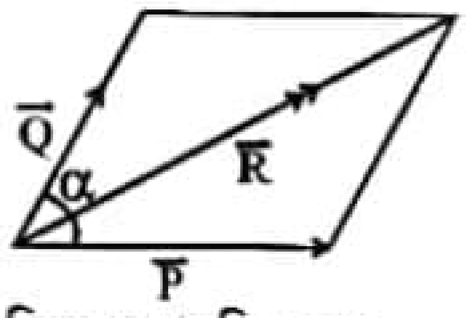
Question Type–01: ভেক্টরের লব্ধি নির্ণয়

Formula & Concept:

➤ $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ দুটি ভেক্টর রাশি হলে, তাদের লব্ধি, $\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q}$

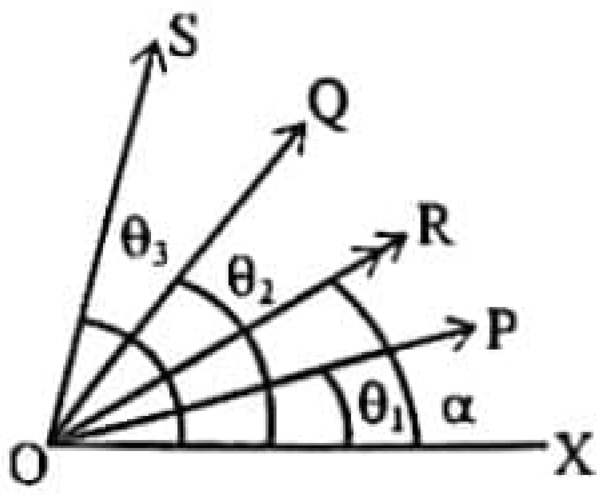


চিত্রঃ সামান্তরিক সূত্র

লব্ধির মান	লব্ধির দিক
➤ P ও Q মানের দুটি ভেক্টরের মধ্যবর্তী কোণ α হলে লব্ধির মান, $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$ ➤ লব্ধির সর্বোচ্চ মান, $R_{max} = P + Q$; $[\alpha = 0°]$ ➤ লব্ধির সর্বনিম্ন মান, $R_{min} = \lvert P - Q \rvert$; $[\alpha = 180°]$	➤ লব্ধির দিক (P এর সাথে), $\theta_P = \tan^{-1}\frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha}$ ➤ লব্ধির দিক (Q এর সাথে), $\theta_Q = \tan^{-1}\frac{P\sin\alpha}{Q+P\cos\alpha}$

[বি.দ্রঃ সহজভাবে যার সাথে কোণ (θ) নিব তাকে নিচে আলাদা রাখতে হবে।

♦ একাধিক ভেক্টরের লব্ধি নির্ণয়ের ক্ষেত্রেঃ



$\vec{P}, \vec{Q}, \vec{S}$ এর লব্ধি R হলে,

OX বরাবর বলসমূহের উপাংশ নিয়ে $R\cos\alpha = P\cos\theta_1 + Q\cos\theta_2 + S\cos\theta_3$ ... ...(i)

OX এর লম্ব বরাবর বলসমূহের উপাংশ নিয়ে,

$R\sin\alpha = P\sin\theta_1 + Q\sin\theta_2 + S\sin\theta_3$ ... ...(ii)

∴ লব্ধি $R = \sqrt{R^2\cos^2\alpha + R^2\sin^2\alpha}$ [(i) ও (ii) এর বর্গের সমষ্টির বর্গমূলই হবে লব্ধির মান]

♦ সতর্কতা:

➤ এই সূত্রগুলোতে সব সময় P, Q এর পরমমান নিয়ে কাজ করতে হবে।

➤ কেবল সমবিন্দুগামী (একই বিন্দু থেকে শুরু হয় এমন) দুটি ভেক্টরের ক্ষেত্রে সামান্তরিক সূত্র ব্যবহার করা যাবে।

01. দুইটি সমান মানের ভেক্টরের লব্ধির মান কোন অবস্থায় ওদের প্রত্যেকের মানের সমান হতে পারে? **[CKRUET'21-22]**

(a) 0° (b) 30° (c) 60° (d) 90° (e) 120°

সমাধান: (e); দুইটি সমান ভেক্টর p এবং p

এদের মধ্যবর্তী কোণ α হলে, লব্ধি $= \sqrt{p^2 + p^2 + 2pp\cos\alpha} = \sqrt{2p^2(1+\cos\alpha)} = \sqrt{2p^2 . 2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$

$= \sqrt{4p^2\cos^2\frac{\alpha}{2}} = 2p\cos\frac{\alpha}{2}$; লব্ধি p হলে, $2p\cos\frac{\alpha}{2} = p \Rightarrow 2\cos\frac{\alpha}{2} = 1 \Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 60° \Rightarrow \alpha = 120°$

02. দুটি ভেক্টরের মধ্যে একটি অন্যটির দ্বিগুণ এবং এদের লব্ধির মান বড় ভেক্টরটির সমান হলে ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যকার কোণের মান-

(a) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ (b) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ (c) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)$ (d) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)$ **[BUTEX'16-17]**

সমাধান: (c); প্রশ্নমতে, $(2P)^2 = P^2 + (2P)^2 + 2P.2P\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{4} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{4}\right)$

03. দুটি ভেক্টর রাশির বৃহত্তর ও ক্ষুদ্রতর লব্ধিদ্বয় যথাক্রমে 28 একক ও 4 একক। রাশি দুটি পরস্পর সাথে 90° কোণে কোন একটি কণার উপর ক্রিয়া করল। লব্ধির মান কত? [CUET'15-16]

(a) None of them (b) 28 unit (c) 24 unit (d) 20 unit

সমাধান: (d): $P + Q = 28$; $P - Q = 4$; $P = 16, Q = 12$

$R = \sqrt{p^2 + Q^2} = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20$ unit

04. দুটি সমমানের ভেক্টর কোন এক বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। তাদের লব্ধির মান যেকোন একটি ভেক্টরের মানের সমান। ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ কত? [BUTEX'15-16]

(a) 45° (b) 90° (c) 120° (d) 150°

সমাধান: (c); $p^2 = p^2 + p^2 + 2.p.p.\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 120°$

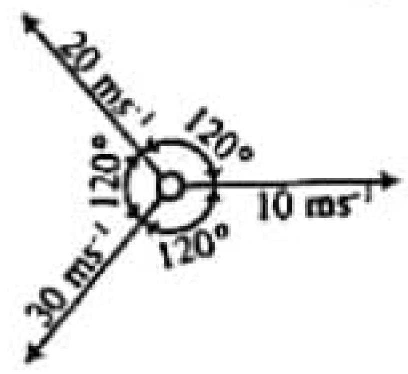
05. A particle has 3 velocities 10 ms^{-1}, 20 ms^{-1} and 30 ms^{-1} inclined at angle of 120° to one another. The magnitude of the resultant velocity is- [IUT'14-15]

(a) $10\sqrt{3}\ ms^{-1}$ (b) 10 ms^{-1} (c) 5 ms^{-1} (d) $\sqrt{3}\ ms^{-1}$

Solution: (a); $v_x = 10 + 20\cos120° + 30\cos240° = -15$

$v_y = 0 + 20\sin120° + 30\sin240° = -5\sqrt{3}$

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 10\sqrt{3}$



06. দুটি ভেক্টর রাশির প্রত্যেকটির মান 5 একক। তারা একই বিন্দুতে পরস্পর 120° কোণে ক্রিয়া করে। তাদের লব্ধির মান কত?

(a) 5 unit (b) 0 unit (c) 25 unit (d) 15 unit (e) None [RUET'12-13]

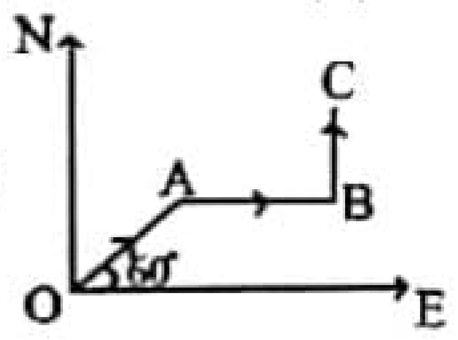
সমাধান: (a); $R^2 = P^2 + P^2 + 2P.P.\cos\alpha = 2P^2(1 + \cos\alpha) = 4P^2\cos^2\frac{\alpha}{2}$

$\therefore R = 2P\cos\frac{\alpha}{2} = 2 \times 5\cos60° = 10 \times \frac{1}{2} = 5$

07. The pilot of a private plane flies 20.0 km in a direction 60° north of east, then 30.0 km straight east, then 10.0 km straight north. How far the plane is from the starting point. [IUT'11-12]

(a) 58.44 km (b) 38.44 km (c) 48.44 km (d) 46.44 km

Solution: (c);



$D_E = OA\cos60° + AB = 20\cos60° + 30 = 40$

$D_N = 20\sin60° + BC = 20\sin60° + 10 = 10 + 10\sqrt{3}$ $\therefore D = \sqrt{D_E^2 + D_N^2} = 48.44$ km

08. The maximum value of the resultant of two vectors is 7 units and minimum value of those is 1 unit. When two vectors are acting on a point at right angle, the resultant will be- [IUT'10-11]

(a) 2 units (b) 3 units (c) 4 units (d) 5 units

Solution: (d); $P + Q = 7 \Rightarrow P - Q = 1 \therefore (P, Q) = (4,3) \therefore R = \sqrt{P^2 + Q^2} = 5$

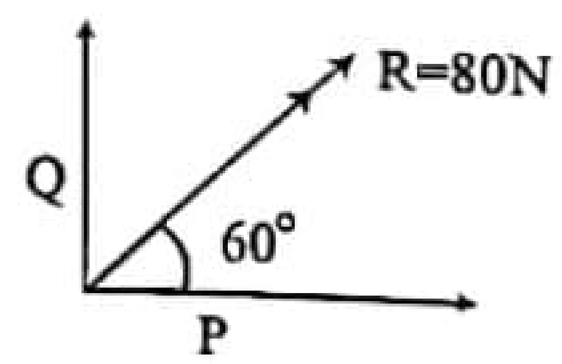
09. পরস্পরের সাথে লম্বভাবে ক্রিয়াশীল দুইটি বলের লব্ধি 80N। যদি লব্ধি একটি বলের সঙ্গে 60° কোণে আনত থাকে, তবে বল দুইটির মান নির্ণয় কর। [RUET'17-18]

সমাধান: এখন, $R\cos60° = P\cos0° + Q\cos90°$

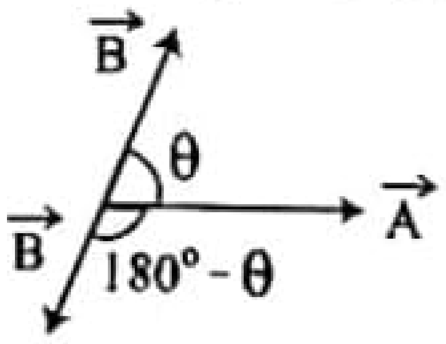
$\therefore P = 80\cos60° = 40N$ (Ans.)

আবার, $R\sin60° = P\sin0° + Q\sin90°$

$\Rightarrow Q = 80\sin60° = 40\sqrt{3}$ N (Ans.)



10. A ও B ভেক্টর দুটি এমন যে, $|A + B| = |A - B|$। ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যকার কোণ নির্ণয় কর। [BUTEX'02-03]



সমাধান: $|\vec{A}+\vec{B}| = |\vec{A}-\vec{B}| \Rightarrow |\vec{A}+\vec{B}|^2 = |\vec{A}-\vec{B}|^2$

$\Rightarrow A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta = A^2 + B^2 + 2AB\cos(180° - \theta)$

$\Rightarrow A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta = A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta$

$\Rightarrow 4AB\cos\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \cos^{-1}0 = 90° \quad \therefore \vec{A} \wedge \vec{B} = 90^0$ (Ans.)

বিকল্প: $|\vec{A}+\vec{B}| = |\vec{A}-\vec{B}| \Rightarrow |\vec{A}+\vec{B}|^2 = |\vec{A}-\vec{B}|^2$

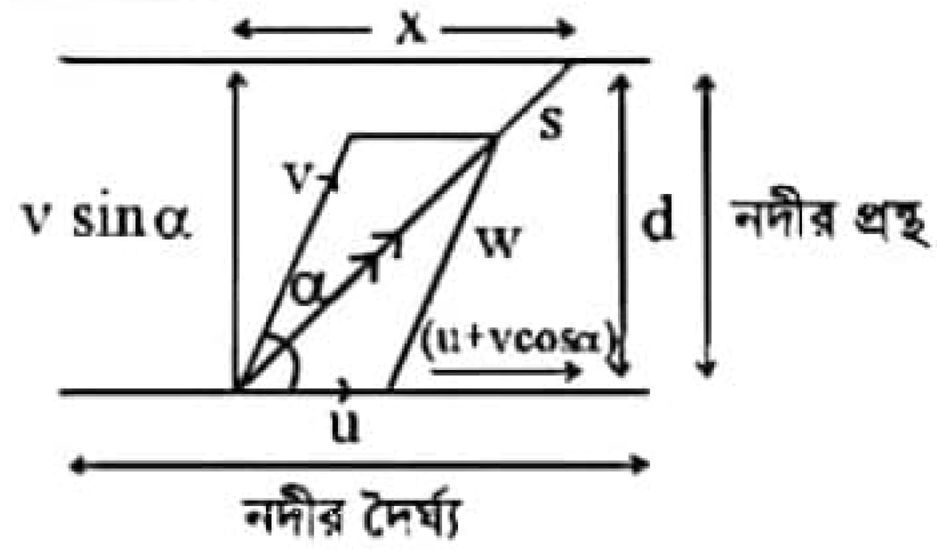
$\Rightarrow (\vec{A}+\vec{B})\cdot(\vec{A}+\vec{B}) = (\vec{A}-\vec{B})\cdot(\vec{A}-\vec{B}) \Rightarrow A^2 + B^2 + 2\vec{A}\cdot\vec{B} = A^2 + B^2 - 2\vec{A}\cdot\vec{B}$

$\Rightarrow 4\vec{A}\cdot\vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{A}\cdot\vec{B} = 0 \therefore AB\cos\theta = 0, \cos\theta = 0^o \therefore \theta = 90^o \therefore \vec{A}\wedge\vec{B} = 90^o$ (Ans.)

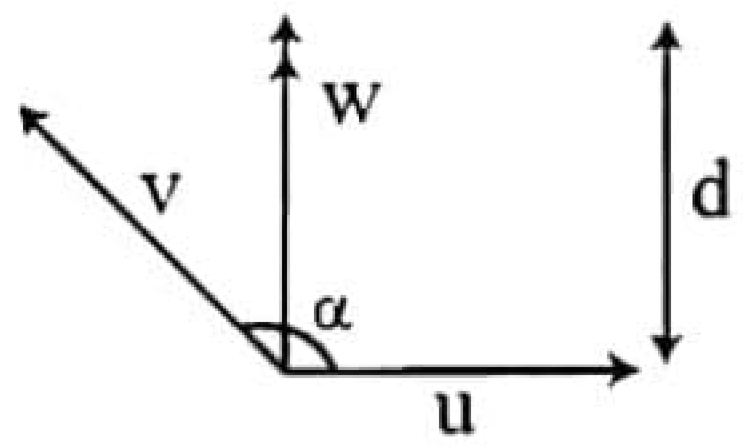
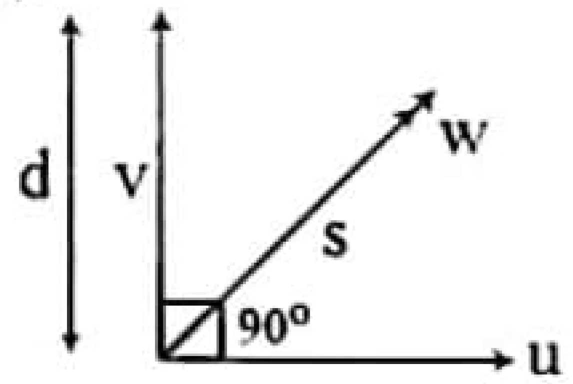
Question Type-02: নদী ও স্রোত

Formula & Concept:

- ধরা যাক, নদীতে স্রোতের বেগ u এবং নৌকার বেগ v ।
  নৌকার বেগ ও স্রোতের বেগের মধ্যকার কোণ α ।
  লব্ধি বেগ = w ; নৌকার সরণ = s
  যাত্রা বিন্দুর বিপরীত বিন্দু থেকে x দূরত্বে পৌছালে,
  x = স্রোত বরাবর মোট বেগ × নদী পারাপারের সময়
  $= (u + v\cos\alpha).t = (u + v\cos\alpha)\frac{d}{v\sin\alpha}$



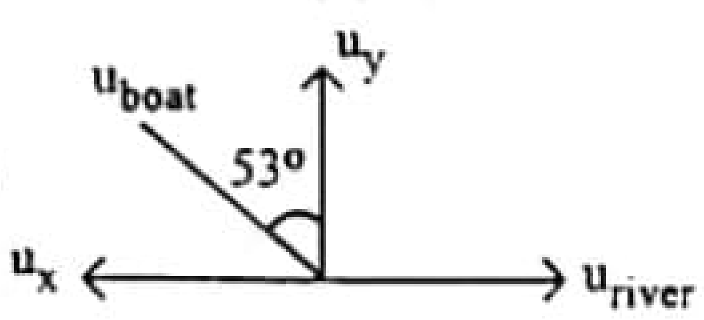
- প্রয়োজনীয় সময়, $t = \frac{d}{v\sin\alpha}$

ন্যূনতম দূরত্ব (সোজাসুজি)	ন্যূনতম সময়
নদী পার হতে প্রয়োজনীয় সময় $= \frac{d}{v\sin\alpha}$	$t_{min} = \frac{d}{v\sin 90°} = \frac{d}{v}$
নৌকার লব্ধি বেগ $= v\sin\alpha = \sqrt{v^2 - u^2}$	নৌকার লব্ধি বেগ $= \sqrt{u^2 + v^2}$
সোজাসুজি পার হবার জন্য $\alpha = \cos^{-1}\frac{-u}{v}$	স্রোতের সাথে নৌকার লব্ধি বেগের কোণ, $\theta = \tan^{-1}\frac{v}{u} = \tan^{-1}\frac{d}{x}$ যেখানে x পার্শ্বীয় সরণ।
	পার্শ্বীয় সরণ, $x = u \times t_{min}$
	কোণাকুণি দূরত্ব, $s = \sqrt{d^2 + x^2}$
	

01. A river flows toward the east. You head your boat 53° west of north and achieve a velocity of $6.0 ms^{-1}$ due north relative to the shore. What is your speed relative to the water? [IUT'18-19]

(a) $8\ ms^{-1}$ (b) $6\ ms^{-1}$ (c) $10\ ms^{-1}$ (d) $12\ ms^{-1}$

Solution: (c);

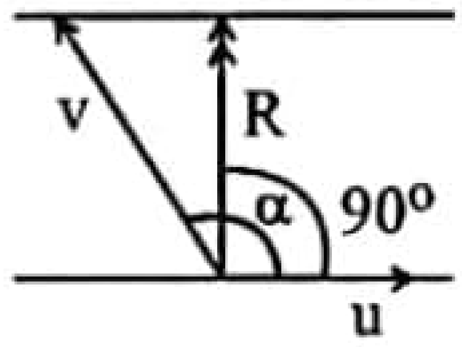


$u_x = u_{river}$; $\tan 53° = \frac{u_x}{u_y} = u_x = \tan 53°\ u_y = \tan 53° \times 6 = 8ms^{-1}$(approx) $= u_{river}$

$u_{relative} = \vec{u}_y - u_{river}$; $u_{relative} = \sqrt{8^2 + 6^2 + 2.8.6\cos 90°} = 10\ ms^{-1}$

02. কোন নদীতে একটি নৌকার বেগ স্রোতের অনুকূলে ও প্রতিকূলে যথাক্রমে 18 এবং 6 kmh^{-1}। নৌকাটি কত বেগে কোন দিকে চালনা করলে সোজা অপর পাড়ে পৌঁছাবে? **[RUET'10-11]**

সমাধান: $v + u = 18, v - u = 6 \therefore v = 12kmh^{-1}, u = 6\ kmh^{-1}$ $\begin{bmatrix} v \rightarrow \text{নৌকার বেগ} \\ u \rightarrow \text{স্রোতের বেগ} \end{bmatrix}$



$u\cos 0 + v\cos\alpha = R\cos 90 \Rightarrow u + v\cos\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{u}{v}$

$\therefore \alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{6}{12}\right) = 120^\circ \therefore 12\ kmh^{-1}$ বেগে 120° কোণে (Ans.)

03. একটি ইঞ্জিন চালিত নৌকার বেগ ঘণ্টায় 14 কিলোমিটার। একটি নদী আড়াআড়ি পার হতে হলে নৌকাটিকে কোন দিকে চালাতে হবে? নদীর প্রস্থ 12.125 km হলে তা পাড়ি দিতে কত সময় লাগবে? স্রোতের বেগ ঘণ্টায় 7 km। **[CUET'04-05]**

সমাধান: $P + Q\cos\alpha = R\cos 90^\circ$

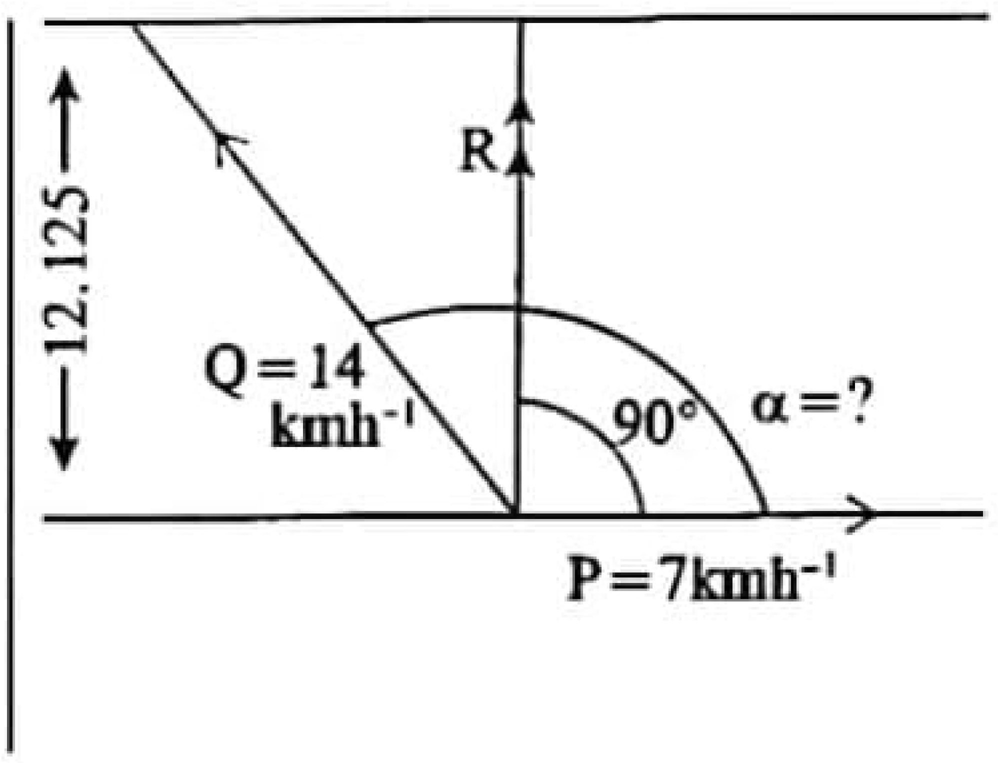
$\Rightarrow 7 + 14\cos\alpha = 0$

$\Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2} \therefore \alpha = 120^\circ$ (Ans.)

$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$

$= \sqrt{7^2 + 14^2 + 2.7.14\cos 120^\circ} = 12.124\ kmh^{-1}$

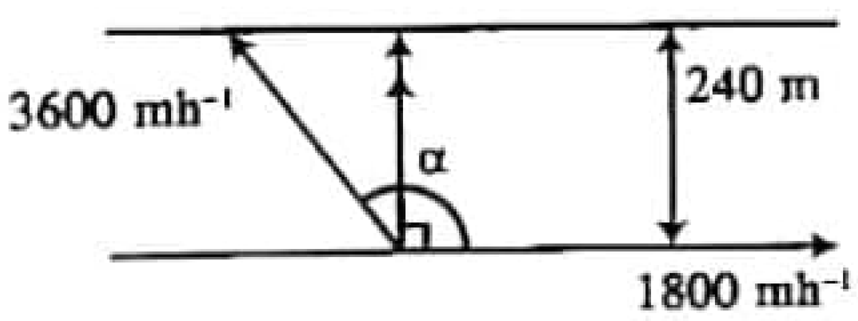
$\therefore t = \frac{12.125}{12.124} = 1$ hour (Ans)



নৌকাটিকে স্রোতের বেগের সাথে 120° কোণে চালাতে হবে।

04. প্রতি ঘণ্টায় 1800m বেগে 240m প্রশস্ত একটি নদী নিচের দিকে প্রবাহিত হচ্ছে এবং প্রতি ঘণ্টায় 3600m বেগে সাঁতারে সক্ষম একজন সাঁতারু একটি বিপরীত বিন্দুতে যেতে ইচ্ছুক। সে কোন দিক বরাবর সাঁতার দেবে এবং সেই বিন্দুতে যেতে কত সময় নেবে? **[BUET'03-04]**

সমাধান:



বিপরীত বিন্দুতে যেতে হলে সাঁতারুকে α কোন যাত্রা করতে হবে।[$u \rightarrow$ স্রোতের বেগ, $v \rightarrow$ সাঁতারুর বেগ] নদীর স্রোত বরাবর উপাংশ, $3600\cos\alpha + 1800 = 0$

$\Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1800}{3600} \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 120^\circ \therefore 120^\circ$ কোণে যাত্রা করতে হবে

নদীর প্রস্থ, $d = 240\ m$

বিপরীত বিন্দুতে যেতে সময় লাগবে, $t = \frac{d}{v\sin\alpha} = \frac{240}{3600\sin 120^\circ} = 0.07698$ ঘণ্টা

অথবা, $t = \frac{d}{\sqrt{v^2 - u^2}} = \frac{240}{\sqrt{3600^2 - 1800^2}} = 0.07698$ ঘণ্টা

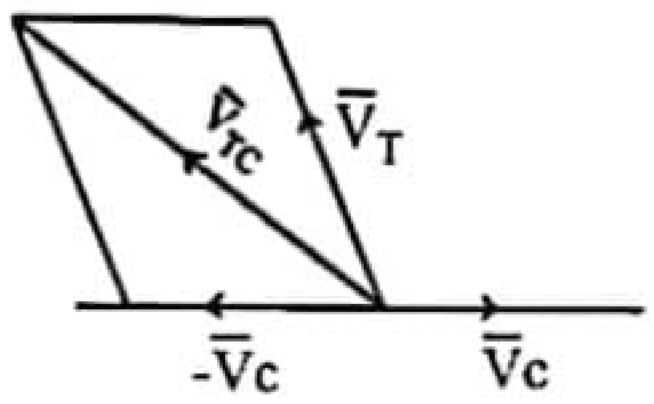
05. একটি নদীর স্রোতের বেগ 5 ms^{-1}। 10 ms^{-1} বেগের একটি নৌকার সোজাসুজিভাবে নদী পাড়ি দিতে 1 min 40 second সময় লাগে। নদীর প্রস্থ কত? **[CUET'03-04]**

সমাধান: নদী সোজাসুজি পার হতে গেলে লব্ধি বেগ, $w = \sqrt{u^2 - v^2}$ | $u =$ নৌকার বেগ, $v =$ স্রোতের বেগ।

এখানে, $w = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75}\ ms^{-1}$; $d = wt = \sqrt{75} \times (60 + 40) = 866.025\ m$

Question Type–03: ভেক্টর বিয়োগ ও আপেক্ষিক বেগ

Formula & Concept:



- ধরি একটি গাড়ির বেগ $\vec{v}_C$ ও একটি ট্রাকের বেগ $\vec{v}_T$

  এখন গাড়ির সাপেক্ষে ট্রাকের বেগ $\vec{v}_{TC}$ নির্ণয়ের জন্য আমাদের ট্রাকের বেগ $\vec{v}_T$ থেকে গাড়ির বেগ $\vec{v}_C$ বিয়োগ করতে হবে।

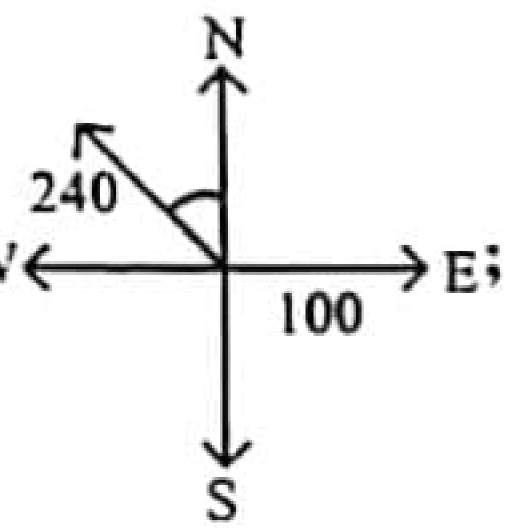
অর্থাৎ $\vec{v}_{TC} = \vec{v}_T - \vec{v}_C$

লক্ষণীয়ঃ যার সাপেক্ষে আপেক্ষিক বেগ বের করতে হবে তার বেগকেই ভেক্টর বিয়োগ করতে হবে। অর্থাৎ, তাকে উল্টা করে লব্ধি বের করতে হবে।

01. A plane has an air speed of 240 kmh^{-1}. What should be the plane's heading if it is to travel due north, relative to the earth in a wind blowing with a velocity of 100 km/hr in an easterly direction? **[IUT'17-18]**

(a) 24.62° (b) 2.462° (c) 2462° (d) 42.62°

Solution: (a);

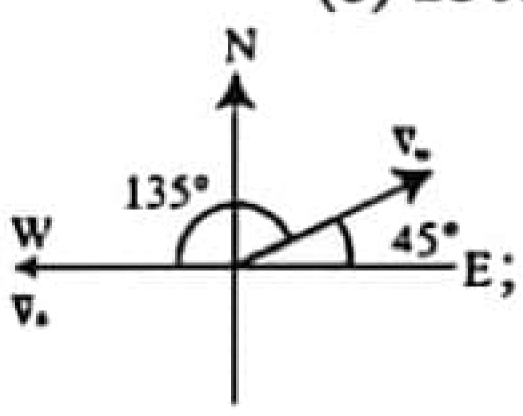


; $\sin\theta = \frac{100}{240} \Rightarrow \theta = 24.62°$ (Ans.)

02. An airplane flies due west at 185kmh^{-1} with respect to the air. There is a wind blowing at 85kmh^{-1} to the northeast relative to the ground. What is the plane's speed with respect to the ground? **[IUT'16-17]**

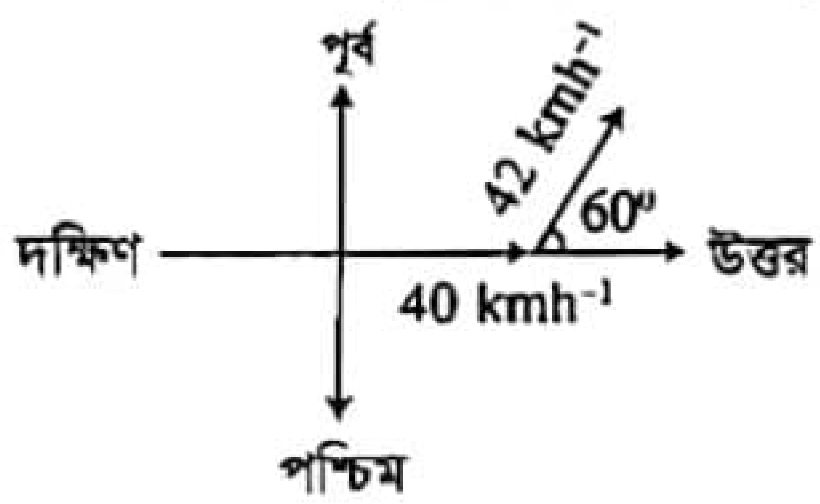
(a) 139kmh^{-1} (b) 230kmh^{-1} (c) 239kmh^{-1} (d) 179kmh^{-1}

Solution: (a);



$$\vec{v}_a = \vec{v} - \vec{v}_w \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_a + \vec{v}_w \Rightarrow v = \sqrt{185^2 + 85^2 + 2 \times 185 \times 8 \times \cos(135°)} = 138.6\ kmh^{-1} \approx 139kmh^{-1}$$

03. একটা গাড়ি 40 Kmh^{-1} বেগে উত্তর দিকে চলছিল। এরপর গতি পরিবর্তন করে উত্তর দিকের সাথে 60° কোণে 42 Kmh^{-1} বেগে চলতে থাকলো। এক্ষেত্রে বেগের পরিবর্তন কত? **[BUTEX'21-22]**



সমাধান: $\vec{v_1} = (40\cos 0°\hat{i} + 40\sin 0°\hat{j})kmh^{-1} = 40\,\hat{i}\ kmh^{-1}$

এবং $\vec{v_2} = (42\cos 60°\hat{i} + 42\sin 60°\hat{j})kmh^{-1}$

$= \left(42 \times \frac{1}{2}\hat{i} + 42 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{j}\right)\ kmh^{-1} = (21\,\hat{i} + 21\sqrt{3}\hat{j})kmh^{-1}$

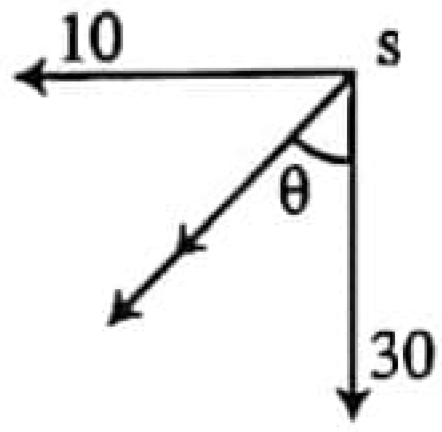
বেগের পরিবর্তন, $\overrightarrow{\Delta v} = \vec{v_2} - \vec{v_1} = 21\,\hat{i} + 21\sqrt{3}\hat{j} - 40\,\hat{i}$

$= (-19\hat{i} + 21\sqrt{3}\,\hat{j})\ kmh^{-1}$

$\therefore |\overrightarrow{\Delta v}| = \sqrt{(-19)^2 + (21\sqrt{3})^2} = \sqrt{1684} = 41.036\ kmh^{-1}$

$\theta = \tan^{-1}\frac{21\sqrt{3}}{19} = 83.17°$ ∴ 83.17° কোণে দক্ষিণ দিকের সাথে।**(Ans.)**

04. কোন একদিন 30 ms^{-1} গতিতে উল্লম্বভাবে বৃষ্টি পড়ছিল। যদি বায়ু 10 ms^{-1} গতিতে উত্তর থেকে দক্ষিণে বইতে শুরু করে তাহলে বৃষ্টি থেকে রক্ষা পেতে তোমার ছাতা কোন দিকে মেলে ধরতে হবে বের কর। [BUET'06-07]



সমাধান: আমরা জানি, $\tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P+Q\cos\alpha} = \frac{10\sin 90^\circ}{30+10\cos 90^\circ} = \frac{1}{3}$

$\therefore \theta = \tan^{-1}\frac{1}{3} = 18.43^\circ$

ধরি, ছাতা বৃষ্টির দিকের সাথে θ কোণে ধরতে হবে।

∴ বৃষ্টির দিকের সাথে 18.43° কোণে ছাতা মেলে ধরতে হবে।

05. 10 কিলোমিটার/ঘণ্টা বেগে বৃষ্টি পড়ছে এবং 60 কিলোমিটার/ঘণ্টা বেগে পূর্ব হতে পশ্চিমে বাতাস বইছে। পূর্ব হতে পশ্চিম অভিমুখী চলন্ত গাড়ীর গতিবেগ নির্ণয় কর যাতে

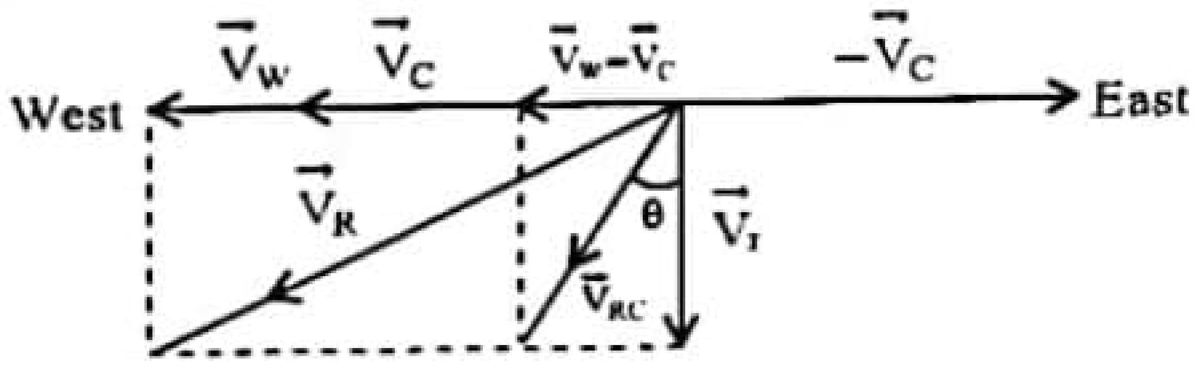
(a) গাড়ীর সামনের ও পিছনের কাঁচ ভিজে, (b) শুধুমাত্র পিছনের কাঁচ ভিজে। [RUET'04-05]

সমাধান: বাতাসের বেগ $\overrightarrow{v_w}$, বৃষ্টির বেগ $\overrightarrow{v_r}$, গাড়ির বেগ $\overrightarrow{v_C}$, বৃষ্টির লব্ধি বেগ $\overrightarrow{v_R} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_w}$

গাড়ির সাপেক্ষে বৃষ্টির বেগ, $\overrightarrow{v_{RC}} = \overrightarrow{v_R} - \overrightarrow{v_C} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_w} - \overrightarrow{v_C}$

$|\overrightarrow{v_w} - \overrightarrow{v_C}| = |\overrightarrow{v_w} + (-\overrightarrow{v_C})| = v_w - v_C$ [East থেকে west বরাবর শুধু $\overline{V}_w$ ও $(-\overline{V}_c)$বেগে কাজ করছে]

$\tan\theta = \frac{|\overrightarrow{v_w} - \overrightarrow{v_C}|}{|\overrightarrow{v_r}|} = \frac{v_w - v_C}{v_r}$



(a) গাড়ির সামনের ও পেছনের কাঁচ ভিজলে,

$\theta = 0 \Rightarrow \tan\theta = 0 \Rightarrow \frac{v_w - v_C}{v_r} = 0$

$\Rightarrow v_w = v_C \quad \therefore v_C = 60\text{kmh}^{-1}$

পূর্ব → পশ্চিম

(b) শুধুমাত্র পিছনের কাঁচ ভিজলে, $\theta > 0 \Rightarrow \tan\theta > 0 \Rightarrow \frac{v_w - v_C}{v_r} > 0 \Rightarrow v_w > v_C \therefore v_C < 60\text{ kmh}^{-1}$

60 kmh^{-1} এর কম বেগে পূর্ব → পশ্চিম।

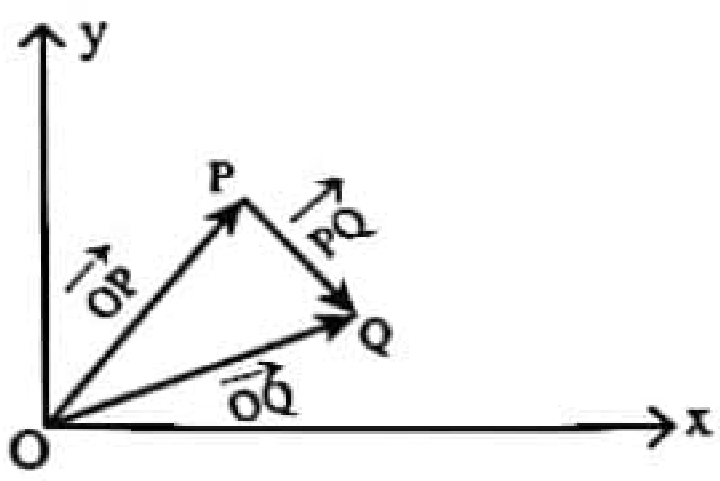
Question Type-04: অবস্থান ভেক্টর নির্ণয়

Formula & Concept:

➢ ধরা যাক, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y, z)। তাহলে মূল বিন্দুর সাপেক্ষে P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর: $\overrightarrow{OP} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

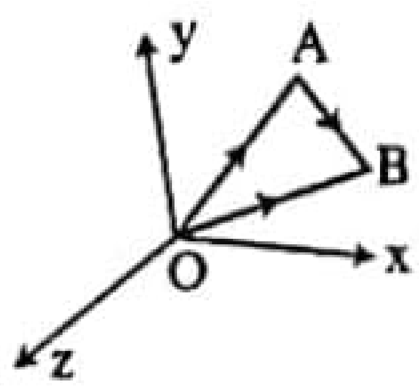
আবার, মূলবিন্দুর সাপেক্ষে P ও Q বিন্দুর অবস্থান যথাক্রমে $\overrightarrow{OP}$ ও $\overrightarrow{OQ}$ হলে, P এর সাপেক্ষে Q এর অবস্থান-

$\overrightarrow{PQ}$ = শেষ অবস্থান – আদি অবস্থান = $\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$



01. (a) কোন বিন্দু P এর স্থানাঙ্ক P (2, –3, 4) হলে বিন্দুটির অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় কর। [CUET'05-06]

(b) A (2, –1, 3) এবং B (–1, 2 –3) বিন্দুদ্বয়ের সংযোগকারী দিক রাশিটি নির্ণয় কর।



সমাধান: (a) $\vec{r} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$

(b) $\overrightarrow{AB} = (-1-2)\hat{i} + (2+1)\hat{j} + (-3-3)\hat{k}$

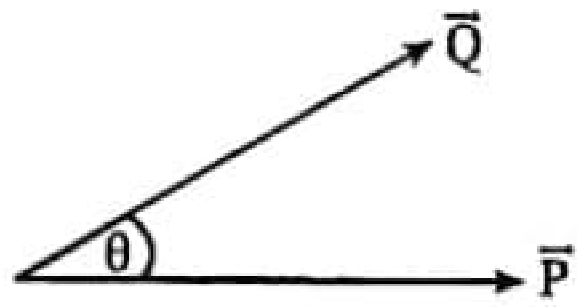
$\therefore \overrightarrow{AB} = -3\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}$ (Ans.)

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

Question Type-05: ভেক্টরের ডট গুণন

Formula & Concept:



- P ও Q দুটি ভেক্টর এবং এদের মধ্যবর্তী কোণ θ হলে এদের ডট গুণ $\vec{P}.\vec{Q} = PQ\cos\theta$
- $\vec{P} = P_x\hat{i} + P_y\hat{j} + P_z\hat{k}$
- $\vec{Q} = Q_x\hat{i} + Q_y\hat{j} + Q_z\hat{k}$ হলে, $\vec{P}.\vec{Q} = P_xQ_x + P_yQ_y + P_zQ_z$.

অভিক্ষেপ নির্ণয়ঃ

- $P\cos\theta = \frac{\vec{P}.\vec{Q}}{Q}$ এবং $Q\cos\theta = \frac{\vec{P}.\vec{Q}}{P}$
- $P\cos\theta$ হল $\vec{P}$ এর অভিক্ষেপ $\vec{Q}$ এর উপর
- $Q\cos\theta$ হল $\vec{Q}$ এর অভিক্ষেপ $\vec{P}$ এর উপর

লক্ষণীয়ঃ অভিক্ষেপ হল একটি স্কেলার রাশি।

উপাংশ নির্ণয়:

- $\vec{P}$ এর দিকে $\vec{Q}$ এর উপাংশ = ($\vec{P}$ এর উপর $\vec{Q}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ) × ($\vec{P}$ এর দিকে একক ভেক্টর)

$$= (Q\cos\theta) \times \left(\frac{\vec{P}}{P}\right) = \frac{\vec{P}.\vec{Q}}{P} \times \frac{\vec{P}}{P}.$$

লক্ষণীয়ঃ উপাংশ একটি ভেক্টর রাশি।

দুটি ভেক্টর লম্ব হওয়ার শর্ত	ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ নির্ণয়
$\vec{P}$, $\vec{Q}$ লম্ব হলে $\vec{P}\cdot\vec{Q} = 0$	$\theta = \cos^{-1}\frac{\vec{P}.\vec{Q}}{PQ}$

01. $\vec{F} = (-2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k})$N force is applied on a particle and the particle moves from $(3, -4, -2)$ to $(-2, 3, 5)$. What is the amount of work done? **[IUT'18-19]**

(a) 7 J (b) 59 J (c) 49 J (d) 59 N

Solution: (b); $\vec{r} = (-2-3)\hat{i} + (3+4)\hat{j} + (5+2)\hat{k} = -5\hat{i} + 7\hat{j} + 7\hat{k}$

$\therefore \vec{F}.\vec{r} = (-2\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}).(-5\hat{i} + 7\hat{j} + 7\hat{k}) = 10 + 21 + 28 = 59\,J$

Alternate: $F = \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = 5.385$; $r = \sqrt{5^2 + 7^2 + 7^2} = 11.09$ $\therefore W = Fr = 59J$

02. যদি $\vec{P} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ এবং $\vec{Q} = -\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ হলে, $\vec{P}$ এবং $\vec{Q}$ এর মধ্যবর্তী কোণ কত? **[KUET'16-17]**

(a) 111.01° (b) 110.49° (c) 101.49° (d) 69° (e) 68.98°

সমাধান: **(a);** $\cos\theta = \frac{\vec{P}\cdot\vec{Q}}{|\vec{P}||\vec{Q}|} = \frac{-9}{\sqrt{45}\sqrt{14}}$ $\therefore \theta = \cos^{-1}\left(\frac{-9}{\sqrt{45}\sqrt{14}}\right) = 111.01°$

03. For what value of "A" the vectors $a\hat{i} - 2\hat{i} + \hat{k}$ and $2a\hat{i} - a\hat{j} - 4\hat{k}$ will be perpendicular to each other? **[KUET'14-15, RUET' 09-10]**

(a) 3, 1 (b) 2, 4 (c) −2, 1 (d) 3, 2 (e) 1, 5

সমাধান: **(c);** $2a^2 + 2a - 4 = 0 \Rightarrow a = 1, -2$

04. দুইটি ভেক্টর $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ হলে, এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ কত? **[KUET'13-14, 12-13, 09-10]**

(a) 77° (b) 78° (c) 79° (d) 80° (e) 81°

সমাধান: **(c);** $\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|A||B|} = \frac{4}{\sqrt{9}.\sqrt{49}}$ $\therefore \theta = \cos^{-1}\left(\frac{4}{21}\right) = 79°$

05. একটি কণার উপর $\vec{F} = (5\hat{i} - 6\hat{j} + 3\hat{k})$N বল প্রয়োগ করার ফলে কণাটির $\vec{d} = (3\hat{i} + d_y\hat{j} + 5\hat{k})$m সরণ হয়। d_y এর মান কত হলে সম্পাদিত কাজের পরিমাণ শূন্য হবে? **[BUET'12-13]**

(a) 0 (b) 5 (c) 6 (d) −6

সমাধান: **(b);** $W = \vec{F}.\vec{d} \Rightarrow 0 = 5.3 + (-6).d_y + 3.5 \Rightarrow 0 = 15 - 6d_y + 15 \Rightarrow 6d_y = 30 \Rightarrow d_y = 5$

06. $A \cdot B = 0$. A ও B এর মধ্যবর্তী কোণ কত? **[BUTEX'11–12]**

(a) 0° (b) 90° (c) 30° (d) 45°

সমাধান: **(b)**; $\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$ বা, $AB\cos\theta = 0 \therefore \cos\theta = 0 \therefore \theta = 90^\circ$

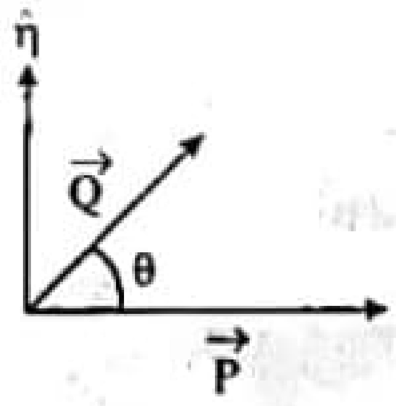
07. $\hat{i}+\hat{j}$ ভেক্টরের দিকে $\underline{A} = 2\hat{i}+3\hat{j}$ ভেক্টরের উপাংশ নির্ণয় কর। **[BUET'19-20]**

সমাধান: ধরি, $\underline{A} = 2\hat{i}+3\hat{j}\,;\ \underline{B} = \hat{i}+\hat{j}\,;\ \hat{b} = \frac{\vec{B}}{|\underline{B}|} = \frac{\hat{i}+\hat{j}}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{i}+\hat{j})$

$\therefore$ নির্ণেয় উপাংশ $= \hat{b}\frac{\underline{A}.\underline{B}}{|\underline{B}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{i}+\hat{j}).\frac{1}{\sqrt{2}}.(2+3) = \frac{5}{2}\,(\hat{i}+\hat{j})$

Question Type-06: ভেক্টরের ক্রস গুণন

Formula & Concept:



➢ $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ এর মধ্যবর্তী কোণ θ হলে $\vec{P}\times\vec{Q} = PQ\sin\theta\,\hat{\eta}$;

লক্ষণীয়ঃ $\vec{P}\times\vec{Q} = -\vec{Q}\times\vec{P}$

◆ তলের লম্ব বরাবর একক ভেক্টর নির্ণয়ঃ

➢ $\vec{A}, \vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ θ হলে, $\vec{A}\times\vec{B} = AB\sin\theta\hat{\eta}$; [$\hat{\eta}$ একক ভেক্টরের দিক হবে $\vec{A}$ হতে $\vec{B}$ এর দিকে ডানহাতি স্ক্রু ক্ষুদ্রতর কোণে ঘুরালে স্ক্রুটি যেদিকে অগ্রসর হবে]

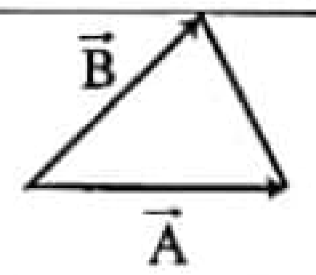
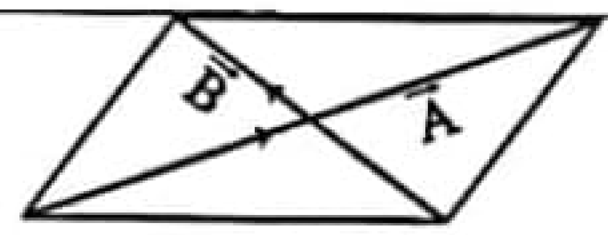
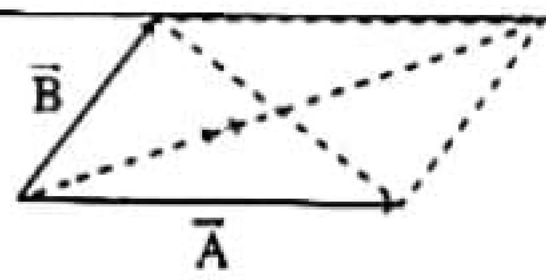
$\therefore \hat{\eta} = \pm\frac{(\vec{A}\times\vec{B})}{|\vec{A}\times\vec{B}|} = \pm\frac{\vec{A}\times\vec{B}}{AB\sin\theta}$

◆ দুটি ভেক্টর সমান্তরাল হওয়াঃ

➢ $\vec{A} \parallel \vec{B}$ তখনই হবে যখন $\vec{A}\times\vec{B} = \vec{0}$ হবে।

➢ যদি দুটি ভেক্টর, $\vec{A} = A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}$ ও $\vec{B} = B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k}$ পরস্পর সমান্তরাল হয় তাহলে, $\frac{A_x}{B_x} = \frac{A_y}{B_y} = \frac{A_z}{B_z}$ হবে।

◆ ক্ষেত্রফল নির্ণয়ঃ

➢ $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দ্বারা কোন ত্রিভুজের দুটি সন্নিহিত বাহু নির্দেশিত হলে ঐ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\,|\vec{A}\times\vec{B}|$	
➢ $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দ্বারা কোন সামান্তরিকের দুটি কর্ণ নির্দেশিত হলে সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\,|\vec{A}\times\vec{B}|$	
➢ $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দ্বারা কোন সামান্তরিকের দুটি সন্নিহিত বাহু নির্দেশিত হলে এ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= |\vec{A}\times\vec{B}|$	

◆ আয়তন নির্ণয়ঃ

➢ একটি সামান্তরিক ঘনবস্তুর বাহু তিনটি $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ হলে এর আয়তন $= \vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}.(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}.(\vec{a}\times\vec{b})$

➢ যদি তিনটি ভেক্টর সমতলীয় হয় তবে ঐ ঘনবস্তুর আয়তন শূন্য (V = 0)

$$V = \vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}.(\vec{c}\times\vec{a}) = \vec{c}.(\vec{a}\times\vec{b}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_z & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

01. একটি সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহু দুইটি যথাক্রমে $A = (3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k})$m এবং $B = (2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k})$m। সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল কত? [KUET'18-19]

(a) 5.92m^2 (b) 2.76m^2 (c) 10.39m^2 (d) 2.96m^2 (e) 2.56m^2

সমাধান: **(a)**; $|\vec{A} \times \vec{B}| = 5.92\text{m}^2$

02. দুইটি ভেক্টরের স্কেলার গুণফল 20 একক। এদের ভেক্টর গুণফলের মান $6\sqrt{2}$ একক। ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ কত?

(a) $30°$ (b) $24°2'$ (c) $22°59'$ (d) $22°14'$ (e) $23°58'$

সমাধান: **(c)**; $\tan\theta = \frac{AB\sin\theta}{AB\cos\theta} = \frac{|\vec{A} \times \vec{B}|}{\vec{A}.\vec{B}} = \frac{6\sqrt{2}}{20} \therefore \theta = \tan^{-1}\frac{6\sqrt{2}}{20} = 22°59'$ [KUET'17-18, 11-12]

03. m এর মান কত হলে $\vec{A} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ এবং $\vec{B} = m\hat{i} + 6\hat{j} - 10\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর সমান্তরাল হবে? [SUST'16-17, KUET'10-11]

(a) -2 (b) -1 (c) 1 (d) 2 (e) 3

সমাধান: **(a)**; A||B হলে, $\frac{1}{m} = -\frac{3}{6} = \frac{5}{-10} \therefore m = -2$

04. একটি সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর যার কর্ণদ্বয় যথাক্রমে $\underline{A} = 3\underline{i} - 2\underline{j} + 5\underline{k}$ এবং $\underline{B} = \underline{i} + 6\underline{j} - \underline{k}$। [KUET'14-15]

(a) 10.95 units (b) 17.6 units (c) 17.66 units (d) 15.74 units (e) 18.97 units

সমাধান: **(c)**; $\vec{A} \times \vec{B} = -28\hat{i} + 8\hat{j} + 20\hat{k} \therefore |\vec{A} \times \vec{B}| = \sqrt{28^2 + 8^2 + 20^2} = 35.327$

$\therefore \text{Area} = \frac{|\vec{A} \times \vec{B}|}{2} = 17.66\text{sq. unit.}$

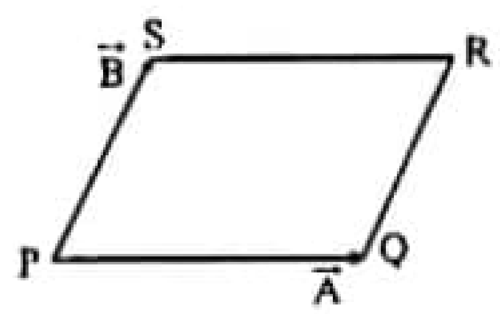
05. যদি $A = 5\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$ এবং $B = 3\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় একটি সামান্তরিকের সন্নিহিত দুইটি বাহু নির্দেশ করলে তার ক্ষেত্রফল কত? [RUET'14-15]

(a) $\sqrt{7}$ (b) $2\sqrt{7}$ (c) $\sqrt{14}$ (d) $2\sqrt{14}$ (e) None

সমাধান: **(c)**; $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 5 & -4 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k} \therefore$ ক্ষেত্রফল $= \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

06. কোনটি সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল? [BUTEX'12-13]

(a) $\frac{1}{2}|\bar{A} \times \bar{B}|$ (b) $\bar{A} \times \bar{B}$ (c) $\frac{1}{2}(\bar{A} \times \bar{B})$ (d) $|\bar{A} \times \bar{B}|$



সমাধান: **(d)**; ক্রস গুণনের ক্ষেত্রে আমরা জানি, সামন্তরিকের ক্ষেত্রফল $= |\vec{A} \times \vec{B}|$

07. নিম্নলিখিত ভেক্টর প্রোডাক্টের মান বাহির কর: $(2\hat{i} - 3\hat{j}).|(\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) \times (3\hat{i} - \hat{k})|$ [CUET'11-12]

(a) 4 (b) 8 (c) -4 (d) None of these

সমাধান: **(d)**; $(2\hat{i} - 3\hat{j}).|(\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) \times (3\hat{i} - \hat{k})|$

$(\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) \times (3\hat{i} - \hat{k}) \rightarrow$ vector; $|(\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}) \times (3\hat{i} - \hat{k})| \rightarrow$ মান; $(2\hat{i} - 3\hat{j}).$মান $\rightarrow$ Possible না

Scaler Product এর জন্য ভেক্টর. ভেক্টর $(\vec{A}.\vec{B})$ হতে হবে।

08. $\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}, \vec{B} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ এবং $\vec{C} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ তিনটি ভেক্টর। দেখাও যে, ভেক্টর তিনটি একই সমতলে অবস্থিত। [BUTEX'04-05]

সমাধান: $\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}, \vec{B} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}, \vec{C} = \hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$

শর্তানুসারে, $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 2(-10 + 12) - (15 - 4) - 1(-9 + 2) = 4 - 11 + 7 = 0$

$\therefore$ ভেক্টরত্রয় সমতলীয়। (দেখানো হল)

09. সমমানের দুটি ভেক্টর $\vec{a}$ এবং $\vec{b}$ পরস্পর সমান্তরাল হলে, ভেক্টর দুটি কত হবে? [BUTEX'04-05]

সমাধান: $\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$, $\vec{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}$

ভেক্টর দুটি সমান্তরাল হলে $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$ হবে। আবার, এদের মান সমান বলে, ভেক্টরদ্বয় সমান হবে।

10. (a) কোন কোন শর্তাধীনে $\bar{A}$ ও $\bar{B}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব এবং সমান্তরাল হয়? [BUET'00-01]

(b) $\bar{B} = 5\hat{i} + 6\hat{j} + 9\hat{k}$ এর দিকে $\bar{A} = 10\hat{i} + 8\hat{j} - 8\hat{k}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ বের কর।

সমাধান: (a) $\bar{A}$ ও $\bar{B}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হবে যদি তাদের স্কেলার বা ডট গুণফল শূন্য হয় এবং তাদের কোনটি যদি নাল ভেক্টর না হয়। $\therefore \bar{A}.\bar{B} = 0$ হবে।

$\bar{A}$ ও $\bar{B}$ ভেক্টর পরস্পর সমান্তরাল হবে যদি তাদের ভেক্টর বা ক্রস গুণফল শূন্য হয় এবং তাদের কোনটি যদি নাল ভেক্টর না হয়।

$\therefore \bar{A}\times\bar{B} = 0$ হবে।

(b) $\bar{B}$ এর দিকে $\bar{A}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ = $A\cos\theta$; $\bar{A}.\bar{B} = AB\cos\theta$

$$\Rightarrow A\cos\theta = \frac{\bar{A}.\bar{B}}{|\bar{B}|} = \frac{50+48-72}{\sqrt{142}} \left[|\bar{B}| = \sqrt{5^2+6^2+9^2}\right] = \frac{26}{\sqrt{142}}$$

Question Type-07: গ্রেডিয়েন্ট, ডাইভারজেন্স এবং কার্ল

Formula & Concept:

- ভেক্টর অপারেটর সংক্রান্তঃ
  - ভেক্টর অপারেটর $\vec{\nabla} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$
  - স্কেলার ক্ষেত্র $\varphi(x,y,z)$ এর গ্রেডিয়েন্ট, $\text{grad}\,\varphi = \vec{\nabla}\varphi = \hat{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z}$
  - ভেক্টর ক্ষেত্র $\vec{V}(x,y,z) = V_1\hat{i} + V_2\hat{j} + V_3\hat{k}$ এর ডাইভারজেন্স, $\text{div}\,\vec{V} = \vec{\nabla}.\vec{V} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}$
  - ভেক্টর ক্ষেত্র $\vec{V}(x,y,z) = V_1\hat{i} + V_2\hat{j} + V_3\hat{k}$ এর কার্ল, $\text{curl}\,\vec{V} = \vec{\nabla}\times\vec{V} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{vmatrix}$

01. If $\varphi = 2xy^4 - x^2z$, then determine $\vec{\nabla}\varphi$ at point $(2,-1,2)$. [IUT'21-22]

(a) $-(16\hat{i} + 16\hat{j} + 4\hat{k})$ (b) $-(6\hat{i} + 4\hat{j} + 4\hat{k})$ (c) $-(6\hat{i} + 6\hat{j} + 4\hat{k})$ (d) $-(6\hat{i} + 16\hat{j} + 4\hat{k})$

Solution: (d); $\phi = 2xy^4 - x^2z$

$\vec{\nabla}\phi = \left(\frac{\delta}{\delta x}\hat{i} + \frac{\delta}{\delta y}\hat{j} + \frac{\delta}{\delta z}\hat{k}\right)(2xy^4 - x^2z)$

$= \frac{\delta\phi}{\delta x}\hat{i} + \frac{\delta\phi}{\delta y}\hat{j} + \frac{\delta\phi}{\delta z}\hat{k} = (2y^4 - 2zx)\hat{i} + (2.4x.y^3)\hat{j} + (-x^2)\hat{k}$

$\vec{\nabla}\phi(2,-1,2) = \{2(-1)^4 - 2.2.2\}\hat{i} + \{2.4.2(-1)^3\}\hat{j} + (-2^2)\hat{k}$

$= \{2-8\}\hat{i} + \{-16\}\hat{j} - 4\hat{k} = -6\hat{i} - 16\hat{j} - 4\hat{k} = -(6\hat{i} + 16\hat{j} + 4\hat{k})$

02. A solenoidal vector field is given as $V = (5x + 2y)i + (my - z)j + (x - 4z)k$. What is the value of m?

(a) -2 (b) -1 (c) 1 (d) 3 [IUT'21-22]

Solution: (b); $\vec{V} = (5x + 2y)\hat{i} + (my - z)\hat{j} + (x - 4z)\hat{k}$

$\therefore \vec{\nabla}.\vec{V} = \left(\frac{\delta}{\delta x}\hat{i} + \frac{\delta}{\delta y}\hat{j} + \frac{\delta}{\delta z}\hat{k}\right)\{(5x + 2y)\hat{i} + (my - z)\hat{j} + (x - 4z)\hat{k}\} = 5 + m - 4 = 1 + m$

For being solenoidal, $\vec{\nabla}.\vec{V} = 0 \Rightarrow 1 + m = 0 \Rightarrow m = -1$

03. a, b ও c এর মান কত হলে $\vec{V} = (x + y + az)\hat{i} + (bx + 3y - z)\hat{j} + (3x + cy + z)\hat{k}$ ভেক্টরটি অঘূর্ণনশীল হবে?

(a) $(3, 1, 1)$ (b) $(3, -1, -1)$ (c) $(-3, 1, -1)$ (d) $(3, 1, -1)$ [CUET'15-16]

সমাধান: (d); $\nabla \times \vec{V} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x + y + az & bx + 3y - z & 3x + cy + z \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow \hat{i}(c + 1) + \hat{j}(a - 3) + \hat{k}(b - 1) = 0 \Rightarrow a = 3, b = 1, c = -1$

04. p এর মান কত হলে ভেক্টর $\vec{v} = (5x + 2y)\hat{i} + (2py - z)\hat{j} + (x - 2z)\hat{k}$ সলিনয়ডাল হবে? [RUET'15-16]

সমাধান: $\vec{V} = (5x + 2y)\hat{i} + (2py - z)\hat{j} + (x - 2z)\hat{k}$

$\vec{\nabla}.\vec{V} = \frac{\partial(5x+2y)}{\partial x} + \frac{\partial(2py-z)}{\partial y} + \frac{\partial(x-2z)}{\partial z} = 0 \Rightarrow 5 + 2p - 2 = 0 \Rightarrow p = -\frac{3}{2}$ (Ans.)

Question Type-08: বিবিধ

01. কোন দুটি স্কেলার রাশি? [BUTEX'14-15]

(a) তড়িৎক্ষেত্র, তড়িৎ বিভব (b) গতিশক্তি, বেগ

(c) কেন্দ্রীয় বল, তাপমাত্রা (d) চার্জ, কম্পাঙ্ক

সমাধান: (d); তড়িৎ ক্ষেত্র, বেগ, বল ভেক্টর রাশি

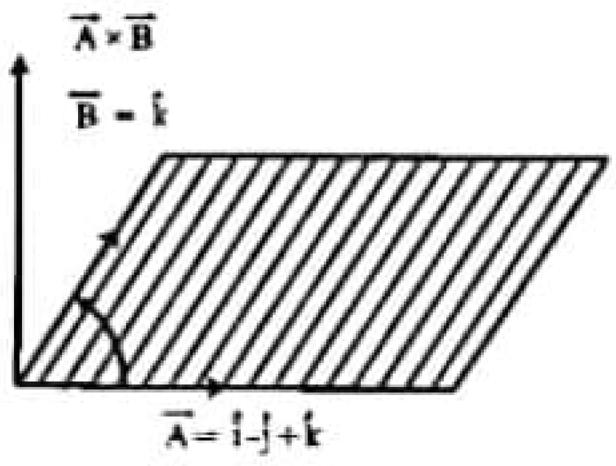
02. এমন একটি একক ভেক্টর নির্ণয় কর, যা xy তলের সমান্তরাল এবং $\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরের সমকোণে অবস্থিত। [BUTEX'20-21]

সমাধান: xy তলের সমান্তরাল অর্থ z অক্ষের উপর লম্ব।

$\therefore (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ এবং $\hat{k}$ এর সাথে সমকোণে অবস্থিত ভেক্টর

$\vec{P} = (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) \times \hat{k} = -\hat{j} - \hat{i}$

$\therefore$ $(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$এবং $\hat{k}$ এর সাথে লম্ব বরাবর একক ভেক্টর $= \frac{\pm(\hat{i}+\hat{j})}{\sqrt{1+1}} = \pm\frac{(\hat{i}+\hat{j})}{\sqrt{2}}$ (Ans)



03. $\vec{A}.\vec{A}$ এবং $\vec{A} \times \vec{A}$ এর মান নির্ণয় কর। [BUTEX'18-19]

সমাধান: $\bar{A}.\bar{A} = |\bar{A}| \cos 0^\circ . |\bar{A}| \cos 0^\circ = |\bar{A}|^2; \vec{A} \times \vec{A} = |\bar{A}||\bar{A}| \sin 0^\circ \ \hat{\eta} = \underline{0}$ ($\underline{0}$ হল শূন্য ভেক্টর)