$$\frac{P}{\sin \angle EOF} = \frac{Q}{\sin \angle DOF} = \frac{R}{\sin \angle DOE}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{\sin(\pi - A)} = \frac{Q}{\sin(\pi - B)} = \frac{R}{\sin(\pi - C)} \Rightarrow \frac{P}{\sin A} = \frac{Q}{\sin B} = \frac{R}{\sin C} \quad \text{(Showed)}$$

20. 100 ℓb ভরের একটি বস্তুকে দুটি রশির সাহায্যে বেঁধে ঝুলানো হল। রশিদ্বয় উলম্বের সাথে যথাক্রমে 60° ও 45° কোণে আনত। রশিদ্বয়ের টান নির্ণয় কর। **[BUTEX'03-04]**



সমাধান: লামীর উপপাদ্য প্রয়োগ করে পাই,

$$\frac{T_1}{\sin(90^\circ + 30^\circ)} = \frac{T_2}{\sin(90^\circ + 45^\circ)} = \frac{100}{\sin(180^\circ - 45^\circ - 30^\circ)}$$

$$\Rightarrow T_1 = \frac{\sin(120^\circ)}{\sin(105^\circ)} \times 100 = 89.657 \ \ell\text{b-wt}$$

$$\Rightarrow T_2 = \frac{\sin(135^\circ)}{\sin(105^\circ)} \times 100 = 73.2051 \ \ell\text{b-wt}$$

Question Type-08: লম্বাংশ/লম্বাংশ উপপাদ্য ব্যবহার করে সাম্যাবস্থার প্রমাণ সংক্রান্ত সমস্যা

➲ **Formula & Concept:**

এক্ষেত্রে তলের উপর ক্রিয়ারত প্রতিটি বলের লম্বাংশ (resolved parts) তলের দিকে এবং তলের লম্ব দিকে বের করে হিসাব করতে হবে।

MCQ

01. ভূমির সাথে α কোণে হেলানো এক সমতলের উপর W ওজনের একটি বস্তুকে তলের সমান্তরালে P বল প্রয়োগ করে স্থির রাখা যায়। আবার পৃথকভাবে ভূমির সমান্তরালে Q বল প্রয়োগ করেও বস্তুটিকে স্থির রাখা সম্ভব। $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ হলে নিচের কোনটি সত্য? **[RUET'14-15]**

(a) $P > Q$ (b) $P = Q$ (c) $P < Q$ (d) $P = Q \tan\alpha$ (e) $Q = P \tan\alpha$

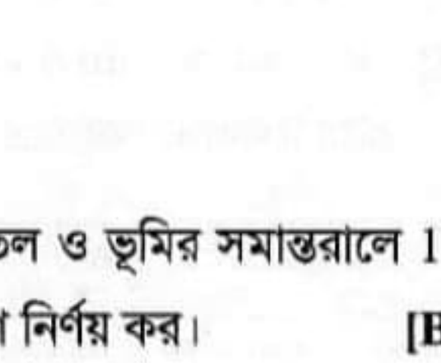
সমাধান: (c); $P = W \sin\alpha$, $Q = W \tan\alpha$

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \rightarrow \tan\alpha > \sin\alpha \ \therefore Q > P$

02. একটি আনত সমতলে 10kg ওজনের একটি বস্তুকে সমতল বরাবর 2kg ওজনের বল এবং একটি অনুভূমিক বল প্রয়োগ করে স্থিরভাবে রাখা হয়েছে। যদি ভূমির সমতলের নতি $\theta = \sin^{-1}\frac{3}{5}$ হয় তবে অনুভূমিক বলটি নির্ণয় কর। **[CUET'11-12]**

(a) 10kg (b) 5kg (c) 11kg (d) কোনোটিই নয়

সমাধান: (b); ধরি, অনুভূমিক বল P এবং তলের উল্লম্ব প্রতিক্রিয়া R।



তল বরাবর বলগুলোর লম্বাংশ নিয়ে,

$2\cos\theta + P\cos\theta + 10\cos(90° + \theta) + R\cos(-90°) = 0$

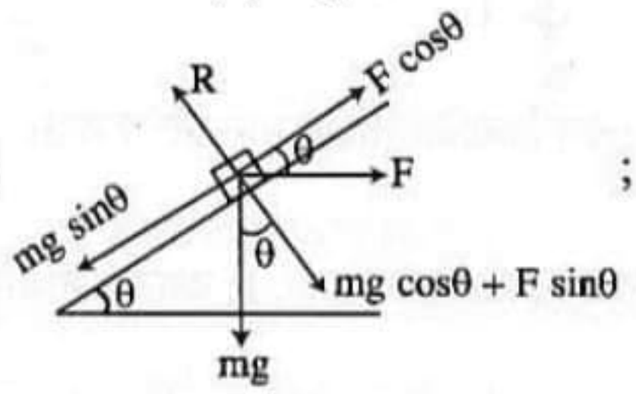
$\Rightarrow 2 + P\cos\theta - 10\sin\theta = 0 \Rightarrow 2 + P\cdot\frac{4}{5} - 10\cdot\frac{3}{5} = 0$

$[\because \theta = \sin^{-1}\frac{3}{5} = \cos^{-1}\frac{4}{5}]$ $\therefore P = 5$ kg-wt

03. অনুভূমিকের সাথে θ কোন হেলানো একটি মসৃন তলে অবস্থিত m ভরের একটি ছোট বস্তু P এর উপর $\vec{F}$ পরিমাণ অনুভূমিক বল প্রয়োগ করা হলে $\vec{F}$ বলটি P বস্তুটিকে কেবলমাত্র সাম্যাবস্থায় রাখতে সমর্থ হয়। তাহলে $\vec{F}$ এর মান হলো- **[RUET'10-11]**

(a) $mg\cos^2\theta$ (b) $mg\sin^2\theta$ (c) $mg\cos\theta$ (d) $mg\tan\theta$ (e) $mg\sin\theta$

সমাধান: (d);



; $F\cos\theta = mg\sin\theta \therefore F = mg\tan\theta$

Written

04. ভূমির সাথে α কোণে হেলানো একটি সমতলের উপর একটি 20 kg ওজনের বস্তুকে তল ও ভূমির সমান্তরালে 10kg-wt মানের দুইটি সমান বল প্রয়োগে স্থির অবস্থায় রাখা হয়েছে। তলের উপর ক্রিয়ারত বলের পরিমাণ নির্ণয় কর। **[BUET'14-15]**

সমাধান: এখন, $R = 20\cos\alpha + 10\sin\alpha$ .....(i)

এবং $20\sin\alpha = 10 + 10\cos\alpha \Rightarrow 2\sin\alpha = 1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$

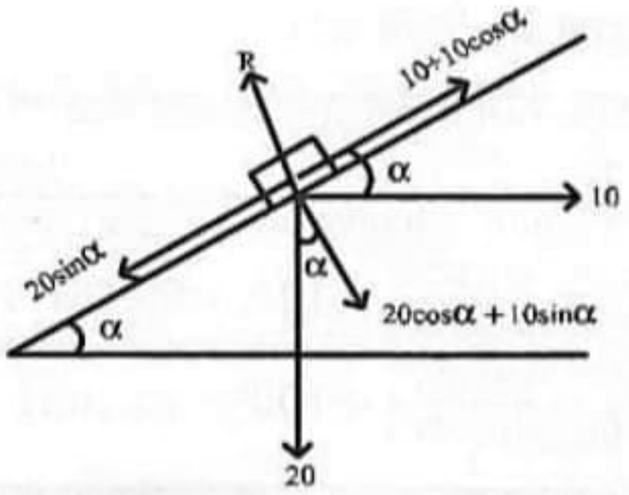
$\Rightarrow 2.2\sin\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\alpha}{2} = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} - 2\sin\frac{\alpha}{2}\right) = 0$

হয়, $\cos\frac{\alpha}{2} = 0$ অথবা, $\cos\frac{\alpha}{2} - 2\sin\frac{\alpha}{2} = 0$

$\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$

$\therefore \alpha = \pi$ [যা অসম্ভব] $\therefore \alpha = 53.13°$

$\therefore$ (i) হতে $R = 20$ kg $-$ wt (Ans.)



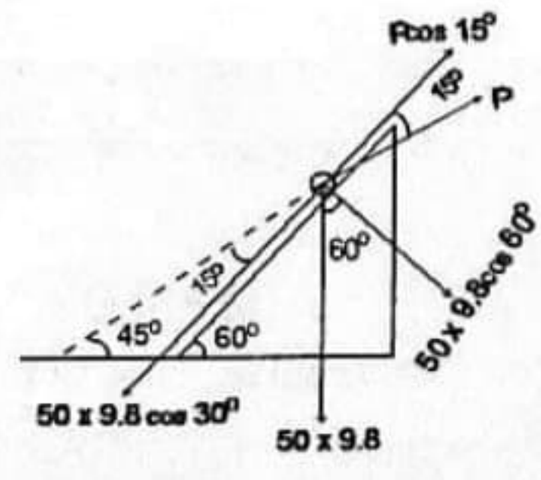
05. অনুভূমিকের সাথে 60° কোণে আনত একটি মসৃণ তলের উপর 50 কেজি ভরের একটি বস্তু আছে। তলের পাদদেশ হতে 20 মিটার দূরে অনুভূমিকের উপর রক্ষিত একটি ব্লোয়ার দিয়ে অনুভূমিকের সাথে 45° কোণে বস্তুটির উপর সরাসরি বায়ু চালনা করে বস্তুটিকে স্থির রাখা হয়েছে। ব্লোয়ার হতে নির্গত বায়ু কর্তৃক প্রযুক্ত চাপ নির্ণয় কর। **[RUET'04-05]**

সমাধান: মসৃণ তল বরাবর একদিকে কাজ করছে $P\cos 15°$।

আর বিপরীত দিকে $W\sin 60°$। এরা পরস্পর সমান।

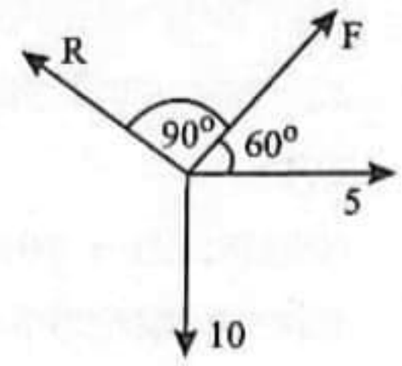
$P\cos 15° = 50 \times 9.81\sin 60°$

$P = \frac{50\times 9.81\sin 60°}{\cos 15°} = 440$N (Ans)



06. 10 কেজি ওজনের একটি বস্তুকে অনুভূমিক দিকে কার্যরত 5 কেজি ওজনের একটি বল, অনুভূমিকের সঙ্গে 60° কোণে ক্রিয়ারত F বল এবং F এর উপর লম্বভাবে কার্যরত R বল সাম্যাবস্থায় রেখেছে। প্রমাণ কর যে, $F-\sqrt{3}R+10=0$ এবং $\sqrt{3}F+R-20=0$ **[RUET'03-04]**

সমাধান: অনুভূমিক উপাংশ নিয়ে পাই,



$5\cos 0° + F\cos 60° + R\cos(90°+60°) + 10\cos 270° = 0$

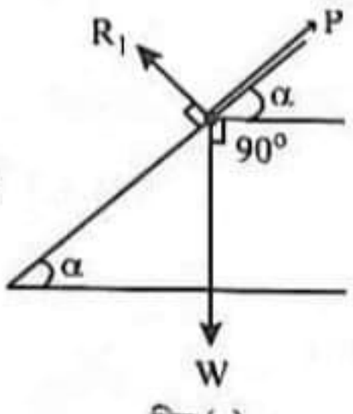
$\Rightarrow 5 + F.\frac{1}{2} - R.\frac{\sqrt{3}}{2} + 10\times 0 = 0 \Rightarrow F-\sqrt{3}R+10=0$ (Proved)

উল্লম্ব উপাংশ নিয়ে পাই, $5\sin 0° + F\sin 60° + R\sin(90°+60°) + 10\sin 270° = 0$

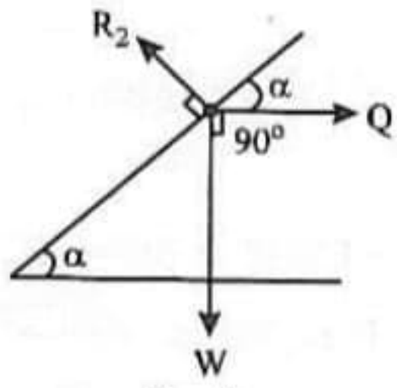
$\Rightarrow 5\times 0 + F\times\frac{\sqrt{3}}{2} + R.\frac{1}{2} + 10\times(-1) = 0 \Rightarrow \sqrt{3}F+R-20=0$ (Proved)

07. P ও Q বলদ্বয় যথাক্রমে একটি হেলানো তলের দৈর্ঘ্য ও ভূমির সমান্তরালে ক্রিয়ারত থাকলে প্রত্যেকে পৃথকভাবে তলের উপর W ওজনের একটি বস্তুকে ধরে রাখতে পারে। প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{P^2}-\frac{1}{Q^2}=\frac{1}{W^2}$. **[BUTEX'02-03]**

সমাধান:



চিত্র (a)



চিত্র (b)

মনে করি, α কোণে হেলানো তলের দৈর্ঘ্য ও ভূমির সমান্তরালে ক্রিয়ারত এবং এর প্রত্যেকে W ওজনের একটি বস্তুকে ধরে রাখতে পারে।

১ম ক্ষেত্রে, $\frac{P}{\sin(\pi-\alpha)} = \frac{W}{\sin\frac{\pi}{2}} \Rightarrow \frac{1}{P^2} = \frac{\text{cosec}^2\alpha}{W}$ ... ... (i)

২য় ক্ষেত্রে, $\frac{Q}{\sin(\pi-\alpha)} = \frac{W}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)} \Rightarrow Q = W\tan\alpha \Rightarrow \frac{1}{Q^2} = \frac{1}{W^2}.\cot^2\alpha$ ... ... (ii)

(i) – (ii) $\Rightarrow \frac{1}{P^2}-\frac{1}{Q^2}=\frac{1}{W^2}$ (Proved)

Question Type-09: বলের ভ্রামক সংক্রান্ত সমস্যা

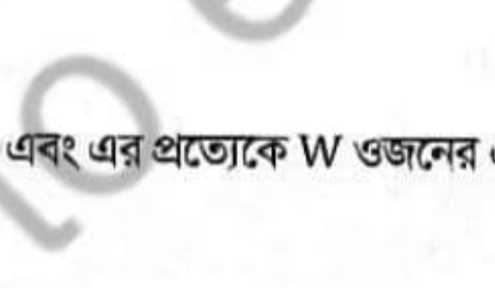
➲ **Formula & Concept:**

♦ বলের ভ্রামক = বল × লম্ব দূরত্ব।

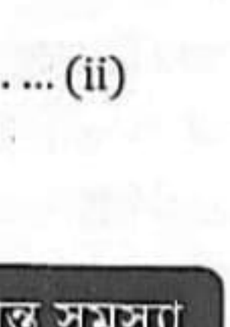
➢ P বলটি যদি AB রেখা দ্বারা মানে ও দিকে সূচিত হয়, তবে যেকোনো বিন্দু O এর সাপেক্ষে,

P বলের ভ্রামক = P এর মান × O থেকে AB এর লম্ব দূরত্ব = P × d

➢ অনুরূপভাবে, O′ এর সাপেক্ষে Q বলের ভ্রামক = $-Q.d'$



➢ P বল O বিন্দুগামী হলে O এর সাপেক্ষে P এর ভ্রামক = $P\times 0 = 0$



Moment, M=P×0=0

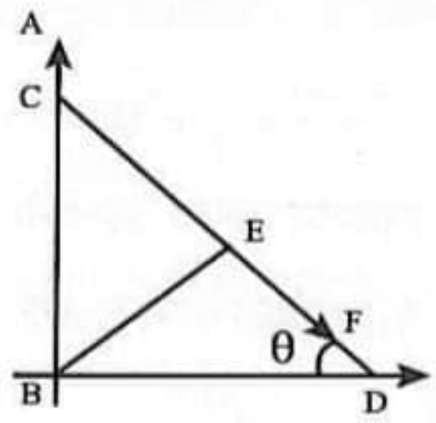
Written

01. কোনো বলের ক্রিয়ারেখাস্থ যেকোন বিন্দুর চারদিকে ঐ বলের ভ্রামকের (moment) মান কত হবে? **[BUTEX'09-10]**

সমাধান: 0

02. ভূমির উপর খাড়াভাবে দন্ডায়মান একটি টেলিগ্রাফ থামের সাথে 40 মিটার দীর্ঘ একটি শক্ত দড়ির এক প্রান্ত বাঁধা আছে এবং অপর প্রান্ত ধরে একটি লোক নির্দিষ্ট বল প্রয়োগে টানছে। থামটির কোন স্থানে দড়ি বাঁধলে লোকটির পক্ষে তা উল্টিয়ে ফেলা সহজতম হবে? **[BUET'06-07]**

সমাধান: CD = 40m B বিন্দুর সাপেক্ষে F বলের ভ্রামকের মান যত বেশি হবে লোকটির পক্ষে থাম উল্টানো তত সহজ হবে।



B বিন্দুর সাপেক্ষে F বলের ভ্রামকের মান = F. BE

$= F.BD\sin\theta = F.CD\sin\theta\cos\theta = \frac{F.CD}{2}\sin 2\theta$

ভ্রামকের মান সর্বাধিক হবে যদি $\sin 2\theta = 1$ হয়। $\therefore \theta = 45°$

এখন, $BC = CD\sin\theta = 40\sin 45° = \frac{40}{\sqrt{2}} = 20\sqrt{2}m$

সুতরাং, ভূমি থেকে $20\sqrt{2}m$ উঁচুতে দড়ি বাঁধতে হবে।

03. ABC ত্রিভূজের BC, CA, AB বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 13, 12, ও 5 একক। A, B, C বিন্দুতে F বলের মোমেন্ট যথাক্রমে 0, – 25 ও 144 হলে F এর মান, দিক ও ক্রিয়া রেখা নির্ণয় কর। **[RUET'05-06, 06-07]**

সমাধান: $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow 13^2 = 12^2 + 5^2 \therefore \angle BAC = 90°$ – BL. F = – 25

$\Rightarrow AB\sin\theta . F = 25$

$\Rightarrow F\sin\theta = 5$ ..... (i)

F. CM = 144

$\Rightarrow F.AC\sin\angle CAD = 144$

$\Rightarrow F\cos\theta = 12$ ..... (ii)

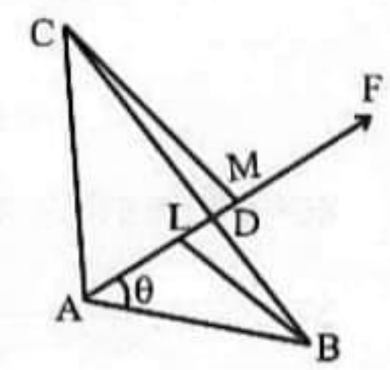
$\therefore$ F এর মান $= \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$ unit

$\sin\theta = \sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{13} = \frac{5}{F}$

$\therefore \theta = \angle ACB$

$\angle A = \angle ABC + \angle ACB = 90°$

$\Rightarrow \angle ABC + \theta = 90° \therefore \angle ADB = 90°$



F বলের মান 13 একক এবং তার ক্রিয়ারেখা BC এর সাথে লম্ব হবে। (Ans.)

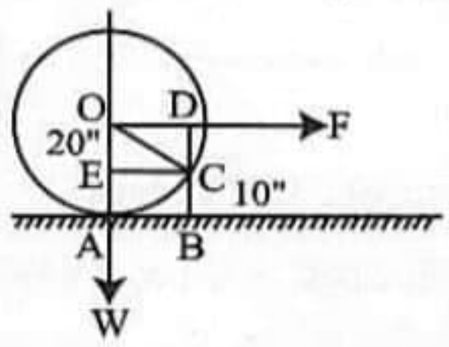
04. একটি ভারী গাড়ীর চাকার ওজন W এবং ব্যাসার্ধ 20 ইঞ্চি। চাকার কেন্দ্রবিন্দুতে ন্যূনতম কী পরিমাণ বল ভূমির সমান্তরালে প্রয়োগ করলে চাকাটি 10 ইঞ্চি উচ্চতা বিশিষ্ট খাড়া প্রতিবন্ধক পার হতে পারবে? **[BUET'05-06]**

সমাধান: এখানে, $F.CD \geq W.CE$

$CD. = r - h$

$CE^2 = OC^2 - OE^2 = r^2 - (r-h)^2 = 2rh - h^2 \therefore F \geq \frac{W.\sqrt{2\pi h - h^2}}{r-h}$

$\therefore F\ min = \frac{W.\sqrt{2\pi h - h^2}}{r-h} = \frac{W\sqrt{2\times 20\times 10 - (10)^2}}{20-10} = W\sqrt{3}$ (Ans)



05. ABC সমবাহু ত্রিভুজের CB, CA ও AB বাহু বরাবর যথাক্রমে তিনটি বল P, Q ও R ক্রিয়া করে। এদের লব্ধি যদি ভরকেন্দ্রগামী এবং BC এর সমান্তরাল হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\frac{1}{2}P = Q = R$. **[KUET'05-06]**

সমাধান: ধরি, লব্ধি R′

AD, BE ও CF মধ্যমা এবং G ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র।

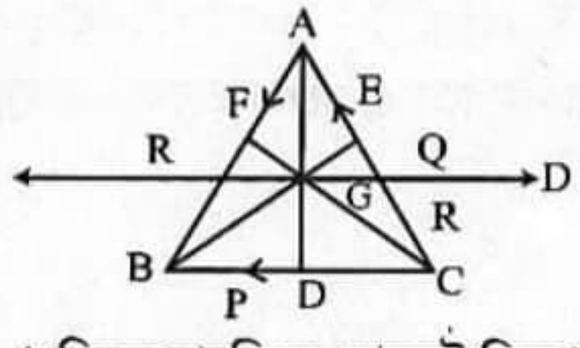
ধরি, AD = BE = CF = x.

$\therefore$ মধ্যমা অপর বাহুর উপর লম্ব।

B বিন্দুতে, Q. BE = R′. GD

$\Rightarrow Q.x = R'.\frac{x}{3} \Rightarrow Q = \frac{R'}{3}$

$\therefore \frac{1}{2}P = Q = R.$ (Proved)

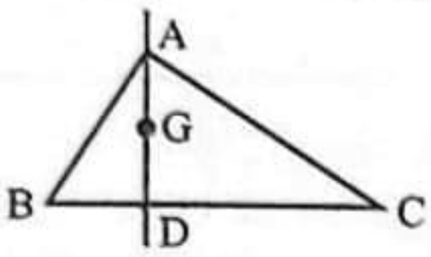


A বিন্দুর চারদিকে মোমেন্ট নিয়ে P.AD = R′.AG

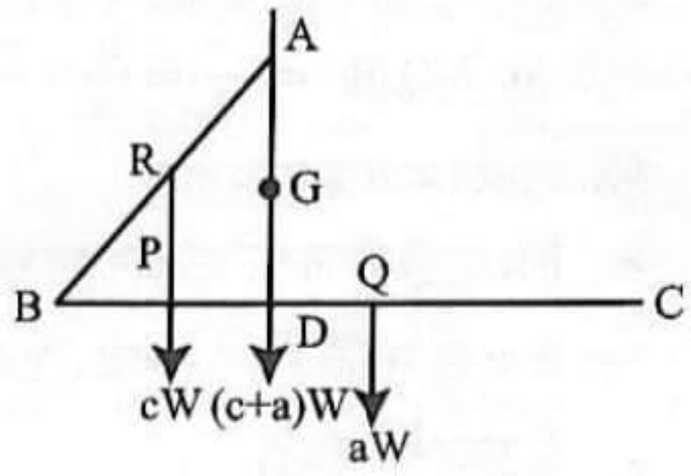
$\Rightarrow P.x = R'.\frac{2}{3}x \Rightarrow \frac{1}{2}P = \frac{R'}{3}$

C বিন্দুতে, R. CF = R′. GD $\Rightarrow R.x = R'.\frac{x}{3} \Rightarrow R = \frac{R'}{3}$

06. একই রকম দন্ড দ্বারা গঠিত ABC ত্রিভুজের CA বাহু অপসারণ করা হলো এবং অবশিষ্টাংশকে A বিন্দুতে ঝুলানো হলো। সাম্যাবস্থায় BC বাহু অনুভূমিক হলে দেখাও যে, $\sin C = \sqrt{2}\sin\frac{1}{2}B$ **[KUET'03-04]**



সমাধান: ধরি, দন্ডের প্রতি একক দৈর্ঘ্যের ওজন W.



এখন B বিন্দুর প্রেক্ষিতে মোমেন্ট নিয়ে পাই,

$cW \times BP + aW \times BQ = (c+a)W \times BD$

$\Rightarrow c.BR\cos B + a \times \frac{a}{2} = (c+a) \times AB\cos B$

$\Rightarrow \frac{c^2}{2}\cos B + \frac{a^2}{2} = (c+a) \times c\cos B \Rightarrow 2ca\cos B = a^2 - c^2\cos B$

$\Rightarrow c^2 + a^2 - b^2 = a^2 - c^2\cos B \Rightarrow c^2(1+\cos B) = b^2$

$\Rightarrow k^2\sin^2 C \times 2\cos^2\frac{B}{2} = k^2\sin^2 B \Rightarrow 2\sin C\cos^2\frac{B}{2} = 4\sin^2\frac{B}{2}\cos^2\frac{B}{2}$ $\therefore \sin C = \sqrt{2}\sin\frac{B}{2}$ (Showed)

07. ABC ত্রিভুজের BC, CA, AB বাহু বরাবর কার্যরত যথাক্রমে P, Q, R বলের লব্ধি ত্রিভুজের পরিকেন্দ্রগামী। প্রমাণ কর যে, $P\cos A + Q\cos B + R\cos C = 0$. **[BUTEX'00-01]**

সমাধান: O এর প্রেক্ষিতে ভ্রামক নিয়ে পাই,

$P.OD + OE.Q + OF.R = 0$

$\Rightarrow p(r\cos A) + Q(r\cos B) + R(r.\cos C) = 0$

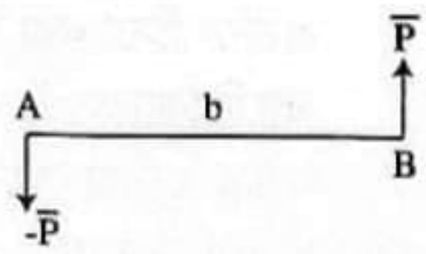
$\therefore P\cos A + Q\cos B + R\cos C = 0$ (Proved)

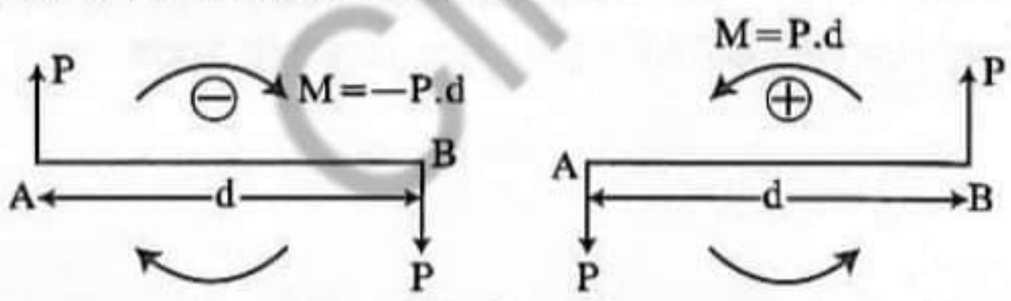
$\angle COD = \angle A$
$\angle COE = \angle B; \angle BOF = \angle C$
কারণ, বৃত্তস্থ কোণ $= \frac{1}{2} \times$ কেন্দ্রস্থ কোণ

Question Type-10: যুগলের ধারণা প্রয়োগ করে কতিপয় সমস্যা সমাধান সংক্রান্ত সমস্যা

➲ **Formula & Concept:**

কোন কঠিন বস্তুর উপর দুটি ভিন্ন রেখা বরাবর ক্রিয়ারত দুটি সমান্তরাল ও বিপরীতমুখী বলকে যুগল বলে। (P, b) যুগলের ভ্রামক. $P \times AB = P \times b$





A এবং B বিন্দুতে P মানের ২টি সমান ও বিপরীতমুখী বল কাজ করছে, উৎপন্ন System একটি যুগল বা দ্বন্দ্ব। দ্বন্দ্বের (যুগলের) ভ্রামক, $M = P \times d$ [বলের মান × বলদ্বয়ের মধ্যবর্তী লম্ব দূরত্ব]

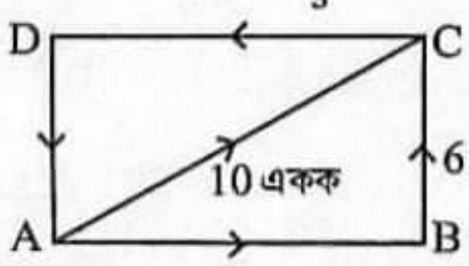
anticlockwise হলে M = +ve ; clockwise হলে M = −ve

MCQ

01. ABCD আয়তক্ষেত্রের AB, BC, CD, DA এবং AC রেখা বরাবর যথাক্রমে 3, 8, 7, 11 ও 5 একক বলসমূহ কার্যরত আছে। যদি AC = 10 একক ও BC = 6 একক হয় তবে বলগুলো দ্বারা সৃষ্ট যুগলের ভ্রামক এর মান কত হবে? **[CUET'15-16]**

(a) None of them (b) $35\frac{1}{3}$ unit (c) 53 unit (d) 106 unit

সমাধান: (d);



; AB = 8 একক

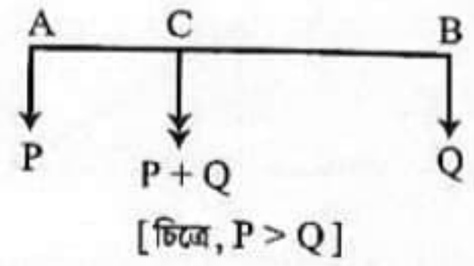
A বিন্দুর সাপেক্ষে ভ্রামক নিয়ে = AB.0 + BC.8 + CD.6 + DA.0 + AC.0 = 64 + 42 = 106

Question Type-11: সদৃশ সমান্তরাল বল এর লব্ধি নির্ণয় এর সূত্র সংক্রান্ত সমস্যা

➲ **Formula & Concept:**

◆ সদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি:

P ও Q সদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয় কোন বস্তুর উপর যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ক্রিয়ারত থাকলে এদের লব্ধির মান হবে P + Q যা এদের মধ্যবর্তী (বৃহত্তর বলের নিকটবর্তী) কোন বিন্দু C তে কাজ করবে।



[চিত্রে, P > Q]

➢ $P.AC = Q.BC \Rightarrow \frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{P+Q}{AB}$

◆ সূত্র হিসেবে মনে রাখতে পারো:

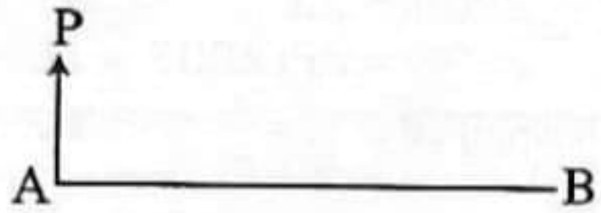
➢ P ও Q দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল হলে, P এর ক্রিয়ারেখা সমান্তরাল রেখে তার ক্রিয়াবিন্দুকে x দূরত্বে সরালে লব্ধি $\frac{Px}{P+Q}$ দূরে সরে যাবে।

➢ P ও Q দুইটি সদৃশ সমান্তরাল বল পরস্পর অবস্থান বিনিময় করলে লব্ধি $\frac{P-Q}{P+Q}.d$ দূরত্ব সরে যাবে। [d হচ্ছে P ও Q এর ক্রিয়ারেখার দূরত্ব]

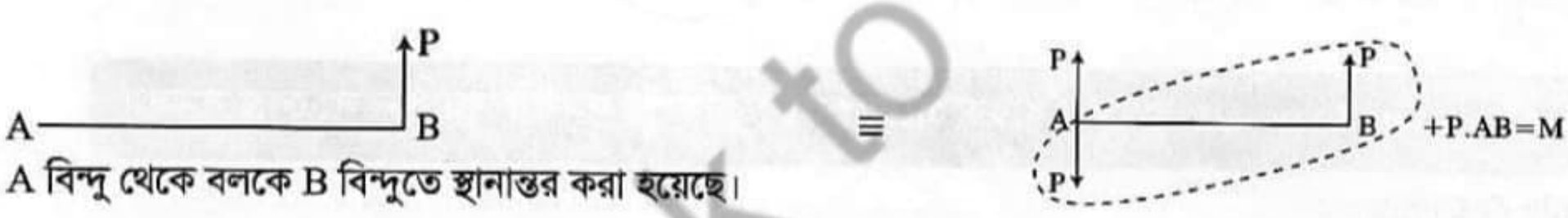
➢ P ও Q দুইটি বিসদৃশ সমান্তরাল বল A ও B তে ক্রিয়ারত এবং এদের পরিমাণ x একক করে বাড়ালে লব্ধি $d = \frac{x}{P-Q}.AB$ দূরত্ব সরে যাবে।

◆ দ্বন্দ্বের (যুগল) ধারণা ব্যবহার করে বলের সমান্তরাল স্থানান্তর:

এখন,



A বিন্দুতে P মানের একটি বল আছে। আমরা চাই, P এর ক্রিয়ারেখা অপরিবর্তীত রেখে P বলকে A হতে B বিন্দুতে স্থানান্তর করতে। নিচের চিত্র দুইটি লক্ষ কর:



A বিন্দু থেকে বলকে B বিন্দুতে স্থানান্তর করা হয়েছে।

এভাবে চিন্তা করা যায় যে A বিন্দুতে P এর সমান এবং বিপরীতমুখী একটি বল দেওয়া হয়েছে এবং B বিন্দুতে P মানের এবং P এর দিকের একটি বল দেওয়া হয়েছে। ফলে এখানে +P.AB মানের একটি যুগল সৃষ্টি হয়েছে।

অর্থাৎ A বিন্দু থেকে B বিন্দুতে একটি বল স্থানান্তর করলে একটি যুগল যোগ করতে হয় যার ভ্রামক,

M = উক্ত বল × বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব

MCQ

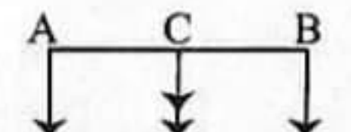
01. 8 ও 6 একক মানের দুইটি সমমুখী সমান্তরাল বল 21 একক দৈর্ঘ্যের একটি অনড় বস্তুর উপর ক্রিয়ারত। বলদ্বয় অবস্থান বিনিময় করলে লব্ধির ক্রিয়া বিন্দু যে দূরত্বে সরে যাবে তা কত একক? **[KUET'15-16]**

(a) 1 একক (b) 2 একক (c) 3 একক (d) 4 একক (e) কোনটিই নয়

সমাধান: (c); আমরা জানি, $x = \frac{p-q}{p+q}d = \frac{8-6}{8+6} \times 21 = 3$ unit

02. 12N ও 8N মানের দুটি সমমুখী সমান্তরাল বল যথাক্রমে কোন অনড় বস্তুর A ও B বিন্দুতে ক্রিয়ারত আছে। তাদের অবস্থান বিনিময় করা হলে তাদের লব্ধির ক্রিয়াবিন্দু AB বরাবর কতদূর সরে যাবে? দেওয়া আছে, AB = 5m. **[CUET'13-14]**

(a) 2m (b) 1m (c) 1.5m (d) None



সমাধান: (b); $P.AC = Q.BC = Q(AB - AC)$ বা, $AC = \frac{Q.AB}{P+Q} = \frac{2}{5}AB$

অবস্থান বিনিময়ের পর, $AD = \frac{3}{5}AB$

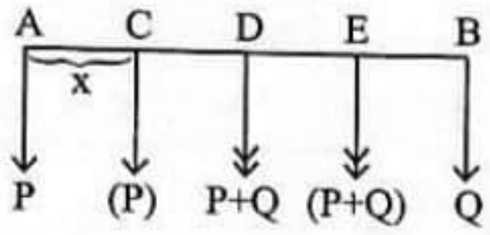
লব্ধির সরণ $= \left(\frac{3}{5} - \frac{2}{5}\right)AB = \frac{1}{5}AB = \frac{1}{5} \times 5 = 1$m

Shortcut: $d = \frac{P-Q}{P+Q} \times AB = \frac{12-8}{12+8} \times 5 = 1$m

Written

03. P এবং Q দুটি সমান্তরাল ও সদৃশ বল। P বলের ক্রিয়া রেখাকে এর সমান্তরাল বরাবর Q বলের দিকে x দূরত্বে সরানো হলে এদের লব্ধি d দূরত্বে সরে যায়। প্রমাণ কর যে, $d = \frac{Px}{P+Q}$ **[BUTEX'05-06, BUET'16-17]**

সমাধান:



১ম ক্ষেত্রে, $P.AD = Q.BD \Rightarrow \frac{Q}{P} = \frac{AD}{BD} \Rightarrow \frac{P+Q}{P} = \frac{AB}{BD} \therefore BD = \frac{P.AB}{P+Q}$ ... ... (i)

২য় ক্ষেত্রে, $P.CE = Q.BE \Rightarrow \frac{Q}{P} = \frac{CE}{BE} \Rightarrow \frac{Q+P}{P} = \frac{BC}{BE} \therefore BE = \frac{P.BC}{P+Q}$ ... ... (ii)

(i) − (ii) $\Rightarrow d = \frac{Px}{P+Q}$

Shortcut: (P, x) ভ্রামক তৈরি করলে ফলশ্রুতিতে লব্ধি (P, Q), d দূরত্ব সরে যায়।

$\therefore (P+Q, d) = (P, x) \therefore d(P+Q) = px \therefore d = \frac{Px}{P+Q}$

04. $6kgm^{-1}$ ওজনের একটি লৌহদন্ডের এক প্রান্তে 7kg ওজনের একটি বস্তু ঝুলালে তার উক্ত প্রান্ত হতে 3m দূরে একটি বিন্দুতে ভারসাম্য হয়। লৌহ দন্ডটির দৈর্ঘ্য বাহির কর। **[CUET'09-10]**

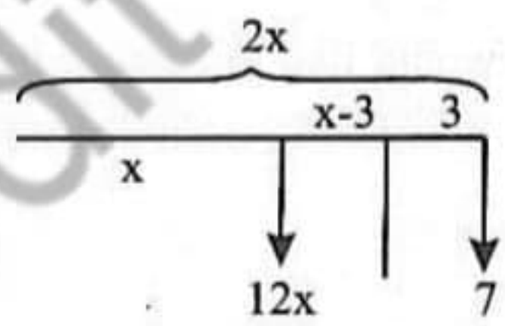
সমাধান: ধরি, দন্ডের দৈর্ঘ্য 2x m $\therefore$ ওজন $= (6 \times 2x) = 12x$

তাহলে, চিত্র মতে, $12x(x-3) = 3 \times 7$ বা, $12x^2 - 36x = 21$

বা, $4x^2 - 12x - 7 = 0$ বা, $4x^2 - 14x + 2x - 7 = 0$

বা, $2x(2x-7) + 1(2x-7) = 0$ বা, $(2x-7)(2x+1) = 0$

$\therefore 2x = 7$ [$\because 2x \neq -1$] $\therefore$ দন্ডের দৈর্ঘ্য 7m (Ans.)



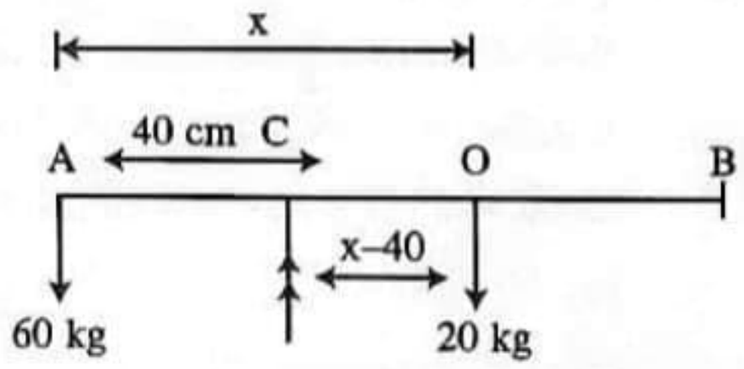
05. একটি সুষম দন্ডের ভর 20kg; এক প্রান্তে 60 kg ভরের একটি বস্তু ঝুলালে ঐ প্রান্ত হতে 40cm দূরে ঠেকা দিয়ে (বাস্তবে তা সম্ভব নয়) দন্ডটিকে অনুভূমিক অবস্থায় সাম্যে রাখা যায়। দন্ডটির দৈর্ঘ্য কত? **[BUTEX'06-07]**

সমাধান: ধরি, AO = x, (O, AB এর মধ্যবিন্দু)

আমরা জানি, $\frac{60}{x-40} = \frac{20}{40} \Rightarrow \frac{60}{20} = \frac{x-40}{40}$

$\Rightarrow 3 \times 40 = x - 40 \Rightarrow x = 120 + 40 = 160$

$\therefore$ দন্ডের দৈর্ঘ্য AB $= 2x = 2 \times 160cm = 320cm$ (Ans.)

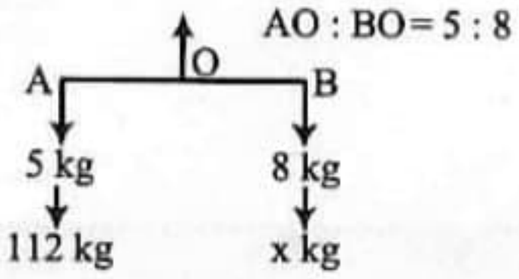


06. AB দন্ডের O বিন্দুতে সূতা বেঁধে ঘরের ছাদ হতে ঝুলানো হলো। A প্রান্তে 5 কেজি এবং B প্রান্তে 8 কেজি ওজনের বস্তুকে ঝুলালে দন্ডটি সাম্য অবস্থায় থাকে। A প্রান্তে 112 কেজি ওজনের বস্তু ঝুলালে দন্ডটিকে সাম্য অবস্থায় রাখতে B প্রান্তে কত ওজনের বস্তু ঝুলাতে হবে? **[RUET'05-06]**

সমাধান: $\frac{BO}{AO} = \frac{5}{8}$ এবং $\frac{BO}{AO} = \frac{112}{x}$

$\Rightarrow \frac{112}{x} = \frac{5}{8}$

$\therefore x = \frac{112 \times 8}{5} = 179.2$ kg (Ans.)

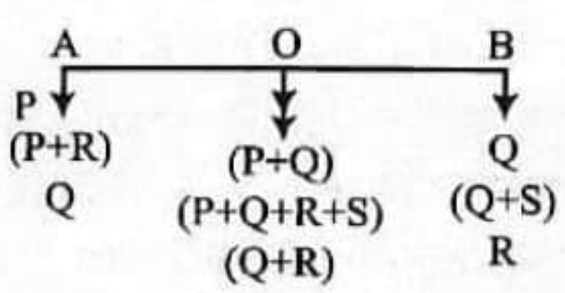


07. P ও Q মানের দুটি সমমুখী সমান্তরাল বলের লব্ধি O বিন্দুতে ক্রিয়া করে। P কে R পরিমাণ এবং Q কে S পরিমাণ বৃদ্ধি করলেও লব্ধি O বিন্দুতে ক্রিয়া করে। আবার P ও Q কে যথাক্রমে Q ও R দ্বারা পরিবর্তন করলেও লব্ধি একই বিন্দুতে কাজ করে। দেখাও যে, $S = R - \frac{(Q-R)^2}{P-Q}$। **[RUET'03-04]**

সমাধান: $\frac{P}{Q} = \frac{P+R}{Q+S} = \frac{Q}{R} = \frac{R}{S}$ [প্রথম ও দ্বিতীয়]

$= \frac{Q-R}{R-S} = \frac{Q}{R}$ [তৃতীয় ও চতুর্থ] $= \frac{P-Q}{Q-R} = \frac{Q}{R}$ [প্রথম ও তৃতীয়]

$\therefore R - S = \frac{(Q-R)^2}{P-Q} \therefore S = R - \frac{(Q-R)^2}{P-Q}$ (Showed)



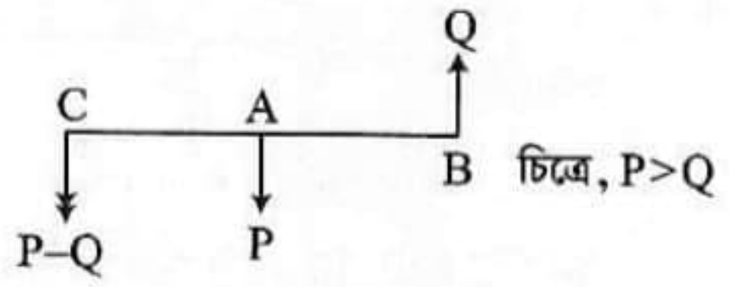
Question Type-12: অসদৃশ/বিসদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি নির্ণয়ের সূত্র সংক্রান্ত সমস্যা

➲ **Formula & Concept:**

♦ অসদৃশ বিসদৃশ সমান্তরাল বলের লব্ধি:

P ও Q বিসদৃশ সমান্তরাল বলদ্বয় কোন বস্তুর উপর যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ক্রিয়া করলে এদের লব্ধির মান হবে P~Q যা AB রেখাংশের বর্ধিতাংশে C বিন্দুতে ক্রিয়া করবে (C বিন্দু বৃহত্তর বলের নিকটবর্তী হবে)।

$P.AC = Q.BC \Rightarrow \frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{P\sim Q}{AB}$

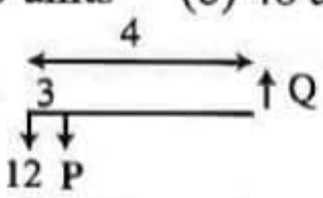


চিত্রে, P>Q

MCQ

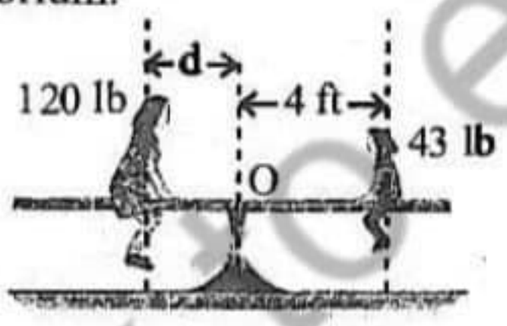
01. দুইটি বিপরীতমুখী বলদ্বয়ের লব্ধি 12 units এবং ইহা বলদ্বয় হতে যথাক্রমে 3 units এবং 4 units দূরে ক্রিয়াশীল। বলদ্বয়ের মান কত? **[CKRUET'21-22]**

(a) 48 and 36 units (b) 48 and 48 units (c) 40 and 36 units (d) 40 and 40 units (e) 40 and 48 units

সমাধান: **(a);** 

ধরি, $P > Q \therefore \frac{P}{4} = \frac{Q}{3} = \frac{12}{1} \Rightarrow P = 48$ units এবং $Q = 36$ units

02. A mother would like to balance her son on the teeter totter as shown in the figure give below. Calculate the distance d so that the system is in equilibrium. **[IUT'14-15]**



(a) 0.7 ft (b) 1.2 ft (c) 0.9 ft (d) 1.4 ft

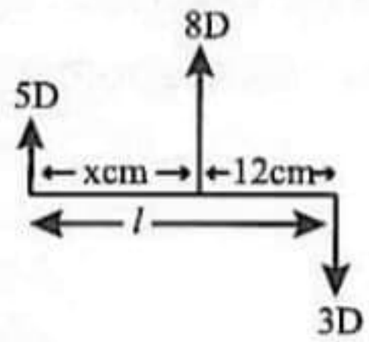
Solution: (d); $\frac{43}{d} = \frac{120}{4} \Rightarrow 120d = 4 \times 43 \Rightarrow d = \frac{4\times43}{120} = 1.4$ ft

03. 8 ডাইন ও 3 ডাইন মানের দুটি বিপরীতমুখী সমান্তরাল বল একটি বারের 12 সে. মি. দূরত্বে অবস্থিত দুটি বিন্দুতে ক্রিয়া করছে। একটি মাত্র বলের ক্রিয়ায় বারটিকে ভারসাম্যে রাখতে হলে বারের ন্যূনতম দৈর্ঘ্য হবে- **[BUET'11-12]**

(a) $19\frac{1}{2}$ cm (b) $19\frac{1}{5}$ cm (c) $7\frac{1}{2}$ cm (d) $7\frac{1}{5}$ cm

সমাধান: (b); এখন, $\frac{3D}{x} = \frac{5D}{12}$ বা, $x = \frac{36}{5} = 7.2$ [লব্ধি বল $(8-3) = 5$ dyne]

$\therefore$ দৈর্ঘ্য, $l = 12 + x = 12 + 7.2 = 19.2 = 19\frac{1}{5}$ cm



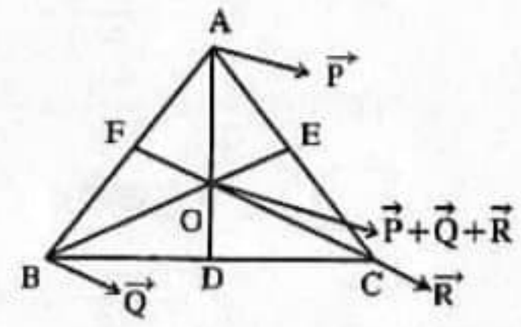
Question Type-13: সদৃশ সমান্তরাল বলের ক্ষেত্রে ত্রিভুজ সংক্রান্ত সমস্যা

➲ **Formula & Concept:**

এসব ক্ষেত্রে সমান্তরাল বলের Concept এবং ত্রিভুজের গুণাবলি ব্যবহার করে হিসাব করতে হবে।

ΔABC এর A, B, C তে তিনটি সমমুখী সমান্তরাল বল $\vec{P}, \vec{Q}, \vec{R}$ ক্রিয়া করলে এবং লব্ধি O বিন্দুগামী হলে:

- O বিন্দু ভরকেন্দ্র হলে, $P = Q = R$
- O বিন্দু লম্ববিন্দু হলে, $P : Q : R = \tan A : \tan B : \tan C$
- O বিন্দু অন্তঃকেন্দ্র হলে, $P : Q : R = \sin A : \sin B : \sin C$
- O বিন্দু পরিকেন্দ্র হলে, $P : Q : R = \sin 2A : \sin 2B : \sin 2C$



MCQ

01. ABC ত্রিভুজের তিনটি কৌণিক বিন্দু A, B, C তে তিনটি সদৃশ সমান্তরাল বল 2, 2, P ক্রিয়ারত। তাদের লব্ধি ত্রিভুজের ভারকেন্দ্রগামী হলে, P এর মান কত? **[BUET'13-14]**

(a) 2 (b) 3 (c) 6 (d) 4

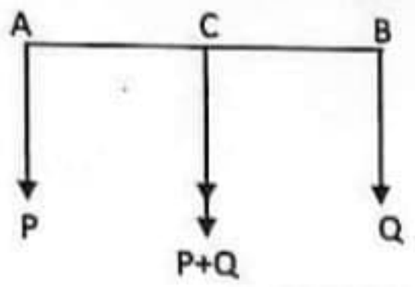
সমাধান: (a) ; যেহেতু লব্ধি ত্রিভুজের ভরকেন্দ্রগামী $\therefore P_1 = P_2 = P_3$, তাই $P = 2$

Question Type-14: সমান্তরাল বলের লব্ধি নির্ণয় এর সূত্র প্রয়োগ করে চাপ ও প্রতিক্রিয়া বল নির্ণয় সংক্রান্ত সমস্যা

➲ **Formula & Concept:**

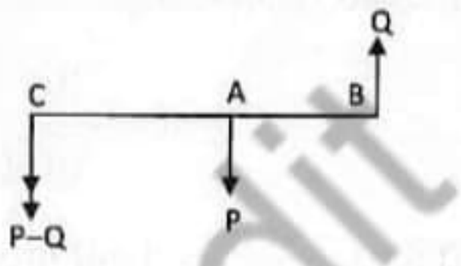
➢ সদৃশ বা সমমুখ সমান্তরাল বলের লব্ধিঃ

$$P.AC = Q.BC \Rightarrow \frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{P+Q}{AB}$$



➢ অসমান, বিসদৃশ বা বিপরীতমুখী সমান্তরাল বলের লব্ধিঃ

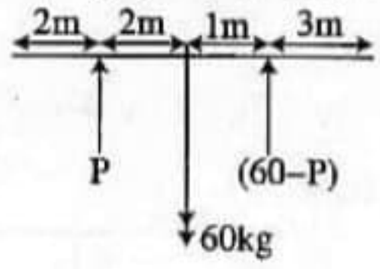
$$P.AC = Q.BC \Rightarrow \frac{P}{BC} = \frac{Q}{AC} = \frac{P-Q}{AB}$$



MCQ

01. Two men are carrying a straight uniform bar of length 8 m and weight 60 kg. One man supports it at a distance of 2 m from one end and the other man at a distance 3 m from the other end. What weight does each man bear? **[IUT'21-22]**

(a) 20 kg, 40 kg (b) 30 kg, 30 kg (c) 45 kg, 15 kg (d) None of these



Solution: (a); $P \times 2 = (60 - P) \times 1 \Rightarrow 2P = 60 - P \Rightarrow P = 20$ kg - wt

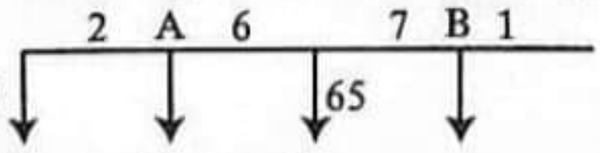
$\therefore 60 - p = 60 - 20 = 40$ kg–wt

02. 16 মিটার দীর্ঘ এবং 65 কেজি ওজনের একটি সুষম পাইপ A ও B দুই ব্যক্তি বহন করছে। A এর অবস্থান পাইপের একপ্রান্ত হতে 2 মিটার দূরে এবং B এর অবস্থান পাইপের অপর প্রান্ত থেকে 1 মিটার দূরে। পাইপের ওজন A ও B এর মধ্যে কিভাবে ভাগ হবে? **[KUET'18-19]**

(a) 20 kg-wt and 45 kg-wt (b) 30 kg-wt and 35 kg-wt

(c) 25-kg-wt and 40 kg-wt (d) 15 kg-wt and 50 kg-wt (e) 5kg –wt and 60 kg –wt.

সমাধানঃ (b);

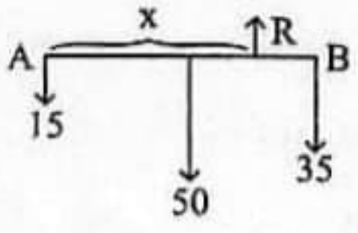


$\frac{65}{13} = \frac{P}{7} \Rightarrow P = 35\text{kg} - \text{wt} \therefore Q = 30\text{kg} - \text{wt}$

03. 12 মিটার দৈর্ঘ্যের একটি সুষম বীম AB এর ওজন 50 কেজি, যার A ও B প্রান্তে যথাক্রমে 15 কেজি ও 35 কেজি ওজন ঝুলানো আছে। A প্রান্ত হতে কত দূরত্বে শুধু একটি মাত্র অবলম্বন স্থাপন করলে ব্যবস্থাটি সুস্থিত থাকবে? **[KUET'16-17]**

(a) 5 মিটার (b) $\frac{35}{6}$ মিটার (c) 6 মিটার (d) $\frac{36}{5}$ মিটার (e) 7 মিটার

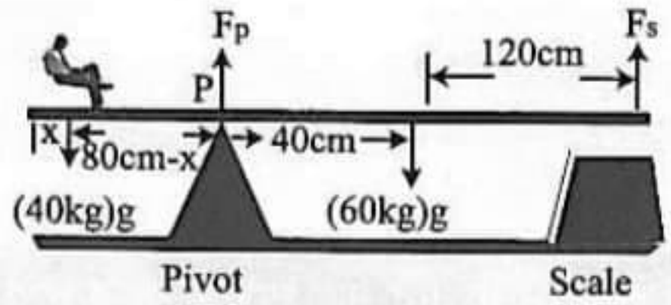
সমাধান: (d);



$R = 50 + 15 + 35 = 100$

A বিন্দুতে সবগুলো বলের মোমেন্ট নিয়ে পাই, $100x - 50 \times 6 - 35 \times 12 = 0 \rightarrow x = \frac{36}{5}$m

04. A 2.4m long 60 kg uniform tabletop is supported by a pivot 80 cm form the left end and by a scale at the right end as shown in the following figure. How far from the left end should a 40 kg child sit if the scale is to read zero? **[IUT'16-17]**



(a) 70 cm (b) 60 cm (c) 20 cm (d) 10 cm

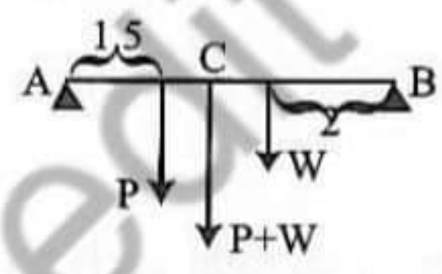
Solution: (c); $(80 - x)40 = 60 \times 40 \Rightarrow x = 20$ cm

05. 4 মিটার দীর্ঘ সমরূপ AB তক্তার ওজন 53 kg এবং তা A ও B বিন্দুতে খুঁটির উপর অবস্থান করছে। A বিন্দু হতে 1.5 মিটার দূরে তক্তার উপর 151kg ওজনের একটি লোক দাঁড়ালে খুঁটিদ্বয়ের উপর কী পরিমাণ চাপ পড়বে? **[RUET'14-15]**

(a) (120.87and 83.12) kg (b) (125.87 and 80.10) kg

(c) (115.87 and 85.15) kg (d) (120 and 85) kg (e) (125 and 90)kg

সমাধান: (a); $AC = 1.5 + 0.5 \times \frac{53}{53+151} = 1.63$ metre



$\therefore$ A এর উপর চাপ $= \frac{2.37}{4} \times 204 = 120.87$ kg

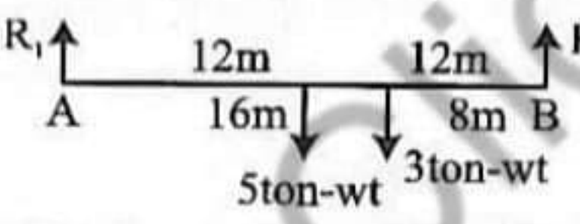
B এর উপর চাপ $= 83.12$ kg

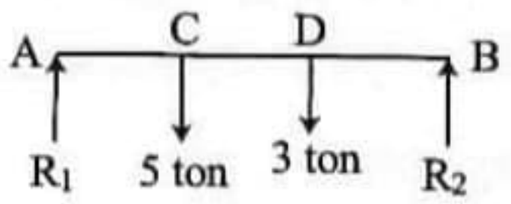
06. ভূমির সমান্তরাল 24m দীর্ঘ একটি সেতুর ওজন 5 ton। সেতুটি তার দুই প্রান্তে দুইটি থামের উপর অবস্থিত। যদি 3 ton ওজনের একটি গাড়ী সেতুটির এক প্রান্ত হতে 2/3 অংশ পথ দূরে তার উপরে দাঁড়ায়, তবে থাম দুইটির উপর চাপের পরিমাণ বের কর।

(a) 4.5 ton − wt, 3.5 ton − wt (b) 5.5 ton − wt, 3.5 ton − wt **[CUET'14-15]**

(c) 4.5 ton − wt, 5.5 ton − wt (d) None of them

সমাধান: (a);





AC = 12m

AD = 16m

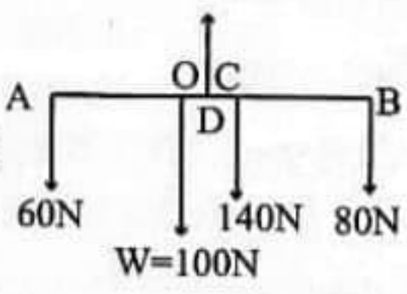
A বিন্দুর সাপেক্ষে ভ্রামক নিয়ে, $24 \times R_2 = 5 \times 12 + 3 \times 16 \therefore R_2 = 4.5\text{ton} - \text{wt}$

B বিন্দুর সাপেক্ষে ভ্রামক নিয়ে, $24 \times R_1 = 5 \times 12 + 3 \times 8 \therefore R_1 = 3.5\text{ton} - \text{wt}$

07. A uniform beam AB of weight 100N and 6m long had two bodies of weights 60N and 80N suspended from its two ends A and B, respectively. At what distance from B, the beam should be supported so that it may rest horizontally? **[IUT'14-15]**

(a) 2.55m (b) 3.25m (c) 3.45m (d) 2.75m

Solution: (d);

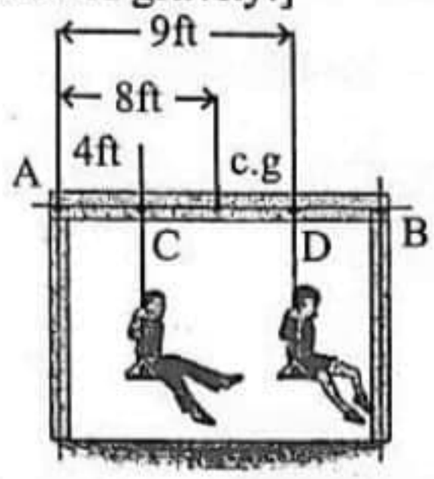


$60 \times AC = 80 \times BC \Rightarrow 60AC = 80(6 - AC) \Rightarrow AC = 3.4286 \therefore OC = 0.4286$ m

$100 \times OD = 140 \times CD \Rightarrow 100 \times OD = 140(OC - OD) \Rightarrow OD = 0.25$ m

$\therefore AD = 3.25$ m $\therefore BD = AB - AD = 2.75$ m

08. Two children are swinging from a 12 ft long jungle gym that weights 50 lbs as shown in the figure given below. The child at C weights 70 lbs and the child at D weights 60 lbs. Calculate the reactions for the pin at A and the roller at B. [In the figure, c.g. refers to center of gravity.] **[IUT'14-15]**



(a) 78 *lbs and* 120 *lbs* (b) 78 *lbs* and 112 *lbs* (c) 68 *lbs* and 112 lbs (d) 68 *lbs* and 102 *lbs*

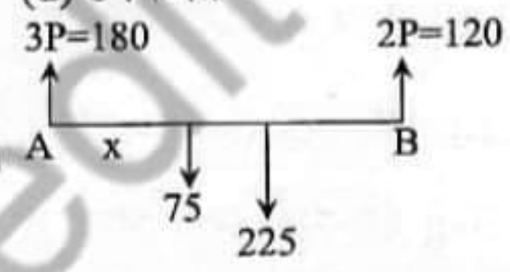
Solution: (a); Taking the moments of all forces about A

We get, $B \times 12 - 70 \times 4 - 8 \times 50 - 60 \times 9 = 0 \Rightarrow B = 101.67 \approx 102$ *lbs*

$\therefore A = 70 + 50 + 60 - B = 78.3 \approx 78$ *lbs*

09. 20 মিটার দীর্ঘ 225 কেজি ওজন বিশিষ্ট AB একটি সুষম বীম এর দুই প্রান্তে দুটি পিলারের উপর অবস্থিত। 75 কেজি ওজনের একটি লোক বীমের উপর A প্রান্ত হতে কত দূরে দাঁড়ালে পিলার দুটির উপর চাপের অনুপাত 3: 2 হবে। **[BUTEX'13-14]**

(a) 2 মিটার (b) 4 মিটার (c) 6 মিটার (d) 8 মিটার



সমাধান: (a); $\sum M_A = 0 \therefore 75x + 225 \times 10 = 120 \times 20 \therefore x = 2m$

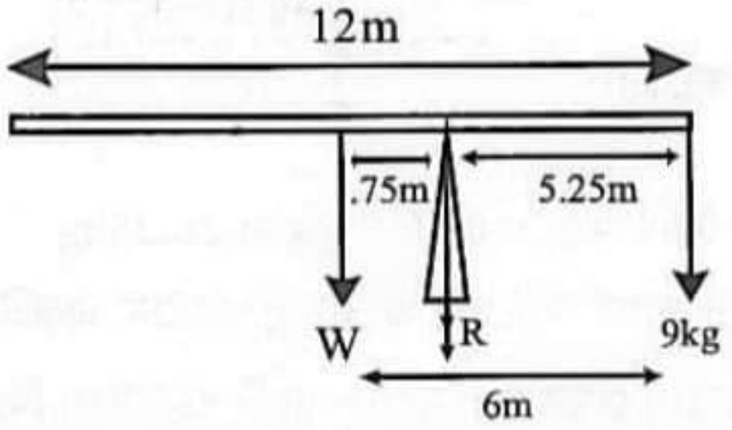
10. 12 m লম্বা একটি ভারী সুষম দন্ডের এক প্রান্তে 9 kg ওজন ঝুলানো আছে। উক্ত প্রান্ত থেকে 5.25 m দূরে যদি একটি খুঁটির উপর দন্ডটি ভূমির সমান্তরালে অবস্থান করে তবে দন্ডটির ওজন হবে- **[BUET'12-13]**

(a) 65 kg (b) 61 kg (c) 63 kg (d) 47.25 kg

সমাধান: (c); সমান্তরাল বলের সূত্র,

$$\frac{9}{0.75} = \frac{W}{5.25} = \frac{R}{6}$$

$$\therefore \frac{9}{0.75} = \frac{W}{5.25} \Rightarrow W = 63kg$$



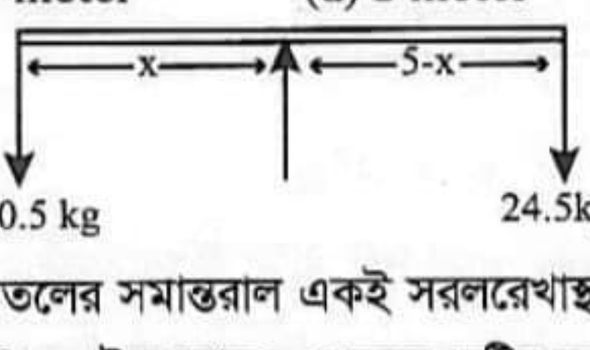
11. 5 মিটার দীর্ঘ একটি হালকা রডের দুই প্রান্তে 10.5kg ও 24.5kg ওজনের দুটি বস্তু ঝুলানো আছে। একজন লোক বস্তু দুটি সমেত রডটি অনুভূমিক অবস্থায় বহন করতে চায়। সে রডটির কম ওজন ঝুলানো স্থান থেকে কত দূরে ধরবে? **[BUET'11-12]**

(a) 1.5 meter (b) 2 meter (c) 3.5 meter (d) 3 meter

সমাধান: (c); এখন, $x \times 10.5 = 24.5 \times (5 - x)$

বা, $10.5 \times x = 122.5 - 24.5x$

বা, $x = 3.5m$



12. W ওজনের 10 মিটার দীর্ঘ একটি ভারী সুষম বারকে ভূমিতলের সমান্তরাল একই সরলরেখাস্থ দুইটি পেরেকের উপর এমনভাবে রাখা হয়েছে যে, এর এক প্রান্ত একটি পেরেক হতে 2 মিটার বাইরে আছে। পেরেক দুটির দূরত্ব কত হলে তাদের একটির উপর চাপ অপরটির উপর চাপের তিন গুণ হবে? **[BUET'11-12]**

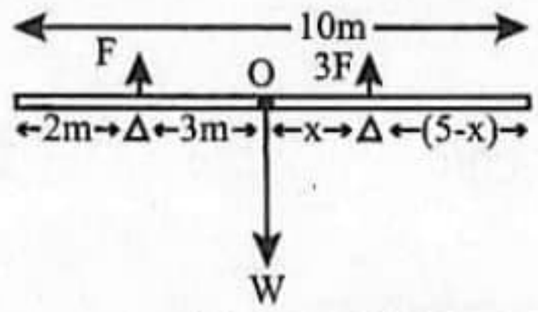
(a) 1m (b) 2m (c) 3m (d) 4m

সমাধান: (d); O বিন্দুর সাপেক্ষে ভ্রামক নিয়ে পাই,

$3F \times x - F \times 3 = 0$

বা, $3F \times x = F \times 3$ বা, $x = 1m$

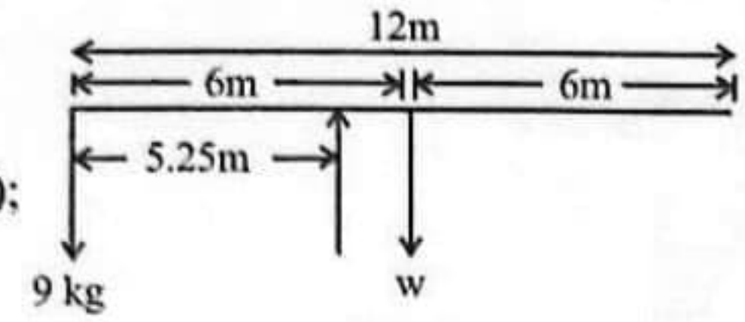
$\therefore$ পেরেকদ্বয়ের দূরত্ব $= 3 + x = 3 + 1 = 4m$



13. 12m লম্বা একটি ভারী সুষম দন্ডের এক প্রান্তে 9kg ওজন ঝুলানো আছে। উক্ত প্রান্ত থেকে $5\frac{1}{4}$m দূরে একটি খুঁটির উপর দন্ডটি ভূমির সমান্তরালে অবস্থান করে তবে দন্ডটির ওজন নির্ণয় কর। **[CUET'11-12]**

(a) 126kg (b) 63kg (c) 84kg (d) None of these

সমাধান: (b);



ভ্রামক নিয়ে পাই, $w(6-5.25) = 9 \times 5.25 \therefore w = 63kg - wt$

14. A man carries, on his shoulder, a load at the end of a stick. The distance of the load and his hand from his shoulder is 1 meter and 0.25 meter, respectively. If thrust on his shoulder is R, then what is the weight of the load? **[IUT'11-12]**

(a) 5R (b) $\frac{R}{5}$ (c) 4R (d) $\frac{R}{4}$

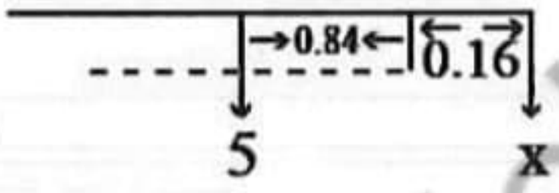
Solution: (b); $x \times 1 = y \times 0.25 \Rightarrow x - \frac{y}{4} = 0$ ..... (i); Again, $x + y = R$ ..... (ii)

Solving (i) & (ii) We get, $(x, y) = \left(\frac{R}{5}, \frac{4R}{5}\right)$

15. 2m দীর্ঘ এবং 5kg ওজনের একটি সুষম রডকে একটি টেবিলের উপর এমনভাবে রাখা হয়েছে যে রডটির দৈর্ঘ্যের 16cm ধারের বাইরে আছে। রডটি পড়ে যাওয়ার পূর্বে ঐ প্রান্তে কত ওজন ঝুলানো যাবে? **[BUET'10-11]**

(a) 25kg (b) 25.25kg (c) 26kg (d) 26.25kg

সমাধান: (d);

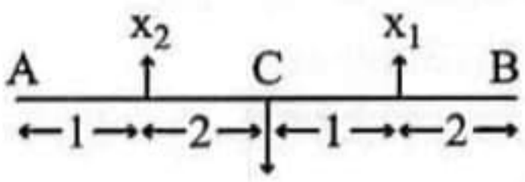


$5 \times 0.84 = x \times 0.16 \quad \therefore x = 26.25kg$

16. দুইজন লোক 6m লম্বা ও 30kg ওজনের একটি ভারী সুষম বার বহন করছে। একজন বারটির এক প্রান্ত থেকে 1m ও অন্যজন অপর প্রান্ত থেকে 2m দূরত্বে বারটি বহন করে নিয়ে যাচ্ছে। তাদের প্রত্যেকে কত ওজন বহন করে? **[BUET'10-11]**

(a) 10kg, 20kg (b) 15kg, 15kg (c) 12kg, 18kg (d) None of the above

সমাধান: (a);

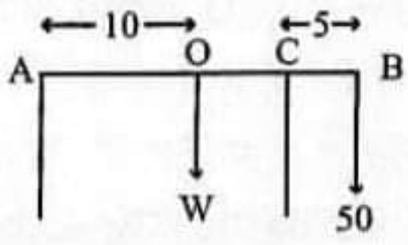


$\frac{30}{3} = \frac{x_1}{2} = \frac{x_2}{1} \therefore x_1 = 20kg, \; x_2 = 10kg$

17. 20 মি. দীর্ঘ একটি ভারী সুষম তক্তা দুটি খুঁটির উপর অনুভূমিকভাবে সাম্যাবস্থায় রয়েছে। প্রথম খুঁটি তক্তাটির এক প্রান্তে এবং দ্বিতীয় খুঁটিটি তক্তাটির অপর প্রান্ত থেকে 5 মি. দূরে অবস্থিত। তক্তাটিকে না উল্টিয়ে দ্বিতীয় প্রান্তে যদি সর্বোচ্চ 50 কেজি ওজন ঝুলানো যায়। সেক্ষেত্রে তক্তাটির ওজন হবে- **[CUET'10-11]**

(a) 33.33kg (b) 50kg (c) 25kg (d) None

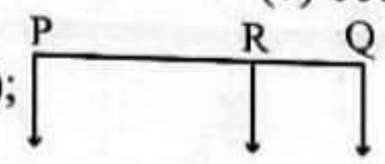
সমাধান: (b); $W \times OC = 50 \times BC \Rightarrow W \times (10-5) = 50 \times 5 \therefore W = 50kg - wt$



18. The extremities of an 8m long straight bamboo pole rest on two smooth pegs P and Q in the same horizontal line. A heavy load hangs from a point R of the pole. If PR=3RQ and the pressure at Q be 325 gm-wt more than that of P, the weight of the load is- **[IUT'10-11]**

(a) 500 gm-wt (b) 600 gm-wt (c) 650 gm-wt (d) 700 gm-wt

Solution: (c);



$P.PR = Q.RQ \Rightarrow 3P = Q \ldots\ldots (i);$

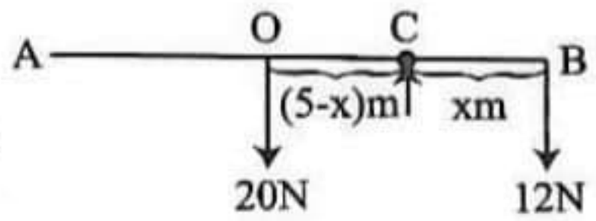
$Now, Q - P = 325 \Rightarrow 3P - P = 325 \Rightarrow P = \frac{325}{2} = 162.5$

$\therefore (i) \Rightarrow Q = 3P = 487.5 \quad \therefore R = P + Q = 650$

Written

19. 10m লম্বা এবং 20N ওজনের একটি সুষম দণ্ড AB দন্ডের উপরস্থিত C বিন্দুতে মুক্তভাবে ঝুলানো আছে। এর B প্রান্তে 12N ওজন রাখলে দন্ডটি অনুভূমিকের সাথে সমান্তরালে থাকে। C বিন্দুর অবস্থান নির্ণয় কর। দন্ডটির A ও B প্রান্তে আরও 5N করে ওজন যোগ করলে দন্ডটি অনুভূমিক অবস্থায় রাখার জন্য C বিন্দুকে মূল অবস্থান থেকে কতটা সরাতে হবে তা নির্ণয় কর। **[BUET'19-20]**

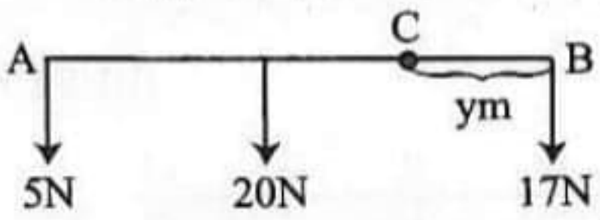
সমাধানঃ



চিত্র হতে, $AB = 10m, OB = 5m$

$12 \times x = 20 \times (5 - x) \Rightarrow 12x = 100 - 20x \therefore x = \frac{100}{32} m = 3.125m$

$\therefore$ C বিন্দুর অবস্থান B হতে 3.125m ভেতরে।



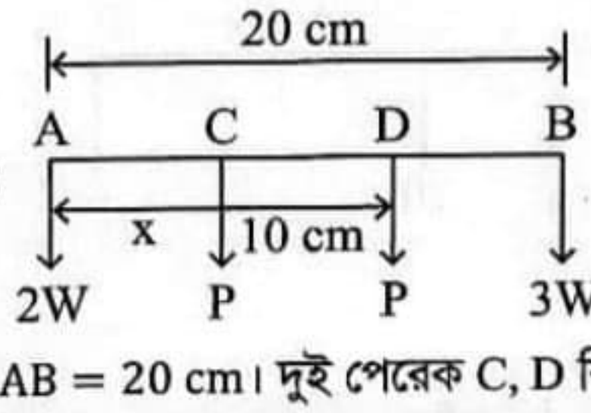
ধরি, B প্রান্ত থেকে ym ভেতরে C এর অবস্থান।

$17y = 20 \times (5 - y) + 5 \times (10 - y) \therefore y = 3.571m$

$\therefore$ C বিন্দুকে মূল বিন্দু থেকে A এর দিকে $(3.571 - 3.125)m = 0.446m$ সরাতে হবে।

20. 20 cm দৈর্ঘ্যের হালকা AB দন্ডটি 10 cm ব্যবধানে দুইটি পেরেকের উপর অনুভূমিক ভাবে অবস্থিত। A ও B বিন্দুতে যথাক্রমে 2W ও 3W ওজন ঝুলানো হলে, পেরেক দুইটির কোন অবস্থানের জন্য এদের উপর চাপ সমান হবে? **[CUET'04-05, BUET'17-18]**

সমাধান:



এখানে, AB = 20 cm। দুই পেরেক C, D বিন্দুতে প্রতিক্রিয়া করে P।

$\therefore P + P = 2W + 3W \Rightarrow P = \frac{5W}{2} \cdots (i)$

A বিন্দুতে মোমেন্ট বা বলের ভ্রামক নিয়ে পাই, $\sum M_A = -2W \times 0 + P \times x + P \times (x + 10) - 3W \times 20$

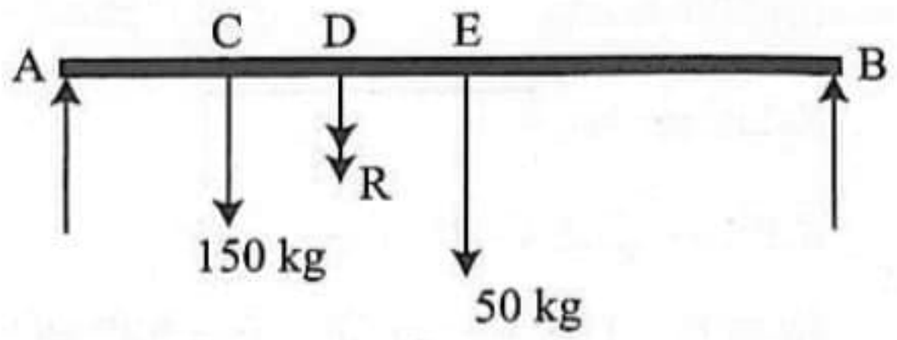
[আমরা জানি, স্থির বস্তুতে মোমেন্ট = 0]

$\therefore \sum M_A = 0 \Rightarrow Px + Px + 10P - 3W \times 20 = 0 \Rightarrow 2Px = 60\,W - 10 \times \frac{5W}{2} \Rightarrow 2 \times \frac{5W}{2} x = 35\,W \therefore x = 7$

A প্রান্ত হতে বলদ্বয় 7 cm ও 17 cm দূরে স্থাপন করতে হবে।

21. একটি লোহার দন্ড AB, যা 3m লম্বা এবং যার ওজন 50 kg, দুটি ভিত্তি A এবং B এর উপর অবস্থান করছে। 150 kg ওজনের একজন লোক উক্ত দন্ডের উপর A হতে 1m বিন্দুতে দাড়ালে ভিত্তিদ্বয়ের উপর কি পরিমাণ চাপ প্রযুক্ত হবে? **[CUET'13-14]**

সমাধান: $AE = \frac{3}{2} = 1.5m;\ AC = 1m\ \therefore CE = 0.5m$



Now, $150.CD = 50(0.5 - CD)$

$\therefore CD = 0.125\ \therefore AD = 1.125$ এবং $BD = 1.875$

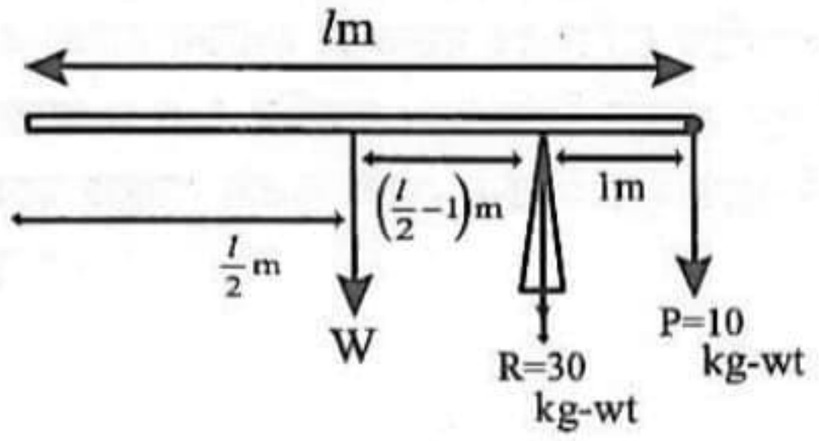
এখন, A ও B বিন্দুতে চাপ P_A ও P_B হলে,

$P_A + P_B = 150 + 50 = 200kg$

$P_A.AD = P_B.BD;\ P_A \times 1.125 = (200 - P_A) \times 1.875;\ P_A = 125kg;\ P_B = 75kg$ [Ans.125kg, 75kg]

22. একটি সোজা সুষম রডের এক প্রান্তে 10 kg ওজনের একটি বস্তু ঝোলানো হলে, ঐ প্রান্ত হতে 1 m দূরে একটি খুঁটির উপর অনুভূমিকভাবে স্থির থাকে। খুঁটির উপর চাপের পরিমাণ 30 kg-wt হলে রডটির দৈর্ঘ্য ও ওজন নির্ণয় কর। **[BUET'12-13]**

সমাধান:



$R = P + w \Rightarrow 30 = 10 + w \Rightarrow w = 20kg - wt$

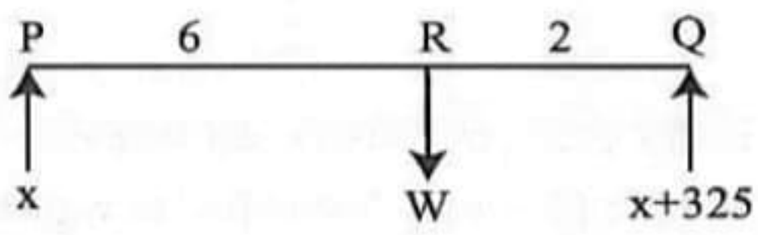
আবার, সমান্তরাল বলের সূত্র অনুসারে, $\frac{w}{1} = \frac{P}{\frac{l}{2}-1} = \frac{R}{\frac{l}{2}};\ \therefore \frac{w}{1} = \frac{R}{\frac{l}{2}} \Rightarrow \frac{20}{1} = \frac{2\times30}{l} \Rightarrow l = 3m$ (Ans)

23. ভূমিতলের সমান্তরাল একই রেখাস্থ দুটি মসৃণ পেরেক P ও Q এর উপর 8 মিটার দীর্ঘ একটি বাঁশের প্রান্তদ্বয় অবস্থান করছে। বাঁশটির উপরস্থ R বিন্দুতে একটি ভারী বোঝা ঝুলানো হল, যদি $PR = 3RQ$ হয় এবং Q বিন্দুতে চাপ P বিন্দুতে চাপ অপেক্ষা 325 গ্রাম-ওজন বেশী হয় তবে বোঝাটির ওজন নির্ণয় কর। **[BUET'09-10]**

সমাধান: চিত্র হতে পাই, $x \times 6 = 2 \times (x + 325)$

$\Rightarrow 6x = 2x + 650 \Rightarrow 4x = 650\ \Rightarrow x = 162.5$

আবার, $W = x + x + 325 = 650$ গ্রাম ওজন। (Ans.)



24. দুজন লোক 70kg ভরের একটি বস্তু একটি নগণ্য ভরের তক্তার উপর রেখে বহন করছে। কীরূপে বস্তুটিকে তক্তার উপর রাখলে একজন লোক অপর জনের চেয়ে 10kg-wt বেশী ওজন বহন করবে? **[RUET'09-10]**

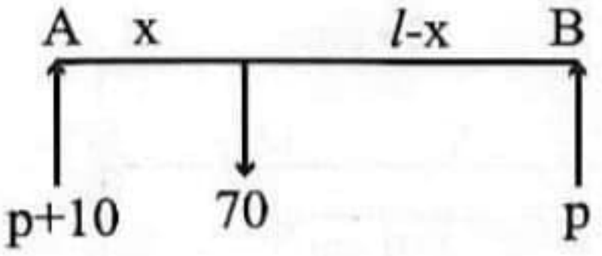
সমাধান: ধরি, তক্তার দৈর্ঘ্য = l

শর্তমতে, $p + p + 10 = 70 \Rightarrow 2p = 60 \Rightarrow p = 30$

চিত্র হতে, $40x = 30(l - x)$

$\Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{l-x}{x} = \frac{l}{x} - 1 \Rightarrow \frac{l}{x} = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3} \Rightarrow x = \frac{3}{7}l$

$\Rightarrow x: l = 3:7$ এরূপ শর্ত মেনে রাখতে হবে।

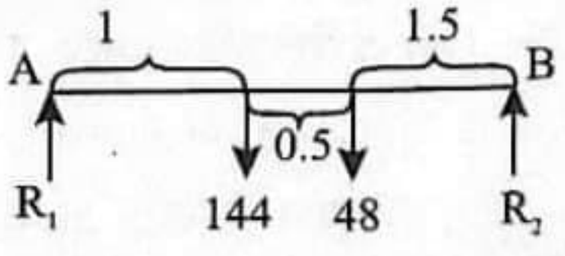


25. 3m দীর্ঘ সমরূপ AB একটি বীমের ওজন 16kg এবং তা A ও B বিন্দুতে দুটি খুঁটির উপর অবস্থান করছে। A বিন্দু হতে 1m দূরে বীমের উপর 144kg ওজনের একটি লোক দাঁড়ালে, খুঁটির উপর কী পরিমাণ চাপ পড়বে তা নির্ণয় কর। **[CUET'08-09]**

সমাধান: B বিন্দুর সাপেক্ষে ভ্রামক নিয়ে পাই, $-3 \times R_1 + 48 \times 1.5 + 144 \times 2 = 0$

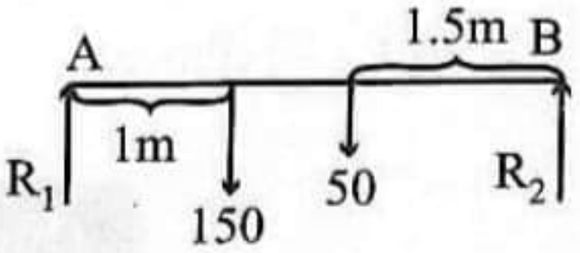
বা, $R_1 = \frac{48\times1.5+144\times2}{3} = 120kg - wt$ (Ans.)

$\therefore R_2 = (144 + 48 - 120)kg - wt = 72kg - wt$ (Ans.)



26. 3 মিটার দীর্ঘ সমরূপ AB তক্তাটির ওজন 50 কিলো নিউটন এবং তা A ও B বিন্দুতে দুটি খুঁটির উপর অবস্থান করছে, A বিন্দু হতে 1 মিটার দূরে তক্তার উপর 150 কিলো নিউটন ওজনের একটি লোক দাঁড়ালে খুঁটিদ্বয়ের উপর কী পরিমাণ চাপ পড়বে তা নির্ণয় কর। **[RUET'07-08]**

সমাধান: লোকটির ওজন, $W = 150 \times 10^3 N = 150000N$, তক্তার ওজন, $W' = 50 \times 10^3 N = 50000N$.



B বিন্দুর সাপেক্ষে ভ্রামক নিয়ে পাই- $-R_1 \times 3 + 150000 \times 2 + 50000 \times 1.5 = 0$

$\Rightarrow R_1 = \frac{300000+75000}{3} = 125000N$ (Ans.)

A বিন্দুর সাপেক্ষে ভ্রামক নিয়ে পাই- $R_2 \times 3 - W \times 1 - W' \times 1.5 = 0$

$\Rightarrow R_2 = \frac{W+W' \times 1.5}{3} = \frac{150000+75000}{3} = 75000N$ (Ans.)

27. 16 m দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট 200 kg ওজনের একটি সুষম বীমের দুই প্রান্তে রাখা দুইটি অবলম্বনের উপর বীমটি সাম্যাবস্থায় আছে। 160 kg ওজনের একটি লোক বীমটির উপর কোথায় দাঁড়ালে অবলম্বন দুইটির উপর বলের পরিমাণের অনুপাত 1: 2।

সমাধান: এখানে, $R_1 + R_2 = 160 + 200 = 360$ kg **[CUET'05-06, KUET'06-07]**

A বিন্দুর সাপেক্ষে ভ্রামক নিয়ে পাই,

$160 \times x + 200 \times 8 - R_2 \times 16 = 0$

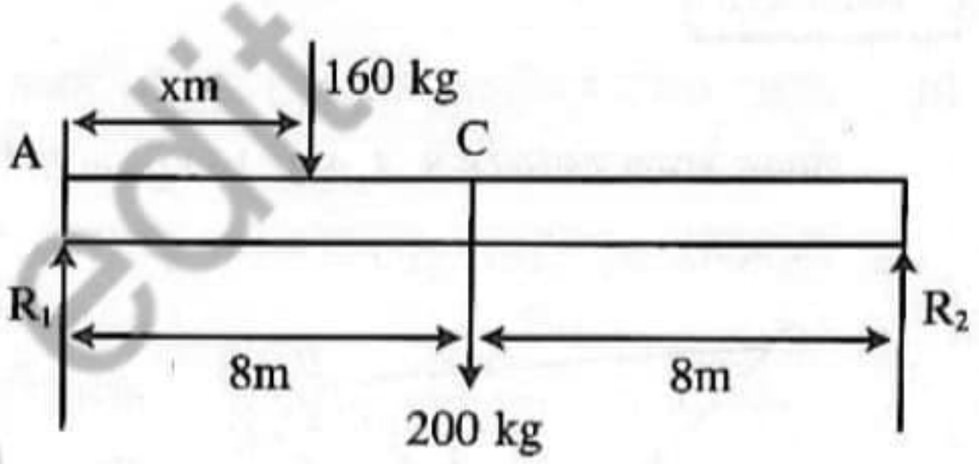
$\Rightarrow R_2 = 10x + 100 \therefore R_1 + R_2 = 360$

$\Rightarrow R_1 + 10x + 100 = 360 \Rightarrow R_1 = 260 - 10x$

শর্তমতে, $\frac{R_2}{R_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{10x+100}{260-10x} = \frac{1}{2}$

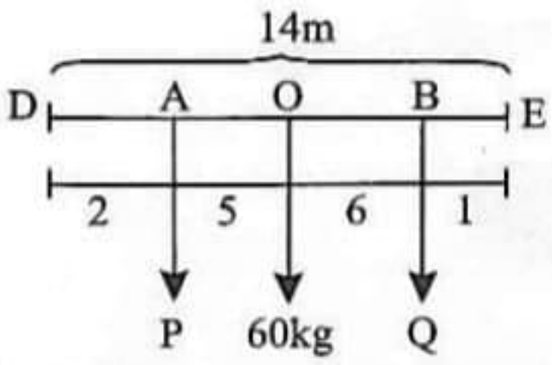
$\Rightarrow 20x + 200 = 260 - 10x \Rightarrow 30x = 60 \Rightarrow x = 2m$

Ans: A প্রান্ত হতে 2 মিঃ দূরে।



28. 14 m দীর্ঘ ও 60 kg ওজনের একটি সুষম পাইপ A ও B দুই ব্যক্তি বহন করছে। A এর অবস্থান পাইপের এক প্রান্ত হতে 2m দূরে এবং B এর অবস্থান পাইপের অপর প্রান্ত হতে 1m দূরে। পাইপের ওজন A ও B এর মধ্যে কিভাবে ভাগ হবে তা নির্ণয় কর। **[KUET'04-05]**

সমাধান:



$P + Q = 60 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (i)$

$P.OA = Q.OB \Rightarrow P(OD-AD) = Q(OE-BE)$

$\Rightarrow P(7-2) = Q(7-1)$ [$\because$ O, পাইপের মধ্যবিন্দু]

$\therefore P = \frac{6}{5}Q$

(i) $\Rightarrow Q + \frac{6}{5}Q = 60 \Rightarrow \frac{11}{5}Q = 60$

$\therefore Q = \frac{300}{11} = 27.3kg$

$P = \frac{6}{5} \times 27.3 = 32.76kg$ (Ans.)

29. 100 Kg ওজনের 16 মিটার দীর্ঘ একটি সমরূপ তক্তা দুজন লোক মাথায় করে বহন করে। একজন এর একপ্রান্ত থেকে 2 মিটার দূরে এবং অন্যজন অপর প্রান্ত থেকে 3 মিটার দূরে থাকলে, প্রত্যেকে কী পরিমাণ ওজন বহন করবে তা নির্ণয় কর। **[CUET'03-04]**

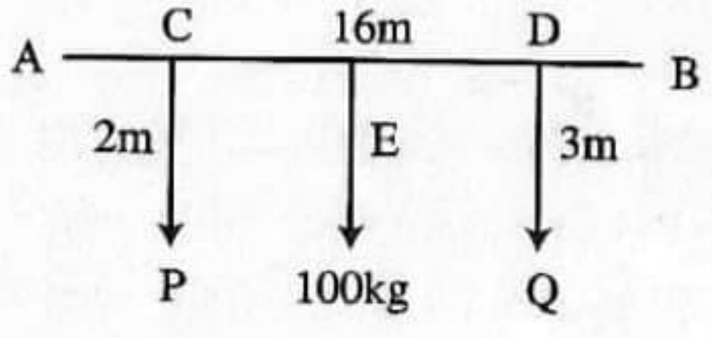
সমাধান:

$P.CE = Q.DE \Rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{DE}{CE}$

$\Rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{BE-BD}{AE-AC} \Rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{8-3}{8-2}$

$\Rightarrow \frac{P}{Q} = \frac{5}{6} \Rightarrow P = \frac{5Q}{6}$

$P + Q = 100. \Rightarrow \frac{5Q}{6} + Q = 100 \therefore Q = \frac{600}{11}$ (Ans.)



$P = 100 - \frac{600}{11} = \frac{500}{11}$ (Ans.)

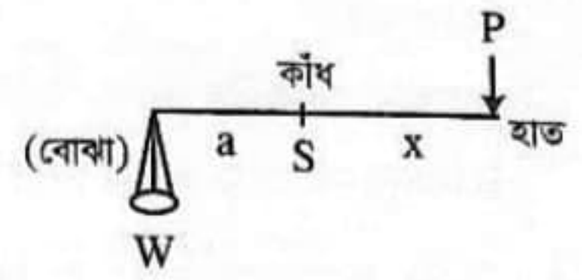
Click to edit

30. একটি লোক লাঠির এক প্রান্তে একটি বোঝা কাঁধে বহন করছে। বোঝাটির ওজন w এবং লোকটির কাঁধ হতে বোঝাটি ও লোকটির হাতের দূরত্ব যথাক্রমে a এবং x হলে দেখাও যে, তার কাঁধের উপর চাপ $w\left(1+\frac{a}{x}\right)$ হবে। **[BUTEX'01-02]**

সমাধান: সমান্তরাল বলের সূত্র হতে, $w.a = Px \;\therefore P = \frac{aw}{x}$

$\therefore$ কাঁধের উপর মোট চাপ $= P + w = \frac{aw}{x} + w = w\left(\frac{a}{x}+1\right)$

$= w\left(1+\frac{a}{x}\right)$ (Proved)



Question Type-15: লব্ধির ক্রিয়া রেখা নির্ণয় সংক্রান্ত সমস্যা

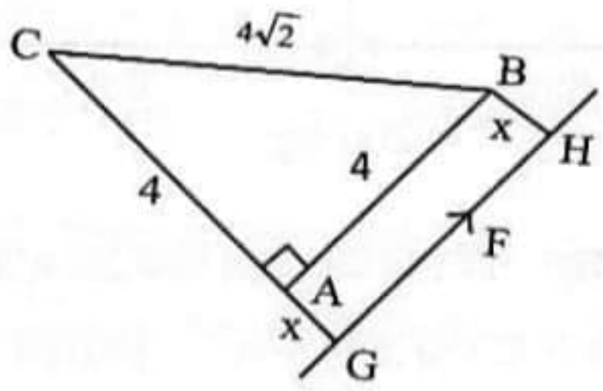
➲ **Formula & Concept:**

এখানে, সমান্তরাল সদৃশ ও সমান্তরাল বিসদৃশ বলের এবং মোমেন্টর Concept ব্যবহার করে লব্ধির ক্রিয়ারেখা বের করতে হবে এবং উক্ত ধারণাগুলো ব্যবহার করে এর মান ও দিক বের করতে হবে।

Written

01. ABC একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ। সমান বাহু AB এবং AC প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য 4 মিটার। A, B এবং C বিন্দুতে একটি বলের ভ্রামক যথাক্রমে 8, 8, এবং 16 kg-m; বলটির মান ও গতিপথ নির্ণয় কর। **[BUET'12-13]**

সমাধান:



যেহেতু A ও B বিন্দুর সাপেক্ষে বলের ভ্রামক সমান কাজেই A ও B বিন্দু হবে বলের ক্রিয়ারেখার লম্ব, দূরত্ব সমান হবে অর্থাৎ বলের ক্রিয়ারেখা AB এর সমান্তরাল হবে। $AG \perp GH$ ও $BH \perp GH$ আঁকি।

প্রশ্নমতে, $AG = BH = x$ (ধরি)

$\therefore Fx = 8$

$F(x+4) = 16$ [$\because CG \perp GH$]

$\Rightarrow Fx + 4F = 16 \Rightarrow 8 + 4F = 16$

$\Rightarrow F = 2\ kg-wt$(Ans.)

আবার, $Fx = 8$

$\Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4m$

$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}m$

অর্থাৎ বলের ক্রিয়ারেখা AB এর সমান্তরালের ও AB হতে 4m দূরত্বে A হতে B এর দিকে ক্রিয়াশীল।

Question Type-16: সমন্বিত অংশ সংক্রান্ত সমস্যা

➲ **Formula & Concept:**

এখানে সমন্বিত অংশে প্রশ্নের আলোকে সমান্তরাল সদৃশ/বিসদৃশ বল বা ভ্রামকের ধারণা ব্যবহার করে প্রশ্নের প্রতিটি অংশ প্রমাণ করতে হবে।

Written

01. বৃত্ত চাপ আকারের একটি হালকা তারের দুই প্রান্ত এর কেন্দ্রের সাথে α কোণ উৎপন্ন করে। তারটির দুই প্রান্ত হতে P ও Q ওজনের দুটি বস্তু ঝুলছে এবং তারটির উত্তল দিক নিচের দিকে থেকে স্থিতাবস্থায় আছে। কেন্দ্র দিয়ে অতিক্রান্ত উল্লম্ব রেখা, P ওজনের দিকের ব্যাসার্ধের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে, তা নির্ণয় কর। **[BUET'04-05]**

সমাধান: $+\overleftarrow{\sum M_p} = 0 \Rightarrow P.r\sin\theta - Q.r\sin(\alpha-\theta) = 0$ [D বিন্দুর সাপেক্ষে ভ্রামক নিয়ে]

$\Rightarrow r(P\sin\theta - Q\sin\alpha\cos\theta + Q\cos\alpha\sin\theta) = 0$

$\Rightarrow (P + Q\cos\alpha)\sin\theta = Q\sin\alpha\cos\theta$

$\Rightarrow \tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha} \;\therefore \theta = \tan^{-1}\frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}$ (Ans.)