# BUET Admission Test 2016-2017

## গণিত

01. $\frac{1+2i}{1-3i}$ কে $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ আকারে প্রকাশ কর।

**সমাধান:** $\frac{1+2i}{1-3i} = \frac{(1+2i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = \frac{1+3i+2i+6i^2}{1^2+3^2} = \frac{-5+5i}{10}$ $[\because i^2 = -1] = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

$\therefore r = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ; $\theta = \tan^{-1}\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = 180^\circ - \tan^{-1}1 = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

$\therefore \frac{1+2i}{1-3i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\theta + i\sin\theta)$ যেখানে, $\theta = 135^\circ$

02. $y = x^2 - 4x + 7$ ফাংশনের স্কেচ অংকন কর। একই সাথে ফাংশনের ডোমেন, রেঞ্জ, সিমেট্রিক লাইন, সর্বোচ্চ/সর্বনিম্ন মান এবং x –অক্ষ ও y –অক্ষ হতে কর্তিত অংশ বের কর।

**সমাধান:** $y = x^2 - 4x + 7 \Rightarrow y = 3 + (x-2)^2 \Rightarrow (x-2)^2 = (y-3)$ ..... (i)

(i) নং সমীকরণের গ্রাফ হবে পরাবৃত্তাকার যার শীর্ষবিন্দু (2,3), অক্ষরেখা y অক্ষের সমান্তরাল। যেহেতু $x^2$ এর সহগ ধনাত্মক। সুতরাং গ্রাফটি হবে উর্ধ্বমূখী (upward)।

$x = 0$ হলে, $y = 7$ অর্থাৎ গ্রাফটি y অক্ষকে (0,7) বিন্দুতে ছেদ করবে।

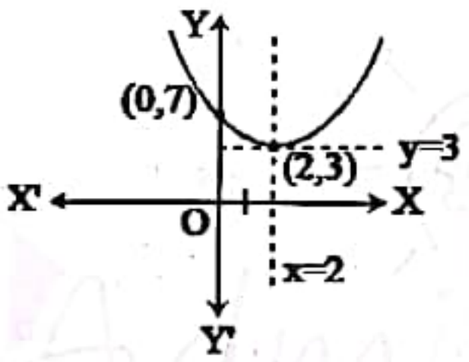
আবার, $y = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 7 = 0$ সমীকরণের পৃথায়ক, $b^2 - 4ac = 16 - 28 < 0$

অর্থাৎ গ্রাফটি x অক্ষকে ছেদ বা স্পর্শ কোনটাই করবে না।

ফাংশনটির ডোমেন $= \mathbb{R}$ , রেঞ্জ $= [3, \infty)$

ফাংশনটি $x = 2$ সরলরেখার সাপেক্ষে প্রতিসম

$\therefore$ সিমেট্রিক লাইন, $x = 2$ । ফাংশনটির সর্বোচ্চ মান নির্ণয় সম্ভব নয়।




ফাংশনটির সর্বনিম্ন মান $= 3$

x অক্ষ হতে কর্তিত অংশ $= 0$

y অক্ষের ধনাত্মক দিক থেকে কর্তিত অংশ $= 7$

03. সমাধান কর: $\frac{1}{|5x+2|} \geq 5$

**সমাধান:** $\frac{1}{|5x+2|} \geq 5 \Rightarrow |5x+2| \leq \frac{1}{5} \Rightarrow -\frac{1}{5} \leq 5x+2 \leq \frac{1}{5} \Rightarrow -\frac{1}{5} - 2 \leq 5x \leq \frac{1}{5} - 2$

$\Rightarrow -\frac{11}{5} \leq 5x \leq -\frac{9}{5} \Rightarrow -\frac{11}{25} \leq x \leq -\frac{9}{25}\left[x \neq -\frac{2}{5}\right]$

04. যদি $A = \begin{bmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ এবং $AB = \begin{bmatrix}10 & 17\\ 4 & 7\end{bmatrix}$ হয় তবে B ম্যাট্রিক্স এর উপাদানসমূহ বের কর।

**সমাধান:** ধরি, $B = \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$

এখন, $AB = \begin{bmatrix}10 & 17\\ 4 & 7\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10 & 17\\ 4 & 7\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}4a+3c & 4b+3d\\ 2a+c & 2b+d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10 & 17\\ 4 & 7\end{bmatrix}$

$\therefore \begin{matrix}4a+3c=10 & 4b+3d=17\\ 2a+c=4 & 2b+d=7\end{matrix}$

সমাধান করে পাই, $\begin{matrix}a=1 & b=2\\ c=2 & d=3\end{matrix}$ $\therefore B = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}$

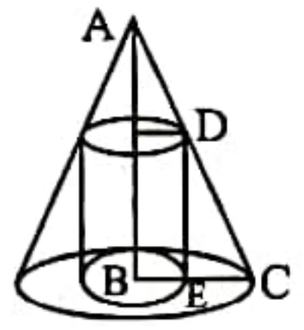
**Alternate Solution:** $A = \begin{bmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ $\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ 1 & -2\end{bmatrix}$

এখন, $AB = \begin{bmatrix}10 & 17\\ 4 & 17\end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1}.AB = A^{-1}.\begin{bmatrix}10 & 17\\ 4 & 7\end{bmatrix} \Rightarrow I.B = B = A^{-1}.\begin{bmatrix}10 & 17\\ 4 & 7\end{bmatrix}; [\because A^{-1}.A = I, I.B = B]$

$= \begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ 1 & -2\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}10 & 17\\ 4 & 7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix}$

05. একটি সমবৃত্তভূমিক কোণকের মধ্যে একটি খাড়া বৃত্তাকার সিলিন্ডার স্থাপন করা আছে। সিলিন্ডারের বক্রতল বৃহত্তম হতে হলে দেখাও যে, সিলিন্ডারের ব্যাসার্ধ কোণকের ভূমির ব্যাসার্ধের অর্ধেক।

সমাধান: ধরি, সিলিন্ডারের ব্যাসার্ধ $x$ , কোণকের ভূমির ব্যাসার্ধ $r$ এবং উচ্চতা $h$ ।




এখন, $\Delta ABC$ ও $\Delta DEC$ সদৃশ। $\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EC} = \frac{DE}{BC-BE} \Rightarrow \frac{h}{r} = \frac{DE}{r-x} \therefore DE = \frac{h}{r}(r-x)$

সিলিন্ডারের বক্রতলের ক্ষেত্রফল $A = 2\pi x \cdot DE = 2\pi x \cdot \frac{h}{r}(r-x) = 2\pi xh - \frac{2\pi hx^2}{r}$

$A$ বৃহত্তম হলে, $\frac{dA}{dx} = 0 \Rightarrow 2\pi h - \frac{4\pi h}{r}x = 0 \Rightarrow 1 - \frac{2x}{r} = 0 \Rightarrow \frac{2x}{r} = 1 \ \therefore x = \frac{r}{2}$

আবার, $\frac{d^2A}{dx^2} = -\frac{4\pi h}{r} < 0 \ \therefore x = \frac{r}{2}$ হলে সিলিন্ডারের বক্রতল বৃহত্তম হবে।

06. $\left(2x^2 + \frac{P}{x^3}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে $x^5$ এবং $x^{15}$ এর সহগ সমান হলে $P$ এর ধনাত্মক মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $\left(2x^2 + \frac{P}{x^3}\right)^{10}$ এর বিস্তৃতিতে, $(r+1)$ তম পদ, $T_{r+1} = {}^{10}C_r.(2x^2)^{10-r}.\left(\frac{P}{x^3}\right)^r = {}^{10}C_r.2^{10-r}.x^{20-5r}.P^r$

$x^5$ এর জন্য, $20-5r=5 \ \therefore r=3$ ; $x^{15}$ এর জন্য, $20-5r=15 \ \therefore r=1$

প্রশ্নমতে, ${}^{10}C_3.2^{10-3}.P^3 = {}^{10}C_1.2^{10-1}.P \Rightarrow 12P^2 = 4 \Rightarrow P^2 = \frac{1}{3} \ \therefore P = \frac{1}{\sqrt{3}}$ [P এর ধনাত্মক মান বিবেচনা করে]

07. একটি বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যা $x$-অক্ষকে স্পর্শ করে এবং $(1,1)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং যার কেন্দ্র প্রথম চতুর্ভাগে $x+y=3$ রেখার উপর অবস্থিত।

সমাধান: ধরি, বৃত্তটির সমীকরণ: $x^2+y^2+2gx+2fy+g^2=0$ ..... (i)

বৃত্তটি $(1,1)$ বিন্দুগামী। $\therefore 1+1+2g+2f+g^2=0 \Rightarrow 2+2(g+f)+g^2=0$ ..... (ii)

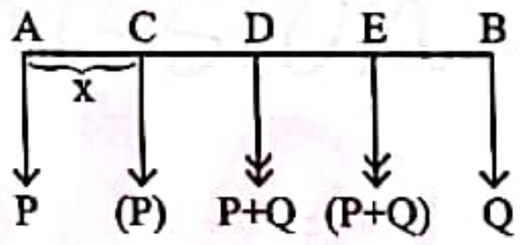
বৃত্তটির কেন্দ্র $x+y=3$ এর উপর অবস্থিত। $\therefore -g-f=3 \Rightarrow g+f=-3$ ..... (iii)

$\therefore$ (ii) $\Rightarrow 2+2.(-3)+g^2=0 \Rightarrow g^2=4 \ \therefore g=-2$ [$\because$ কেন্দ্র ১ম চতুর্ভাগে]

(iii) $\Rightarrow -2+f=-3 \ \therefore f=-1 \ \therefore$ বৃত্তটি $x^2+y^2-4x-2y+4=0$

08. $P$ এবং $Q$ দুটি সমান্তরাল ও সদৃশ বল। $P$ বলের ক্রিয়া রেখাকে এর সমান্তরাল বরাবর $Q$ বলের দিকে $x$ দূরত্বে সরানো হলে এদের লব্ধি $d$ দূরত্বে সরে যায়। প্রমাণ কর যে, $d = \frac{Px}{P+Q}$

সমাধান: ১ম ক্ষেত্রে, $P.AD = Q.BD \Rightarrow \frac{Q}{P} = \frac{AD}{BD} \Rightarrow \frac{P+Q}{P} = \frac{AB}{BD} \ \therefore BD = \frac{P.AB}{P+Q}$ ..... (i)




২য় ক্ষেত্রে, $P.CE = Q.BE \Rightarrow \frac{Q}{P} = \frac{CE}{BE} \Rightarrow \frac{Q+P}{P} = \frac{BC}{BE} \ \therefore BE = \frac{P.BC}{P+Q}$ ..... (ii)

(i) $-$ (ii) $\Rightarrow BD - BE = DE = d = \frac{Px}{P+Q}$

09. দুটি সরলরেখা $(-1,2)$ বিন্দু দিয়ে যায় এবং তারা $3x-y+7=0$ রেখার সাথে $45^\circ$ কোণ উৎপন্ন করে। রেখা দুটির সমীকরণ নির্ণয় কর এবং তাদের সমীকরণ হতে দেখাও যে, তারা পরস্পর লম্বভাবে অবস্থান করে।

সমাধান: ধরি, সরলরেখাদ্বয় $y-2=m(x+1)$ ; $3x-y+7=0$ এর ঢাল $=3$

$\tan 45^\circ = \pm\frac{m-3}{1+3m} \Rightarrow 1 = \pm\frac{m-3}{1+3m} \Rightarrow 1+3m = \pm(m-3)$

$\Rightarrow m-3 = 1+3m \ \therefore m=-2$

$\Rightarrow -m+3 = 1+3m \ \therefore m = \frac{1}{2}$

$m=-2$ হলে, রেখাটি $y-2=-2(x+y) \ \therefore 2x+y=0$

$m=\frac{1}{2}$ হলে, রেখাটি $y-2=\frac{1}{2}(x+1) \ \therefore x-2y+5=0$

যেহেতু, রেখাদ্বয়ের ঢাল $-2$ ও $\frac{1}{2}$ এবং $-2.\frac{1}{2} = -1 \ \therefore$ রেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব।

10. দুজন ছাত্রকে একটি দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধান করতে বলা হল। একজন ছাত্র সমীকরণের $x$ এর সহগটি ভুল লিখে 2 এবং 6 এই বীজ দুটি পেল। অপর ছাত্র ধ্রুবক পদটি ভুল লিখে 2 এবং $-9$ এই বীজ দুটি পেল। নির্ভুল সমীকরণের বীজগুলি নির্ণয় কর।

সমাধান: 2 ও 6 মূলবিশিষ্ট সমীকরণ: $(x-2)(x-6)=0 \ \therefore x^2-8x+12=0$

যেহেতু, সমীকরণটির $x$ এর সহগ ভুল। $\therefore$ প্রকৃত সমীকরণের $x^2$ এর সহগ 1 এবং ধ্রুবপদ 12

আবার, $(x-2)(x+9)=0 \Rightarrow x^2+7x-18=0 \ \therefore$ প্রকৃত সমীকরণের $x$ এর সহগ 7 ।

$\therefore$ প্রকৃত সমীকরণ $x^2+7x+12=0 \Rightarrow x^2+3x+4x+12=0 \Rightarrow (x+3)(x+4)=0 \ \therefore x=-3,-4$

11. $\tan\theta + \tan\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right) + \tan\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)$ কে $\tan 3\theta$ এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

সমাধান: $\tan\theta + \tan\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right) + \tan\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right) = \tan\theta + \frac{\tan\frac{\pi}{3}+\tan\theta}{1-\tan\frac{\pi}{3}\tan\theta} + \frac{\tan\frac{2\pi}{3}+\tan\theta}{1-\tan\frac{2\pi}{3}\tan\theta}$

$= \tan\theta + \frac{\sqrt{3}+\tan\theta}{1-\sqrt{3}\tan\theta} + \frac{-\sqrt{3}+\tan\theta}{1+\sqrt{3}\tan\theta} = \tan\theta + \frac{\sqrt{3}+3\tan\theta+\tan\theta+\sqrt{3}\tan^2\theta-\sqrt{3}+3\tan\theta+\tan\theta-\sqrt{3}\tan^2\theta}{(1-\sqrt{3}\tan\theta)(1+\sqrt{3}\tan\theta)}$

$= \tan\theta + \frac{8\tan\theta}{1-3\tan^2\theta} = \frac{\tan\theta-3\tan^3\theta+8\tan\theta}{1-3\tan^2\theta} = \frac{3(3\tan\theta-\tan^3\theta)}{1-3\tan^2\theta} = 3\tan 3\theta$

12. যদি $y = f(x)$ এবং $x = \frac{1}{z}$ হয়, তবে দেখাও যে, $\frac{d^2f}{dx^2} = z^4\frac{d^2y}{dz^2} + 2z^3\frac{dy}{dz}$.

সমাধান: $x = \frac{1}{z} \Rightarrow 1 = -\frac{1}{z^2}\cdot\frac{dz}{dx} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -z^2$

এখন, $\frac{df}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$ [differentiale করে]

$= \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} = -z^2\frac{dy}{dz}$ $\therefore \frac{d^2f}{dx^2} = -z^2\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\right) - \frac{dy}{dz}\cdot\frac{d}{dx}(z^2) = -z^2\frac{d^2y}{dz^2}\cdot\frac{dz}{dx} - 2z\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}$

$\therefore \frac{d^2f}{dx^2} = z^4\frac{d^2y}{dz^2} + 2z^3\frac{dy}{dz}$ (showed)

13. একটি পাত্রে নয়টি বল আছে, যার মধ্যে দুটি লাল, তিনটি নীল এবং চারটি কালো। তিনটি বল পাত্রটি হতে দৈবভাবে নেয়া হল। (a) বল তিনটি ভিন্ন রংয়ের এবং (b) বল তিনটি একই রংয়ের হওয়ার সম্ভাবনা কত?

সমাধান: (a) বল তিনটি ভিন্ন রঙের হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{{}^2C_1\times{}^3C_1\times{}^4C_1}{{}^9C_3} = \frac{2}{7}$

(b) বল তিনটি একই (অর্থাৎ নীল বা কালো) হওয়ার সম্ভাবনা $= \frac{{}^3C_3}{{}^9C_3} + \frac{{}^4C_3}{{}^9C_3} = \frac{5}{84}$

14. দুটি নৌকা প্রত্যেকে 5km/h বেগে চলে 3km/h বেগে প্রবাহিত 550m চওড়া একটি নদী পাড়ি দিতে চায়। একটি নৌকা ন্যূনতম পথে ও অপরটি ন্যূনতম সময়ে নদীটি পাড়ি দেয়। তারা একই সময়ে যাত্রা করলে তাদের অপর পাড়ে পৌঁছানোর সময়ের পার্থক্য নির্ণয় কর।

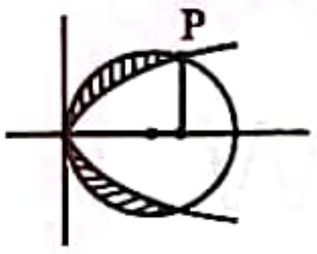
সমাধান: ন্যূনতম পথে পাড়ি দিতে প্রয়োজনীয় সময়, $t_1 = \frac{0.55}{\sqrt{5^2-3^2}}h = 0.1375h$

ন্যূনতম সময়ে পাড়ি দিতে প্রয়োজনীয় সময়, $t_2 = \frac{0.55}{5}h = 0.11h$

$\therefore \Delta t = (0.1375 - 0.11)h = 0.0275h = 99\ \text{sec}$

15. $y^2 = ax$ এবং $x^2 + y^2 = 4ax$ রেখাদ্বয়ের অন্তর্বর্তী এলাকার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান:




ছেদবিন্দু নির্ণয়: $x^2 + ax = 4ax \Rightarrow x = 0, 3a$ $\therefore y = 0, \pm\sqrt{3}a$ $\therefore P \equiv (3a, \sqrt{3}a)$

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= 2\times\int_0^{3a}\left(\sqrt{4ax-x^2} - \sqrt{ax}\right)dx = 2\times\int_0^{3a}\left(\sqrt{4a^2-(x-2a)^2} - \sqrt{ax}\right)dx$

$= 2\times\left[\left(\frac{x-2a}{2}\right)\sqrt{4ax-x^2} + 2a^2\sin^{-1}\left(\frac{x-2a}{2a}\right) - \frac{2}{3}\sqrt{a}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^{3a} = 2\times\left(\frac{a}{2}\times\sqrt{3}a + 2a^2\times\frac{\pi}{6} - 2\sqrt{3}a^2 + \pi a^2\right)$

$= \left(\frac{2}{3}\pi - 3\sqrt{3} + 2\pi\right)a^2 = \left(\frac{8}{3}\pi - 3\sqrt{3}\right)a^2$

16. $f(x) = \sin 3x$ হলে $\lim_{h\to0}\frac{f(x+3h)-f(x)}{3h}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $\lim_{h\to0}\frac{f(x+3h)-f(x)}{3h} = \lim_{h\to0}\frac{\sin 3(x+3h)-\sin 3x}{3h} = \lim_{h\to0}\frac{\sin(3x+9h)-\sin 3x}{3h} = \lim_{h\to0}\frac{2\cos\frac{6x+9h}{2}\sin\frac{9h}{2}}{3h}$

$= \lim_{h\to0}\frac{3\sin\frac{9h}{2}\cos\frac{6x+9h}{2}}{\frac{9h}{2}} = 3.1.\cos\frac{6x+0}{2} = 3\cos 3x$

17. ABC ত্রিভুজের শীর্ষত্রয় A(1,2,3), B(2,3,1) এবং C(3,1,2) হলে, ভেক্টর পদ্ধতিতে ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: $\overrightarrow{OA} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $\overrightarrow{OB} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$, $\overrightarrow{OC} = 3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$

$\overrightarrow{AB} = \hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$; $\overrightarrow{AC} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$ $\therefore \Delta ABC = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$

এখন, $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \hat{i}(-1-2) - \hat{j}(-1+4) + \hat{k}(-1-2) = -3\hat{i} - 3\hat{j} - 3\hat{k}$

$\therefore \Delta ABC = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + (-3)^2}$ বর্গ একক $= \frac{3\sqrt{3}}{2}$ বর্গ একক

18. CALCULUS শব্দটির বর্ণগুলোর সবগুলোকে একত্রে নিয়ে কত প্রকারে সাজানো যায়? এই বিন্যাসগুলোর কতগুলোতে প্রথমে ও শেষে একই অক্ষর থাকবে?

সমাধান: CALCULUS শব্দে বর্ণ 8 টি; এর মধ্যে C দুটি, L দুটি, U দুটি, একটি করে A, S $\therefore$ মোট বিন্যাস $= \frac{8!}{2!2!2!}$

প্রথমে ও শেষে একই অক্ষর রাখা যায় 3 ভাবে (CC, LL, UU)

$\therefore$ প্রথমে ও শেষে একই অক্ষর রেখে বিন্যাস $= 3 \times \frac{6!}{2!2!}$

19. যদি $\sin x + \sin y = a$ এবং $\cos x + \cos y = b$ হয় তবে দেখাও যে $\sin\frac{1}{2}(x-y) = \pm\frac{1}{2}\sqrt{4 - a^2 - b^2}$ ।

সমাধান: $\sin x + \sin y = a$ ..... (i); $\cos x + \cos y = b$ ..... (ii)

$(i)^2 + (ii)^2 \Rightarrow 1 + 1 + 2\sin x \sin y + 2\cos x \cos y = a^2 + b^2 \Rightarrow 2 + 2(\cos x \cos y + \sin x \sin y) = a^2 + b^2$

$\Rightarrow 2 + 2\cos(x-y) = a^2 + b^2 \Rightarrow 2 + 2\left\{1 - 2\sin^2\frac{1}{2}(x-y)\right\} = a^2 + b^2 \Rightarrow 4 - 4\sin^2\frac{1}{2}(x-y) = a^2 + b^2$

$\Rightarrow \sin^2\frac{1}{2}(x-y) = \frac{4-a^2-b^2}{4}$ $\therefore \sin\frac{1}{2}(x-y) = \pm\frac{1}{2}\sqrt{4 - a^2 - b^2}$ (Showed)

20. মান নির্ণয় কর: $\int \frac{e^{m\tan^{-1}x}}{(1+x^2)^2}\,dx$

সমাধান: ধরি, $\tan^{-1}x = \theta$ $\therefore x = \tan\theta$ $\therefore dx = \sec^2\theta\,d\theta$

$\therefore I = \int \frac{e^{m\theta}}{(1+\tan^2\theta)^2}\sec^2\theta\,d\theta = \int \frac{e^{m\theta}}{\sec^2\theta}d\theta = \int e^{m\theta}\cos^2\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\int e^{m\theta}(1+\cos 2\theta)d\theta$

$= \frac{1}{2}\int e^{m\theta}d\theta + \frac{1}{2}\int e^{m\theta}\cos 2\theta d\theta$ $\left[\because \int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx)\right]$

$= \frac{1}{2m}e^{m\theta} + \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{m\theta}}{m^2+2^2}\{m\cos 2\theta + 2\sin 2\theta\} + c$

$= \frac{1}{2m}e^{m\tan^{-1}x} + \frac{e^{m\tan^{-1}x}}{m^2+4}\{m\cos(2\tan^{-1}x) + 2\sin(2\tan^{-1}x)\} + c$

## পদার্থবিজ্ঞান

21. 3kg ভরের বস্তুর উপর একটি বল ক্রিয়াশীল আছে। বস্তুটির অবস্থান সমীকরণ $x = 3t - 4t^2 + t^3$, যেখানে x এর মান মিটারে এবং t এর মান সেকেন্ডে। $t = 0$ হতে $t = 4$ সেকেন্ড সময়ে বলটি দিয়ে বস্তুর উপর কৃত কাজের পরিমাণ নির্ণয় কর।

সমাধান: $x = 3t - 4t^2 + t^3 \Rightarrow v = 3 - 8t + 3t^2 \Rightarrow a = -8 + 6t$

$dW = Fdx = madx$

এখানে, $dx = vdt = (3 - 8t + 3t^2)dt$ $\therefore W = \int_0^4 3(-8+6t)(3-8t+3t^2)dt = 528J$

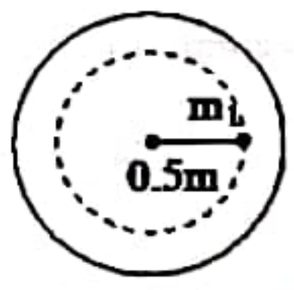
বিকল্প: $x = 3t - 4t^2 + t^3 \Rightarrow v = 3 - 8t + 3t^2$

$t = 0s$ এ বেগ $= 3ms^{-1}$, $t = 4s$ এ বেগ $= 3 - 8\times 4 + 3\times 4^2 = 19$

$\therefore$ কৃতকাজ = গতিশক্তির পরিবর্তন $= \frac{1}{2}m(v_4^2 - v_0^2) = \frac{1}{2}\times 3(19^2 - 3^2) = 528J$

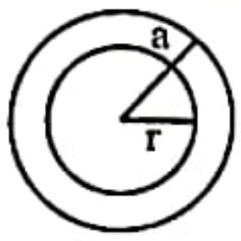
22. একটি সুষম গোলকের ভর $1\times 10^4$kg এবং ব্যাসার্ধ 1m । গোলক কর্তৃক গোলকের কেন্দ্র হতে 0.5m দূরত্বে অবস্থিত $m_1$ ভরের একটি কণার উপর মহাকর্ষ বলের মান কত? [$G = 6.673\times 10^{-11}\,Nm^2/kg^2$]

সমাধান: গোলকের ঘনত্ব $= \frac{1\times 10^4}{\frac{4}{3}\pi}$ $\therefore$ চিত্রে দেখানো কল্পিত গোলকটির ভর $= \frac{\frac{4}{3}\pi(0.5)^3\times 1\times 10^4}{\frac{4}{3}\pi} = \frac{10^4}{8}$kg




$\therefore$ কণাটির উপর মহাকর্ষ বল $= 6.673\times 10^{-11}\frac{10^4\times m_1}{8\times(0.5)^2} = 3.3365\times 10^{-7}m_1N$

**Alternate:**




; $E = \frac{GM}{a^3}r \Rightarrow F = Em = \frac{GMm_1}{a^3}r = \frac{6.673\times10^{-11}\times10^4\times m_1}{8\times(0.5)^2}N = 3.3365\times10^{-7}m_1\ N$

23. কল্পনা কর যে, পৃথিবীর ব্যাস বরাবর একটি সুড়ঙ্গ খনন করা হল। একটি বস্তুকে সুরঙ্গের এক প্রান্ত থেকে ছেড়ে দেয়া হল এবং বস্তুটি সরল ছন্দিত স্পন্দনে স্পন্দিত হতে লাগলো। পৃথিবীকে একটি সুষম গোলক মনে করে এবং বাধাদানকারী সকল বল উপেক্ষা করে পৃথিবীর কেন্দ্র থেকে $5\times10^5$m দূরত্বে বস্তুটির ত্বরণ ও দোলনের পর্যায়কাল নির্ণয় কর। [দেয়া আছে, পৃথিবীর ব্যাসার্ধ $R = 6.4\times10^6$m এবং $g = 9.8 m/s^2$]

সমাধান: পৃথিবীর কেন্দ্র হতে x m দূরে বস্তুটির অভিকর্ষজ ত্বরণ, $\vec{a} = -\frac{4}{3}\pi G\rho\vec{x}$

এখানে x ব্যাসার্ধ ভেক্টর $\vec{a}$ এর দিক $\vec{x}$ এর বিপরীত দিকে।

$\therefore a \propto -x$ $\therefore$ বস্তুটির সরল ছন্দিত স্পন্দনে চলতে থাকবে। $a = -\omega^2x$ $\therefore \omega^2 = \frac{4}{3}\pi G\rho$

আবার, ভূ-পৃষ্ঠে অভিকর্ষজ ত্বরণ, $g = \frac{4}{3}\pi G\rho R$ ; [শুধু মান বিবেচনা করে]

$\Rightarrow \frac{4}{3}\pi G\rho = \frac{g}{R} \Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{R} \therefore \omega = \sqrt{\frac{g}{R}} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{R}} \therefore T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = 5077.58s$

পৃথিবীর কেন্দ্র হতে $5\times10^5$m দূরত্বে বস্তুর ত্বরণ, $a = \frac{4}{3}\pi G\rho x = \omega^2x = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \times 5\times10^5 ms^{-2} = 0.77 ms^{-2}$

**Alternate:** $F = -kr$ ... ... ... (i); $F = -\frac{GMm}{r^2} = -\left(\frac{4\pi mG\rho}{3}\right)r$ ... ... ... (ii)

$\therefore K = \frac{4\pi m\rho G}{3}$ $\therefore T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{4\rho\pi mG}} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$ $\left[g = \frac{4}{3}\pi R\rho G \Rightarrow \rho = 5.5\times10^3 kgm^{-3}\right]$

$\therefore T = 5077.58$ s (Ans.)

24. একটি সুতায় দুটি তরঙ্গের মিলনের ফলে যে স্থিরতরঙ্গের সৃষ্টি হয় তার সমীকরণ হচ্ছে $y = 5\sin\frac{\pi x}{3}\cos 40\pi t$, যেখানে x ও y হল সে.মি. –এ এবং t হল সেকেন্ডে। (a) তরঙ্গ দুটির প্রত্যেকটির বিস্তার ও বেগ কত? (b) দুটি পর পর নিষ্পন্দ বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব কত?

সমাধান: স্থির তরঙ্গের সাধারণ সমীকরণ, $y = 2a\sin\left(\frac{2\pi vt}{\lambda}\right)\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$

যেখানে, মূল তরঙ্গদ্বয়, $y_1 = a\sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt - x)$; $y_2 = a\sin\frac{2\pi}{\lambda}(vt + x)$ ; $y = 5\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)\cos(40\pi t)$

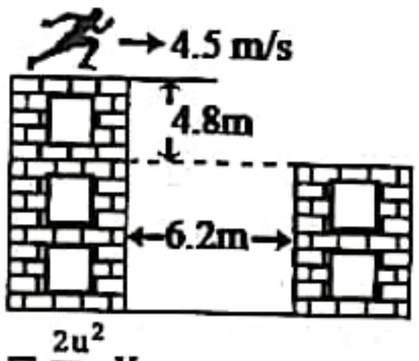
এখানে, sine এবং cosine উভয়েই sinusoidal function । তাই প্রদত্ত স্থির তরঙ্গের সমীকরণের x এবং t এর সহগ সাধারণ সমীকরণের সাথে তুলনা করা যায়।

$\therefore \frac{2\pi}{\lambda}v = 40\pi, \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{3}, 2a = 5$

(a) তরঙ্গ দুটির প্রত্যেকের বিস্তার $= \frac{5}{2}$ cm, বেগ $= 120 cms^{-1}$

(b) $\lambda = 6$cm $\therefore$ পরপর দুটি নিস্পন্দ বিন্দুর দূরত্ব $= \frac{\lambda}{2} = 3$cm (Ans)

25. নিচের চিত্রে চলচ্চিত্রের একজন স্টান্টম্যান একটি উঁচু ভবনের ছাদে অনুভূমিকভাবে দৌড়িয়ে পার্শ্ববর্তী একটি অপেক্ষাকৃত কম উঁচু ভবনের ছাদে লাফ দেবে। এই কাজটি করার পূর্বে সে বুদ্ধিমানের মত তোমাকে প্রশ্ন করলো যে, এটি করা তার পক্ষে সম্ভব হবে কি না। ছাদে তার দৌড়ের সর্বোচ্চ গতিবেগ 4.5m/s হলে সে এটা করতে পারবে কি? সেক্ষেত্রে তোমার উপদেশ কী হবে? "ঝাপ দাও"! অথবা "ঝাপ দিও না"!




সমাধান: অনুভূমিকভাবে নিক্ষিপ্ত প্রাসের ক্ষেত্রে, $x^2 = \frac{2u^2}{g}y$

$y = 4.8$m , $u = 4.5 ms^{-1}$ হলে, $= \sqrt{\frac{2u^2}{g}y} = 4.454$ , যা 6.2 m অপেক্ষা কম।

$\therefore$ আমার উপদেশ "ঝাঁপ দিও না।"

**Alternate:** $x = \sqrt{\frac{2g}{g}} \times v = \sqrt{\frac{2\times4.8}{9.8}} \times 4.5m = 4.454m < 6.2m$

26. প্রতিটি 1mm ব্যাসার্ধের আটটি বৃষ্টির ফোঁটা 5cm/s প্রান্তিক বেগে পতনশীল। যদি আটটি ফোঁটা একত্রিত হয়ে একটি বড় ফোঁটায় পরিণত হয়, তাহলে নির্গত শক্তির পরিমাণ নির্ণয় কর। [দেয়া আছে, পানির পৃষ্ঠটান $= 7.4 \times 10^{-2} \text{N/m}$]

সমাধান: বড় ফোটার ব্যাসার্ধ R হলে, $8 \times \frac{4}{3}\pi r^3\rho = \frac{4}{3}\pi R^3\rho \Rightarrow R = 2r = 2\text{mm}$

$\therefore$ পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফলের পরিবর্তনের কারণে নির্গত শক্তি $= (8 \times 4\pi r^2 - 4\pi R^2) \times T = 3.72 \times 10^{-6}\text{J}$

[Note: প্রান্তবেগ, $v_T \propto r^2$ $\therefore$ গতিশক্তি, $\propto (r^2)^2 = \propto r^4$

এখানে, গতিশক্তি বৃদ্ধি পাবে। তাই প্রান্তবেগের পরিবর্তনের কারণে কোন শক্তি মুক্ত হবে না।]

27. একটি দেয়াল হতে 4.8cm ব্যাসের একটি এলুমিনিয়ামের দণ্ড অনুভূমিকভাবে 5.3cm প্রক্ষেপিত আছে। দণ্ডটির শেষ প্রান্তে 1200kg ভরের একট বস্তু ঝোলানো হল। এলুমিনিয়ামের ব্যবর্তন গুণাংক $3 \times 10^{10}\text{N/m}^2$ । দণ্ডটির ভরকে উপেক্ষা করে (a) দণ্ডটির উপর ব্যবর্তন পীড়ন, এবং (b) দণ্ডটির প্রান্তের উল্লম্ব বিচ্যুতি নির্ণয় কর।

সমাধান: ব্যবর্তন গুণাঙ্ক, $\gamma = \frac{F}{A\theta} \Rightarrow \theta = \frac{1200\times9.8}{3\times10^{10}\times\pi\left(\frac{4.8\times10^{-2}}{2}\right)^2} = 2.166 \times 10^{-4}$ radian

(a) ব্যবর্তন পীড়ন $= \frac{F}{A} = \frac{1200\times9.8}{\pi\left(\frac{4.8\times10^{-2}}{2}\right)^2} = 6.5 \times 10^6\text{Nm}^{-2}$

(b) উল্লম্ব বিচ্যুতি $= 5.3 \times \tan\theta = 1.148 \times 10^{-3}\text{cm}$ [$\theta$ এর মান বসানোর সময় ক্যালকুলেটরে রেডিয়ান Mode এ নিতে হবে।]

28. এক পরমাণু বিশিষ্ট একটি আদর্শ গ্যাসকে 17°C তাপমাত্রায় হঠাৎ এর মূল আয়তনের এক-দশমাংশ আয়তনে সংকুচিত করা হল। সংকোচনের পর তাপমাত্রা কত হবে?

সমাধান: $T_1V_1^{\gamma-1} = T_2V_2^{\gamma-1} \Rightarrow 290 \times V_1^{\gamma-1} = T_2\left(\frac{V_1}{10}\right)^{\gamma-1}$ | $T_1 = 17°\text{C} = 290\text{K}, \gamma = 1.67$

$\therefore T_2 = 290 \times (10)^{1.67-1}\text{K} = 1356.432\text{K} = 1083.432°\text{C}$

29. ইয়ং এর ব্যতিচারের দ্বি-চিড় পরীক্ষায় $4.69 \times 10^{14}\text{Hz}$ কম্পাঙ্কের লাল আলো ব্যবহারের ফলে ডোরা প্রস্থ $2.4 \times 10^{-4}\text{m}$ হয়। যদি $7.5 \times 10^{14}\text{Hz}$ কম্পাঙ্কের নীল আলো ব্যবহার করা হয় তাহলে ডোরা প্রস্থের পরিবর্তন কত হবে?

সমাধান: লাল আলোর জন্য ডোরা প্রস্থ, $d_r = \frac{\lambda_r D}{2a}$

নীল আলোর জন্য ডোরা প্রস্থ, $d_b = \frac{\lambda_b D}{2a}$

$\frac{d_r}{d_b} = \frac{\lambda_r}{\lambda_b}$ $\therefore d_b = \frac{\lambda_b}{\lambda_r} \times d_r = \frac{\frac{c}{f_b}}{\frac{c}{f_r}} \times d_r = \frac{f_r}{f_b} \times d_r = \frac{4.69\times10^{14}}{7.5\times10^{14}} \times 2.4 \times 10^{-4}\text{m} = 1.5 \times 10^{-4}\text{m}$

$\therefore$ ডোরা প্রস্থের পরিবর্তন $= d_r - d_b = 9 \times 10^{-5}\text{ m}$

30. একটি উত্তল লেন্স থেকে 90cm দূরে একটি বস্তুকে রাখা হলে 45cm দূরের পর্দায় একটি বাস্তব প্রতিচ্ছবি তৈরি করে। এই লেন্সের গা ঘেঁষে একটি অবতল লেন্স লাগানো হলে আরও 75cm দূরে একটি বাস্তব প্রতিচ্ছবি সৃষ্টি হয়। অবতল লেন্সের ফোকাস দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, উত্তল লেন্সের ফোকাস দূরত্ব f এবং অবতল লেন্সের ফোকাস দূরত্ব f' ।

$\therefore \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{90} + \frac{1}{45} = \frac{1}{30}$

ধরি, সমবায় লেন্সের ফোকাস দূরত্ব F ।

$\therefore \frac{1}{F} = \frac{1}{90} + \frac{1}{(45+75)} \Rightarrow \frac{1}{f} + \frac{1}{f'} = \frac{7}{360} \Rightarrow \frac{1}{f'} = \frac{7}{360} - \frac{1}{30} = -\frac{1}{72}$ $\therefore f' = -72\text{cm}$

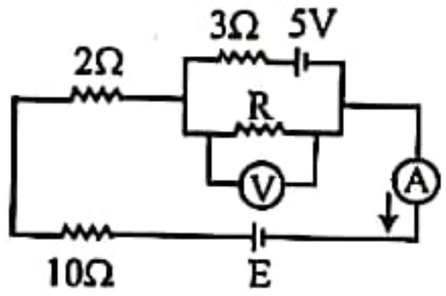
31. 10g ওজনের একটি লোহার পেরেককে কিছুক্ষণ একটি বার্নার শিখায় উত্তপ্ত করা হল। উত্তপ্ত পেরেকটিকে 10°C তাপমাত্রায় 100g পানিতে ডুবানো হল। এতে পানির তাপমাত্রা বৃদ্ধি পেয়ে 20°C হল। পানিতে ডুবানোর পূর্বে পেরেকের তাপমাত্রা নির্ণয় কর। [লোহার আপেক্ষিক তাপমাত্রা $= 0.11\text{kcal/kg°C}$]

সমাধান: ধরি, নির্ণেয় তাপমাত্রা θ°C

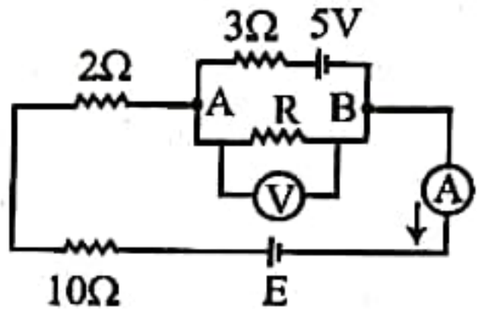
গৃহীত তাপ = বর্জিত তাপ $\therefore 10 \times 0.11 \times (\theta - 20) = 100 \times 1 \times (20 - 10) \Rightarrow 1.1\theta - 22 = 1000$

$\therefore \theta = \frac{1022}{1.1} = 929.09°\text{C}$

32. নিচের চিত্রে প্রদর্শিত বর্তনীতে voltmeter এর পাঠ 5V, ammeter এর পাঠ 2A এবং বিদ্যুৎ প্রবাহের দিক তীর চিহ্নের মাধ্যমে প্রদর্শিত হয়েছে। (a) রোধক R এর মান ও (b) E এর মান নির্ণয় কর।




সমাধান: A এবং B বিন্দুর মাঝে বিভব পার্থক্য 5V হওয়ায় 3Ω রোধের মধ্য দিয়ে তড়িৎ প্রবাহিত হয়না। হলে 3Ω রোধে বিভব পতন হত এবং A ও B এর মাঝে বিভব পার্থক্য 5V এর বেশি হত।




∴ পুরো 2A তড়িৎ R এর মধ্য দিয়ে প্রবাহিত হয়। ∴ $R = \frac{5}{2} = 2.5\Omega$

এবং E = বর্তনীতে মোট বিভব পতন $= 2(10 + 2 + 2.5) = 29$ Volts (Ans.)

33. $1mm^2$ প্রস্থচ্ছেদ বিশিষ্ট একটি সিলভারের তার দিয়ে 1.5A বিদ্যুৎ প্রবাহিত করা হল এবং এই তারের লম্বভাবে 0.1 Tesla মাত্রার চৌম্বক ক্ষেত্র প্রয়োগ করা হল। এই তারে আবেশিত Hall ভোল্টেজ নির্ণয় কর। [দেয়া আছে, 1 Tesla = $10^4$ Oersted এবং সিলভারের মুক্ত ইলেকট্রন ঘনত্ব $= 5.85 \times 10^{28}$ per $m^3$]

সমাধান: [Note: প্রশ্নে খুব সম্ভবত $1mm^2$ ক্ষেত্রফলের বর্গাকার প্রস্থচ্ছেদের তারের কথা বলা হয়েছে। যদি ধরে নেয়া হয় যে "1mm বর্গাকার প্রস্থচ্ছেদ" এর প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য 1mm, তাহলে প্রস্থচ্ছেদের ক্ষেত্রফল $1mm \times 1mm = 1mm^2$ হয়।

এক্ষেত্রে, $d = 1mm, t = 1mm = 10^{-3}m$]

$V_H = \frac{BI}{ntq} = \frac{0.1\times1.5}{5.85\times10^{28}\times10^{-3}\times1.6\times10^{-19}} = 1.61 \times 10^{-8}V$

34. রেডিয়ামের অর্ধায়ু 1620 বছর। 1 gram ভরের রেডিয়াম হতে প্রতি সেকেন্ডে কতগুলো রেডিয়াম পরমাণু নির্গত হবে? [রেডিয়ামের পারমাণবিক ভর $= 226kg/kmol$, অ্যাভোগাড্রো নম্বর $= 6.02 \times 10^{26}$ atoms/kmol]

সমাধান: 1gm রেডিয়ামে পরমাণুর সংখ্যা, $N = \frac{1\times10^{-3}}{226} \times 6.02 \times 10^{26} = 2.66 \times 10^{21}$

$\therefore \frac{dN}{dt} = \lambda N = \frac{\ln 2}{t_{\frac{1}{2}}} \times N = \frac{\ln 2}{1620\times365\times86400} \times 2.66 \times 10^{21} = 3.61 \times 10^{10}$ পরমাণু/ sec

35. নির্ধারিত তরঙ্গের একটি বিকিরণ কোন ধাতবপৃষ্ঠের উপর আপতিত হলে নিবৃত্তি বিভবের মান 4.8V হয়। উক্ত ধাতবপৃষ্ঠে দ্বিগুণ তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের একটি বিকিরণ আপতিত হলে নিবৃত্তি বিভবের মান 1.6V পাওয়া যায়। ধাতবপৃষ্ঠটির সূচন তরঙ্গ দৈর্ঘ্য প্রথমে আপতিত তরঙ্গ দৈর্ঘ্যের সাপেক্ষে কত হবে?

সমাধান: $\frac{hc}{\lambda} = \phi_0 + eV_1 \Rightarrow \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda_0} = eV_1$ ..... (i) এবং $\frac{hc}{2\lambda} - \frac{hc}{\lambda_0} = eV_2$ ..... (ii)

(i) ÷ (ii) $\Rightarrow \frac{\frac{1}{\lambda}\ \frac{1}{\lambda_0}}{\frac{1}{2\lambda}\ \frac{1}{\lambda_0}} = \frac{V_1}{V_2} = 3 \Rightarrow \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0} = \frac{3}{2\lambda} - \frac{3}{\lambda_0} \Rightarrow \frac{1}{2\lambda} = \frac{2}{\lambda_0} \Rightarrow \lambda_0 = 4\lambda$

36. মনে কর একজন পিতা তার কন্যা থেকে 20 বছরের বড়। তিনি পৃথিবী থেকে অতি দ্রুতগতির মহাকাশযানে দূরবর্তী কোন গ্রহে যেতে চাইলেন। উক্ত গ্রহে তার যেতে 2 বছর এবং আসতে 2 বছর লাগল (তার নিজের কাঠামোতে মাপা)। পৃথিবীতে এসে তিনি দেখলেন তার কন্যা থেকে তিনি 20 বছর ছোট হয়ে গেছেন। এ যাত্রায় মহাকাশযানটির বেগ কত হবে?

সমাধান: $\Delta t_0 = 4$ বছর $\Delta t = 44$ বছর $= (20 + 20 + 4)$ বছর

$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow 44 = \frac{4}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow 1 - \frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{1}{11}\right)^2 \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = 1 - \left(\frac{1}{11}\right)^2 \therefore v = \sqrt{1-\left(\frac{1}{11}\right)^2}\, c = 2.9876 \times 10^8 ms^{-1}$

37. পারদের বাষ্প 140 nm তরঙ্গদৈর্ঘ্যের একটি ফোটন শুষে নিয়ে পরবর্তীতে দুটি ফোটন নিঃসরণ করে। একটি ফোটন এর তরঙ্গদৈর্ঘ্য 180.5 nm হলে অপর ফোটনটির তরঙ্গদৈর্ঘ্য কত? $[1nm = 10^{-9}m]$

সমাধান: শক্তির সংরক্ষণশীলতা অনুসারে, $\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda_1} + \frac{hc}{\lambda_2} \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \therefore \frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_2} \therefore \lambda_1 = 6.2395 \times 10^{-7}m$

38. একটি সাধারণ নিঃসরক বিবর্ধকের প্রবাহ লাভ 70 হয়। যদি নিঃসরক প্রবাহ 8.8 mA হয়, তাহলে সংগ্রাহক এবং পীঠ প্রবাহের মান নির্ণয় কর। ট্রানজিস্টরটি যখন সাধারণ পীঠ বিবর্ধক হিসাবে কাজ করে, তখন প্রবাহ লাভ কত?

সমাধান: $\left(\frac{I_C}{I_B}\right)_{CE} = 70 \Rightarrow I_C = 70I_B \Rightarrow I_E = I_B + I_C \Rightarrow I_E = 71I_B \Rightarrow I_B = \frac{8.8}{71} = \frac{44}{355}$ mA

এবং $I_C = 70 \times \frac{44}{355} = \frac{616}{71}$ mA $\therefore \left(\frac{I_C}{I_E}\right)_{CB} = \alpha = \frac{\beta}{1+\beta} \left[\beta = \left(\frac{I_C}{I_B}\right)_{CE}\right] = 0.986$ (Ans.)

39. পানির উপরিতলে পানির ঘনত্ব $1.03 \times 10^3 kg/m^3$ হলে 800 atm চাপ গভীরতায় পানির ঘনত্ব কত হবে? [দেওয়া আছে, পানির সংনম্যতা $= 45.8 \times 10^{-11} Pa^{-1}$ এবং $1atm = 1.013 \times 10^5 Pa$]

সমাধান: $B = \frac{PV}{v} \therefore v = \frac{P}{B}V = 0.037V$; $V' = V - v = 0.9629V$ | $\frac{1}{B} = 45.8 \times 10^{-11} Pa^{-1}$

যেহেতু, ভর অপরিবর্তিত থাকবে। $\rho \propto \frac{1}{V}$

$\therefore V\rho = V'\rho' \therefore \rho' = \frac{V\rho}{V'} = \frac{V}{0.9629V} \times 1.03 \times \frac{10^3 kg}{m^3} = 1069.7\ kg/m^3$

40. একটি হাইড্রোজেন পরমাণুর প্রথম ইলেকট্রনের কক্ষপথের ব্যাসার্ধ 0.5Å । এই কক্ষপথে ইলেকট্রনটি $2.2 \times 10^6 m/s$ সমগতিতে চলমান। এই ইলেকট্রনের গতির ফলে নিউক্লিয়াসের কেন্দ্রে সৃষ্ট চৌম্বক ক্ষেত্রের মান কত? [দেয়া আছে, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} wb/A.m$ এবং ইলেকট্রনের চার্জ $= 1.6 \times 10^{-19} C$]

সমাধান: $B = \frac{\mu_0 I}{2r}$ | $e = 1.6 \times 10^{-19} C,\ v = 2.2 \times 10^6 ms^{-1}, r = 0.5 \times 10^{-10} m$

এখানে, I = ঘূর্ণন কম্পাঙ্ক × চার্জ $= \frac{v}{2\pi r} \times e \therefore B = \frac{\mu_0 ve}{4\pi r^2} = 14.08T$

## রসায়ন

41. (a) 4d উপশক্তিস্তরের অর্বিটালগুলোর জন্য n, l ও m এর মানের তালিকা লিখ।

(b) প্রধান কোয়ান্টাম সংখ্যা $n = 3$ হলে ঐ শক্তিস্তরে সর্বাধিক কয়টি ইলেকট্রন থাকতে পারে?

সমাধান: (a) $n = 4,\ l = 2,\ m = -2, -1, 0, +1, +2$

(b) $2n^2 = 2.3^2 = 18$ টি ইলেকট্রন

42. একটি সার কারখানা থেকে অ্যামোনিয়া গ্যাস নিঃসরিত হয়ে পাশের মৎস চাষের একটি পুকুরের স্বচ্ছ পানিতে দ্রবীভূত হল। যদি দ্রবীভূত অ্যামোনিয়ার ঘনমাত্রা 0.01M এবং বিয়োজন ধ্রুবক $K_b = 1.80 \times 10^{-5}$ হয় তাহলে পুকুরের পানির pH কত হবে? পুকুরটি মৎস চাষের উপযুক্ত হবে কি?

সমাধান: $pOH = -\log(\sqrt{K_b C}) = 3.372$; $pH = 14 - 3.372 = 10.628$

∴ পুকুরটির পানি অধিক ক্ষারীয় বলে এটি মৎস্য চাষের উপযুক্ত নয়।

43. একটি লোহার টিউবকে জিংক দিয়ে প্রলেপ দিতে হবে। এ সম্পর্কিত নীচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও।

(a) কোন ধাতু ক্যাথোড হিসেব ব্যবহার করতে হবে?

(b) কোন ধাতু অ্যানোড হিসেব ব্যবহার করতে হবে?

(c) কোন ইলেকট্রোড থেকে বহিঃস্থ সার্কিটে ইলেকট্রন প্রবাহিত হবে?

(d) অ্যানোড-এ সংঘটিত ইলেকট্রোড বিক্রিয়াটি লিখ।

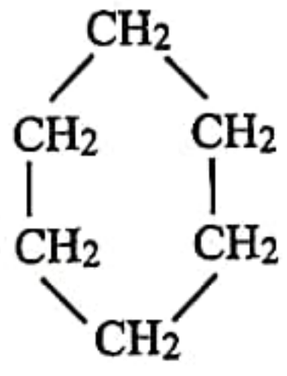
(e) ক্যাথোড-এ সংঘটিত ইলেকট্রোড বিক্রিয়াটি লিখ।

সমাধান: (a) লোহা (b) জিংক (c) অ্যানোড তথা জিংক ইলেকট্রোড

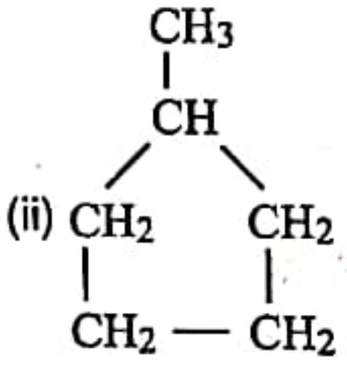
(d) $Zn \rightarrow Zn^{2+} + 2e$ (e) $Zn^{2+} + 2e \rightarrow Zn$

44. আণবিক সংকেত $C_6H_{12}$ থেকে সম্ভাব্য সব অ্যালিসাইক্লিক যৌগের সমানুসমূহের গঠন লিখ।

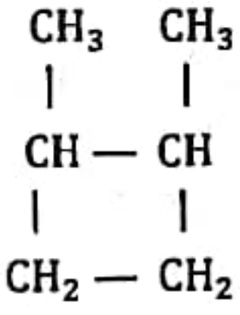
সমাধান: (i)



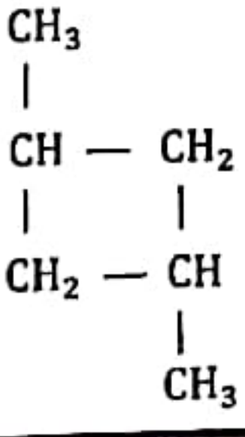
(ii)



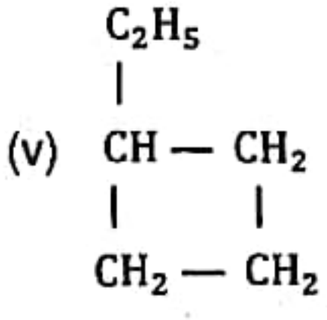
(iii)



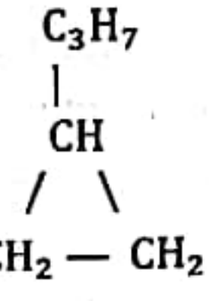
(iv)

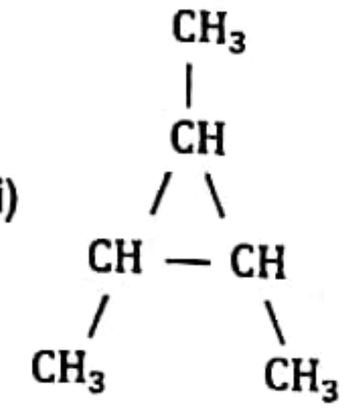


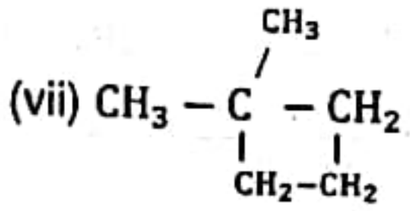
(v)

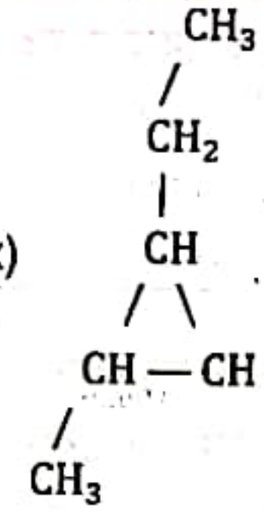


(vi)

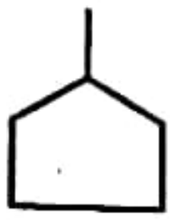
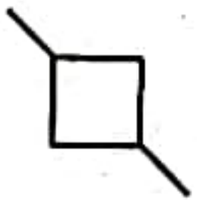


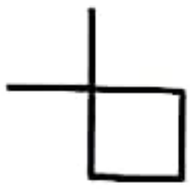
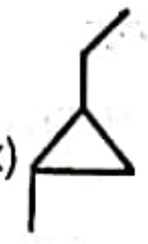
(vii) 

(vii) 

(ix) 

নিচের উপায়ে দ্রুত সমাধান করা যায়।

(i) (ii)  (iii) (iv)  (v)

(vi)  (vii) (viii) (ix) (x) 

45. হাইড্রোজেন আয়নের $5.6 \times 10^{-2}$M ঘনমাত্রা বিশিষ্ট 500mL আমের রসের সাথে হাইড্রোজেন আয়নের $4.4 \times 10^{-2}$ M ঘনমাত্রা বিশিষ্ট 500mL কমলালেবুর রস মিশ্রিত করে ফলের রসের একটি মিশ্রণ তৈরি করা হল। ফলের রসের মিশ্রণের pH কত হবে? ফলের রসের মিশ্রণটি পানযোগ্য হবে কি?

সমাধান: $[H^+] = \frac{5.6\times10^{-2}\times0.5+4.4\times10^{-2}\times0.5}{1}M = 0.05M \quad \left[\because S = \frac{V_1S_1+V_2S_2}{V_1+V_2}\right]$

$pH = -\log[H^+] = 1.301$, যা অতি অম্লীয় $\therefore$ ফলের রসটি পানযোগ্য হবে না।

46. অটোমোবাইল ইঞ্জিন থেকে নির্গত প্রাইমারি দূষক যা একটি সিরিজ আলোক বিক্রিয়ার মাধ্যমে সেকেন্ডারি দুষক তৈরি করে যা স্মগ (ধোঁয়া + কুয়াশা) তৈরি করার জন্য দায়ী। সেকেন্ডারী দূষক তৈরি করতে সংঘটিত বিক্রিয়াগুলো লিখ।

সমাধান: অটোমোবাইল হতে নির্গত প্রাইমারি দূষক; যেমন- হাইড্রোকার্বন, অ্যালডিহাইড, অ্যামিন, কিটোন প্রভৃতি আলোক রাসায়নিক বিক্রিয়ার মাধ্যম সেকেন্ডারি দূষক তৈরি করে।

যেমন, অ্যাসিটোন নিম্ন লিখিত আলোক রাসায়নিক বিক্রিয়ার মাধ্যমে সেকেন্ডারি দূষক PAN (পার অক্সাইল অ্যাসাইল নাইট্রেট) তৈরি করে। এ PAN ধোঁয়াশা সৃষ্টি করতে সহায়তা করে।

$$CH_3 - \overset{\overset{O}{\|}}{C} - CH_3 + h\nu \rightarrow \dot{C}H_3 + CH_3 - \dot{C}O$$

$$CH_3 - \overset{\overset{O}{\|}}{\dot{C}} + O_2 \rightarrow CH_3 - \overset{\overset{O}{\|}}{C} - O - \dot{O}$$

$$CH_3 - \overset{\overset{O}{\|}}{C} - O - \dot{O} + \dot{N}O_2 \rightarrow CH_3 - \overset{\overset{O}{\|}}{C} - O - O - NO_2(PAN)$$

47. মিথাইল অরেঞ্জ নির্দেশক ব্যবহার করে $50cm^3$ সোডিয়াম হাইড্রোক্সাইডকে প্রশমিত করতে $0.10mol/dm^3$ ঘনমাত্রার $22.3cm^3$ সালফিউরিক এসিড প্রয়োজন হয়। (a) প্রশমন বিক্রিয়াটি লিখ। (b) কত মোল সালফিউরিক এসিড প্রয়োজন? (c) $50cm^3$ সোডিয়াম হাইড্রোক্সাইড দ্রবণে কত মোল সোডিয়াম হাইড্রোক্সাইড আছে? (d) সোডিয়াম হাইড্রোক্সাইড দ্রবণের ঘনমাত্রা মোলারিটিতে নির্ণয় কর।

সমাধান: (a) $2NaOH + H_2SO_4 \rightarrow Na_2SO_4 + 2H_2O$

(b) সালফিউরিক এসিডের প্রয়োজনীয় মোল সংখ্যা, $n = VS = 22.3 \times 10^{-3} \times 0.1mol = 2.23 \times 10^{-3}mol$

(c) 1 mol $H_2SO_4 \equiv$ 2 mol NaOH

$\therefore 2.23 \times 10^{-3}$mol $H_2SO_4 \equiv (2 \times 2.23 \times 10^{-3})$mol NaOH $= 4.46 \times 10^{-3}$mol NaOH

(d) NaOH এর ঘনমাত্রা $= \frac{4.46\times10^{-3}}{50\times10^{-3}}M = 0.0892M$

48. নিচের বিক্রিয়াটি 298K তাপমাত্রায় স্বতঃস্ফূর্ত কিনা তা নির্ণয় কর।

$Co_{(s)} + Fe^{2+}_{(aq)} \rightleftharpoons Co^{2+}_{(aq)} + Fe_{(s)}$

[দেয়া আছে, $[Co^{2+}] = 0.15M$ ; $[Fe^{2+}] = 0.68M$ ; $E^0_{Co^{2+}/Co} = -0.28V$ ; $E^0_{Fe^{2+}/Fe} = -0.44V$]

সমাধান: $E_{cell} = E^0_{cell} - \frac{2.303RT}{nF}\log\frac{[Co^{2+}]}{[Fe^{2+}]} = -0.16 - \frac{2.303\times8.314\times298}{2\times96500}\log\frac{0.15}{0.68} = -0.14V$

$\therefore E_{cell} < 0$ $\therefore$ বিক্রিয়াটি স্বতঃস্ফূর্ত নয়।

$E^0_{cell} = E^0_{Co|Co^{2+}} + E^0_{Fe^{2+}|Fe}$
$= (0.28 - 0.44)V = -0.16V$

49. (a) NaCl এবং NaI এর মিশ্রিত দ্রবণে ব্রোমিন যোগ করলে কি ঘটে?

(b) দ্রবণে $Cl^-$ আয়নের উপস্থিতি কিভাবে নিশ্চিত করবে?

সমাধান: (a) $2NaCl + Br_2 \rightarrow$ No Reaction ; $2NaI + Br_2 \rightarrow 2NaBr + I_2$

(b) $Cl^- + AgNO_3 \xrightarrow{HNO_3} \underset{\text{সাদা}}{AgCl\downarrow} + NO_3^-$

$AgCl + 2NH_4OH \rightarrow \underset{\text{(দ্রবণীয়)}}{Ag(NH_3)_2Cl} + 2H_2O$

50. নিচের বিক্রিয়া স্কিমে নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও:

$CH_3\underset{A}{CH_2}CH_2OH \rightarrow B \rightarrow CH_3\underset{C}{CH_2}COOH \rightarrow D \xrightarrow{F} \underset{E}{CH_3CH_2CONH}\underset{CH_3}{|}$

(a) যৌগ A কে সরাসরি যৌগ C তে পরিণত করতে যে বিকারকগুলো ও অবস্থা প্রয়োজন তা লিখ।

(b) যৌগ A থেকে যৌগ C তে পরিণত হতে যৌগ B তৈরি হয়। যৌগ B এর সংকেত লিখ।

(c) যৌগ C অনার্দ্র অবস্থায় $PCl_5$ এর সাথে বিক্রিয়া করে যৌগ D তৈরি করা যেতে পারে। বিক্রিয়ার সমীকরণ লিখ।

(d) বিকারক F এর নাম লিখ।

সমাধান: (a) $CH_3CH_2CH_2OH \xrightarrow[[O]]{KMnO_4,\ H_2O_2} CH_3CH_2COOH$

(b) $CH_3CH_2CH_2OH \xrightarrow{[O]} CH_3CH_2CHO$

(c) $CH_3CH_2COOH \xrightarrow{PCl_5} CH_3CH_2COCl$

(d) $CH_3CH_2COCl \xrightarrow{H_2N-CH_3} CH_3CH_2ONH - CH_3$

51. (a) নিচের জৈব যৌগের রাসায়নিক নাম ও সংকেত লিখ।

(i) মার্স গ্যাস (ii) উড অ্যালকোহল (iii) এন্টিফ্রিজ (iv) মথবলস্ (v) ভিনেগারের প্রধান উপাদান

(b) নিচের এসিড দুটোর সংযুক্ত ক্ষার এর সংকেত লিখ।

(i) $H_2SO_3$ (ii) $C_2HO_4^-$

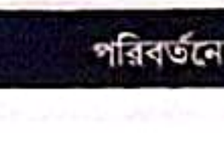
সমাধান: (a)

(i) Marsh gas – Methane gas – $H-\underset{H}{\overset{H}{\underset{|}{\overset{|}{C}}}}-H$

(ii) Wood alcohol – Methanol – $H-\underset{H}{\overset{H}{\underset{|}{\overset{|}{C}}}}-OH$

(iii) Antifreeze – Ethylene glycol – $\underset{OH}{\underset{|}{CH_2}}-\underset{OH}{\underset{|}{CH_2}}$

(iv) Mothballs – Napthalene –



(v) Vinegar – Acetic acid – $CH_3COOH$

(b)

(i) $H_2SO_3 \rightleftharpoons H^+ + \underline{HSO_3^-}$ (ii) $C_2HO_4^- \rightleftharpoons H^+ + \underline{C_2O_4^{2-}}$

52. নিচের ছকটি সঠিক pH দিয়ে পূরণ কর।

| Subject | pH range |
|---|---|
| মানবদেহের রক্ত | |
| মৃৎ শিল্পের মাটি | |
| চামড়া ট্যানিং | |
| গোসলের সাবান | |

সমাধান:

| Subject | pH range |
|---|---|
| মানবদেহের রক্ত | 7.35-7.45 |
| মৃৎ শিল্পের মাটি | 6-6.5 |
| চামড়া ট্যানিং | 3.5-4.5 |
| গোসলের সাবান | 8.5-9.5 |

53. গ্যাসীয় অবস্থায় সাইক্লোপ্রোপেন থেকে সাইক্লোপ্রোপিন তৈরি একটি প্রথম ক্রম বিক্রিয়া যার হার ধ্রুবক 500°C এ $6.7 \times 10^{-4}s^{-1}$ ।

(a) সাইক্লোপ্রোপেন এর প্রাথমিক ঘনমাত্রা যদি 0.25M হয় তবে 8.8 min পর এর ঘনমাত্রা কত হবে?

(b) সাইক্লোপ্রোপেন এর ঘনমাত্রা 0.25 M থেকে হ্রাস পেয়ে 0.15 M হতে কত সময় লাগবে?

সমাধান: (a) $C = C_o e^{-kt} = 0.25 \times e^{-6.7\times10^{-4}\times8.8\times60} M = 0.1755M$

(b) $C = C_o e^{-kt} \Rightarrow \ln\frac{C}{C_o} = -kt \ \therefore t = \frac{\ln\frac{C}{C_o}}{-k} = \frac{\ln\frac{0.15}{0.25}}{-6.7\times10^{-4}} s = 762.43s$

54. নিচের শব্দ সংক্ষেপগুলোর পূর্ণরূপ লিখ:

(a) ETP (b) MRI (c) PPM (d) TDS (e) BOD

সমাধান: (a) Effluent Treatment Plant

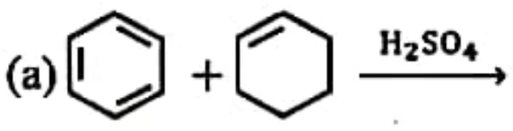
(b) Magnetic Resonance Imaging

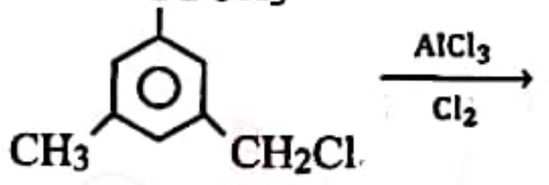
(c) Parts Per Million

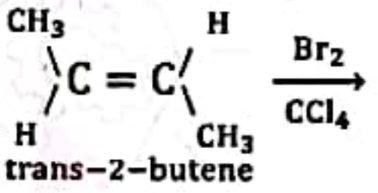
(d) Total Dissolved Solids

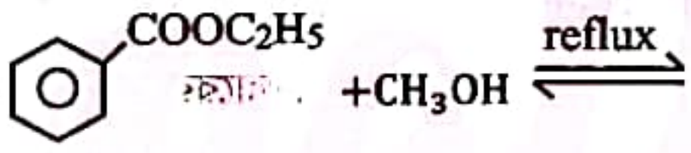
(e) Biochemical Oxygen Demand

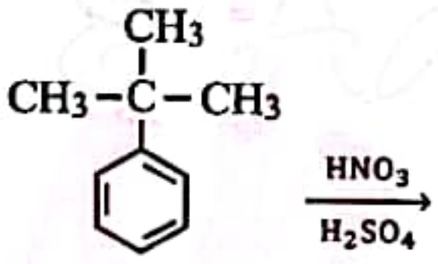
55. নিম্নলিখিত বিক্রিয়াগুলোর উৎপাদগুলো কি?

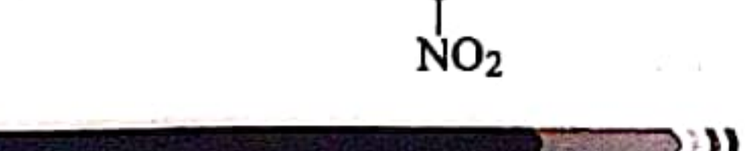
(a) 

(b) 

(c) 

(d) 

(e) 

সমাধান: (a) 

(b)

(c) 

trans–2–butene

(d) 

(e) 

56. (a) ঘন সালফিউরিক এসিডের সাথে 2,3-ডাইমিথাইলবিউটান-2-অল বিক্রিয়া করে দুটি সমানুযৌগ উৎপন্ন করে যার আণবিক সংকেত $C_6H_{12}$ । বিক্রিয়াটির নাম লিখ এবং বিক্রিয়ায় উৎপন্ন মধ্যবর্তী কার্বোনিয়াম আয়নের গাঠনিক সংকেত লিখ।

(b) উপরের বিক্রিয়ায় উৎপন্ন সমানু দুটির গাঠনিক সংকেত লিখ।

সমাধান: (a); বিক্রিয়াটির নাম নিরুদন বিক্রিয়া। $CH_3-\overset{\overset{CH_3}{|}}{\underset{\underset{OH}{|}}{C}}-\overset{\overset{CH_3}{|}}{\underset{\oplus}{C}}-CH_3$ অথবা, $\underset{\oplus}{CH_2}-\overset{\overset{CH_3}{|}}{\underset{\underset{OH}{|}}{C}}-\overset{\overset{CH_3}{|}}{CH}-CH_3$

(b) $H-\overset{\overset{H}{|}}{\underset{\underset{H}{|}}{C}}-\overset{\overset{H}{|}}{C}=\overset{\overset{H}{|}}{C}-\overset{\overset{H}{|}}{\underset{\underset{H}{|}}{C}}-H$ এবং $H-\overset{\overset{H}{|}}{C}=\overset{\overset{H}{|}}{C}-\overset{\overset{H}{|}}{\underset{\underset{H}{|}}{C}}-\overset{\overset{H}{|}}{\underset{\underset{H}{|}}{C}}-H$

57. (a) নিচের যৌগগুলোর আকৃতির নাম লিখ।

(i) $BCl_3$ (ii) $NH_3$ (iii) $PCl_5$

(b) নিচের যৌগগুলোর কেন্দ্রীয় পরমাণুর হাইব্রিডাইজেশন (সংকরায়ণ) অবস্থা উল্লেখ কর।

(i) $[Cu(NH_3)_4]^{2+}SO_4^{2-}$ (ii) $SF_6$

সমাধান: (a) (i) সমতলীয় ত্রিভুজাকার (ii) পিরামিড আকৃতির (iii) ত্রিভুজীয় দ্বিপিরামিড

(b) (i) $sp^2d$ (ii) $sp^3d^2$

58. $100cm^3$ জলীয় দ্রবণে কোন যৌগের (আণবিক ভর 18800g/mol) 0.95g দ্রবীভূত আছে। 580 nm তরঙ্গ দৈর্ঘ্যে এবং 10 cm পথের দৈর্ঘ্যে শোষণ 0.06 হলে দ্রবণটির মোলার শোষণ ধ্রুবক কত?

সমাধান: ঘনমাত্রা, $C = \frac{\frac{0.95}{18800}}{0.1} M = 5.05 \times 10^{-4} M$

$A = \varepsilon Cl$ ; $\varepsilon = \frac{A}{Cl} = \frac{0.06}{10 \times 5.05 \times 10^{-4}} L\, mol^{-1} cm^{-1} = 11.874\, L\, mol^{-1} cm^{-1}$

59. $Ag_2CO_3$ ($K_{sp} = 8.2 \times 10^{-12}$) এবং $CuCO_3$ ($K_{sp} = 2.5 \times 10^{-10}$) এর দ্রাব্যতা নির্ণয় কর এবং কোন কার্বনেটটির দ্রাব্যতা কম উল্লেখ কর।

সমাধান: ধরি, $Ag_2CO_3$ এর দ্রাব্যতা S ।

এখন, $Ag_2CO_3 \rightleftharpoons 2Ag^+ + CO_3^{2-}$

$\therefore (2S)^2 \times S = 8.2 \times 10^{-12} \Rightarrow 4S^3 = 8.2 \times 10^{-12} \therefore S = 1.27 \times 10^{-4} M$

আবার, ধরি, $CuCO_3$ এর দ্রাব্যতা S′ ।

$CuCO_3 \rightleftharpoons Cu^{2+} + CO_3^{2-} \therefore S'^2 = 2.5 \times 10^{-10} \therefore S' = 1.58 \times 10^{-5} M$

$\therefore S > S' \therefore CuCO_3$ এর দ্রাব্যতা কম।

60. (a) নিচের প্রত্যেক শিল্পকারখানা থেকে নির্গত প্রধান দুটি বায়ু দূষকের নাম লিখ।

(i) সিমেন্ট কারখানা (ii) ইউরিয়া কারখানা (iii) চামড়া কারখানা

(b) নিচের শিল্পকারখানাগুলোর প্রধান কাঁচামাল / কাঁচামালগুলো কি?

(i) গ্লাস কারখানা (ii) সিরামিকস্ কারখানা

সমাধান: (a) (i) $NO_2$, $SO_2$ (ii) $NH_3$, $SO_2$ (iii) সালফাইড, মারক্যাপটান

(b) (i) বালি ($SiO_2$), চুন (CaO), সোডা ($Na_2CO_3$)

(ii) কাদামাটি (চায়না ক্লে, বল ক্লে, সাধারণ মাটি), ফেলস্পার এবং বালি ($SiO_2$)