বুয়েট ভর্তি পরীক্ষা ২০২০-২০২১ শিক্ষাবর্ষ

পূর্ণমান: ৪০০ | মডিউল-A | সময়: ২:০০ ঘন্টা

গণিত: Written (১৪ × ১০ = ১৪০)

Short Syllabus

01. যদি $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\3 & 2\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}-2 & 1\\5 & -2\end{bmatrix}$ এবং $ABC=\begin{bmatrix}-2 & 4\\3 & -1\end{bmatrix}$ হয়, তাহলে B=?

সমাধান: $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\3 & 2\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}-2 & 1\\5 & -2\end{bmatrix},\ ABC=\begin{bmatrix}-2 & 4\\3 & -1\end{bmatrix}$

এখানে $ABC=ABC \Rightarrow A^{-1}.ABC.C^{-1}=A^{-1}.(ABC).C^{-1}$

$\Rightarrow 1.B.1=A^{-1}.(ABC).C^{-1} \therefore B=A^{-1}.(ABC).C^{-1}$

$\therefore B=\begin{bmatrix}2 & -1\\-3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 4\\3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\5 & 2\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}-7 & 9\\12 & -14\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\5 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}31 & 11\\-46 & -16\end{bmatrix}$

এখানে, $A^{-1}=\frac{1}{4-3}\begin{bmatrix}2 & -1\\-3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1\\-3 & 2\end{bmatrix}$

$C^{-1}=\frac{1}{4-5}\begin{bmatrix}-2 & -1\\-5 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\5 & 2\end{bmatrix}$

03. (9, 8) কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্ত, $x^2+y^2-2x-4y-20=0$ বৃত্তটিকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করলে বৃত্তটির সমীকরণ নির্ণয় কর।

সমাধান: $x^2+y^2-2x-4y-20=0$ বৃত্তের কেন্দ্র $C_1\left(\frac{-2}{-2},\frac{-4}{-2}\right)\equiv C_1(1,2)$

ব্যাসার্ধ, $r_1=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2-(-20)}=5$ একক

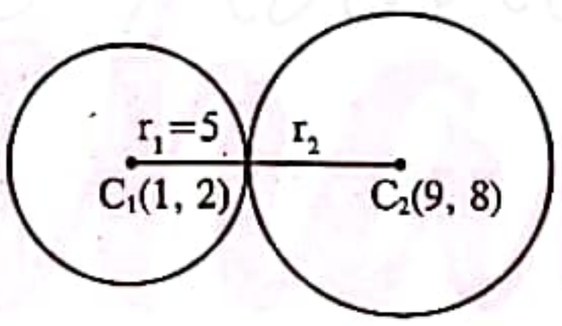
নির্ণেয় বৃত্তের কেন্দ্র $C_2(9,8)$ এবং ব্যাসার্ধ $=r_2$[ধরি] এখন বৃত্তদ্বয় বহিঃস্পর্শ করলে $C_1C_2=r_1+r_2$

$\Rightarrow \sqrt{(1-9)^2+(2-8)^2}=5+r_2$

$\therefore r_2=10-5=5$ একক

$\therefore$ নির্ণেয় বৃত্তের সমীকরণ, $(x-9)^2+(y-8)^2=5^2$

$\Rightarrow x^2+y^2-18x-16y+120=0$ **(Ans.)**



05. $a>0, b>0$ হলে দেখাও যে, ae^x+be^{-x} ফাংশনের লঘুমান গুরুমান অপেক্ষা বৃহত্তর।

সমাধান: $f(x)=ae^x+be^{-x}$; $f'(x)=ae^x-be^{-x}$; $f''(x)=ae^x+be^{-x}$

লঘুমান ও গুরুমানের জন্য, $f'(x)=0 \Rightarrow ae^x-be^{-x}=0 \Rightarrow ae^x=\frac{b}{e^x} \Rightarrow (e^x)^2=\frac{b}{a} \Rightarrow e^x=\sqrt{\frac{b}{a}} \therefore e^{-x}=\sqrt{\frac{a}{b}}$

এখন, $e^x=\sqrt{\frac{b}{a}}$ এবং $e^{-x}=\sqrt{\frac{a}{b}}$ হলে, $f''(x)=ae^x+be^{-x}=a\times\sqrt{\frac{b}{a}}+b\times\sqrt{\frac{a}{b}}=\sqrt{ab}+\sqrt{ab}=2\sqrt{ab}>0$

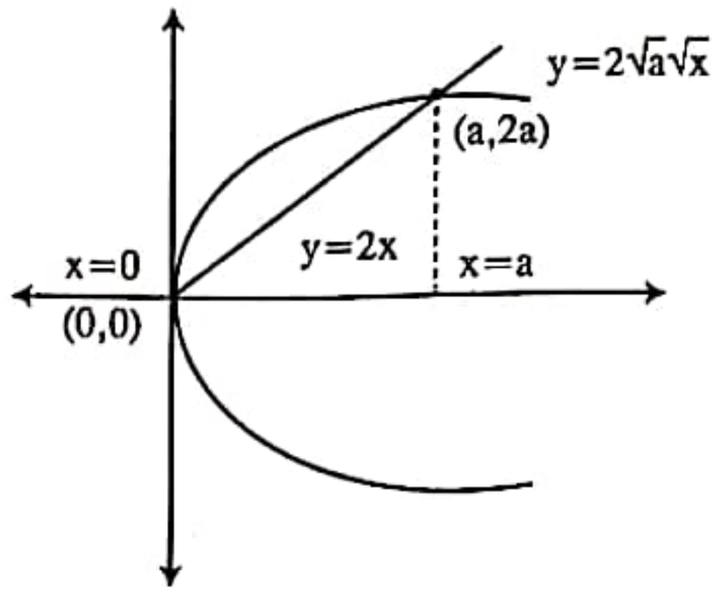
$\therefore e^x=\sqrt{\frac{b}{a}}$ এবং $e^{-x}=\sqrt{\frac{a}{b}}$ এর জন্য লঘুমান পাওয়া যাবে। $\therefore$ লঘুমানটি নির্ণয়ের জন্য $f(x)$-এ e^x এবং e^{-x} এর মান বসাতে হবে।

$\therefore$ লঘুমানটি, $f(x)=ae^x+be^{-x}=a\times\sqrt{\frac{b}{a}}+b\times\sqrt{\frac{a}{b}}=2\sqrt{ab}$

যেহেতু $f'(x)=0$ এর জন্য x এর একটি মানই পাওয়া গেছে এবং x এর উক্ত মানের জন্য ফাংশনটির শুধুমাত্র লঘুমানই পাওয়া যায়। সুতরাং ফাংশনটির কোন গুরুমান নেই। তাই, লঘুমান গুরুমান অপেক্ষা বড় দেখানো সম্ভব নয়।

06. $y^2 = 4ax$ পরাবৃত্ত এবং $y = 2x$ সরলরেখা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 3 বর্গ একক হলে, a এর মান কত?

সমাধান: $y^2 = 4ax \therefore y = \pm 2\sqrt{a}\sqrt{x}$



এখন $y^2 = 4ax$ এবং $y = 2x$ সমাধান করে পাই, $(2x)^2 = 4ax \Rightarrow 4x^2 = 4ax$

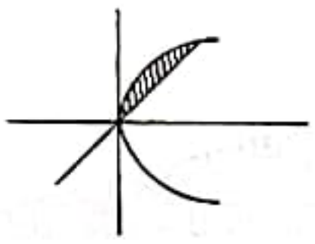
$\Rightarrow x^2 - ax = 0 \Rightarrow x(x-a) = 0 \therefore x = 0, a$

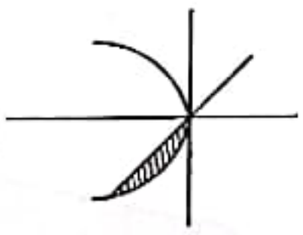
$\therefore y = 2.0 = 0;\ y = 2.a = 2a$

∴ ছেদবিন্দু $(0, 0)$ এবং $(a, 2a)$

∴ আবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল, $\int_0^a (2\sqrt{a}\sqrt{x} - 2x)dx = 3$

$\Rightarrow \left[2\sqrt{a}.\frac{x\sqrt{x}}{\frac{3}{2}} - 2.\frac{x^2}{2}\right]_0^a = 3 \Rightarrow \frac{4}{3}.a^2 - a^2 = 3 \Rightarrow \frac{1}{3}a^2 = 3 \therefore a = \pm 3$

উল্লেখ্য, $a = 3$ হলে, আবদ্ধ ক্ষেত্র- 

$a = -3$ হলে, আবদ্ধ ক্ষেত্র- 

07. $-1 + \sqrt{3}i$ জটিল সংখ্যাটিকে পোলার আকারে প্রকাশ কর। অতঃপর মডুলাস এবং আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর।

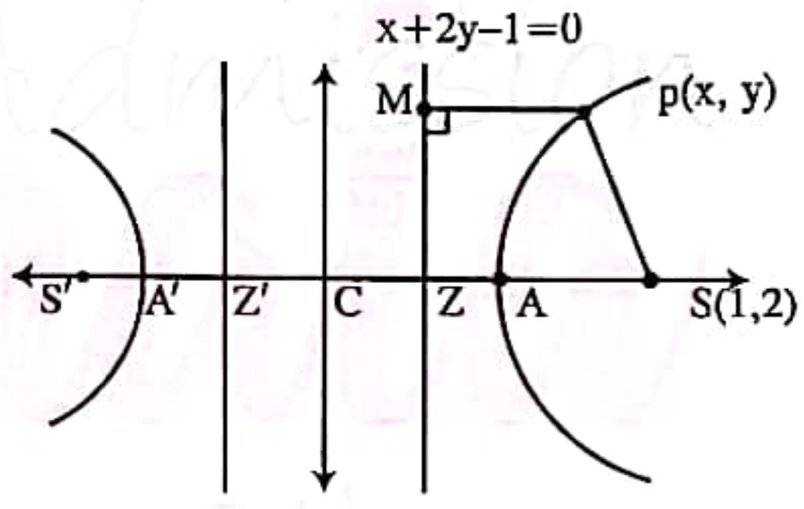
সমাধান: $-1 + \sqrt{3}i$ এর মডুলাস, $r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$; আর্গুমেন্ট, $\theta = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{\sqrt{3}}{-1}\right| = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$\therefore$ পোলার আকার $= r(\cos\theta + i\sin\theta) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2e^{\frac{2\pi i}{3}}$ (Ans.)

08. একটি অধিবৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় কর যার দিকাক্ষ, উপকেন্দ্রের স্থানাঙ্ক এবং উৎকেন্দ্রিকতা যথাক্রমে $x + 2y = 1, (1, 2)$ এবং $\sqrt{2}$।

সমাধান: দেওয়া আছে, অধিবৃত্তের উপকেন্দ্র $S(1, 2)$ এবং দিকাক্ষ $x + 2y - 1 = 0$ এবং উৎকেন্দ্রিকতা $\sqrt{2}$

এখন $P(x, y)$ অধিবৃত্তের উপর যেকোনো একটি বিন্দু হলে,



$SP = e.MP \Rightarrow SP^2 = e^2.MP^2$

$\Rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 = 2.\frac{(x+2y-1)^2}{(\sqrt{1^2+2^2})^2}$

$\Rightarrow 5(x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5) = 2(x^2 + 4y^2 + 1 + 4xy - 2x - 4y)$

$\Rightarrow 5x^2 + 5y^2 - 10x - 20y + 25 = 2x^2 + 8y^2 + 2 + 8xy - 4x - 8y$

$\therefore 3x^2 - 3y^2 - 8xy - 6x - 12y + 23 = 0$

09. একটি কণা স্থিরাবস্থা হতে সরলপথে যাত্রা করে 750 m পথ অতিক্রম করে থামে। যাত্রা পথের প্রথম অংশ $2\ ms^{-2}$ সমত্বরণে এবং শেষ অংশ $4\ ms^{-2}$ সমমন্দনে চললে কণাটির সর্বোচ্চ গতিবেগ নির্ণয় কর।

সমাধান: $f_1 = \frac{v_{max}}{t_1} = 2 \therefore t_1 = \frac{v_{max}}{2}$

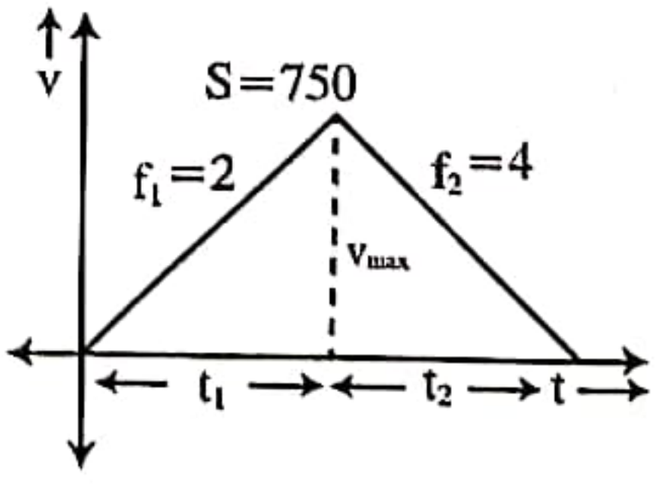
অথবা, $f_2 = \frac{v_{max}}{t_2} = 4 \therefore t_2 = \frac{v_{max}}{4}$

আবার, $s = \frac{1}{2} \times (t_1 + t_2) \times v_{max}$

$\Rightarrow 750 = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) v_{max} \times v_{max}$

$\Rightarrow 750 = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times v_{max}^2 \Rightarrow v_{max}^2 = 2000$

$\therefore v_{max} = 20\sqrt{5}\ ms^{-1}$ (Ans.)



10. সমাধান কর: $\sin(x) + \sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0$, যখন $0 \le x \le 2\pi$

সমাধান: $\sin x + \sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Rightarrow 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \sin\frac{x}{2}\left(2\cos\frac{x}{2} + 1\right) = 0$

সুতরাং হয়, $\sin\frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \frac{x}{2} = n\pi \therefore x = 2n\pi$

$n = 0$ হলে, $x = 0$; $n = 1$ হলে, $x = 2\pi$

অথবা, $\cos\frac{x}{2} = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} \Rightarrow \frac{x}{2} = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3} \therefore x = 4n\pi \pm \frac{4\pi}{3}$

$x = 0$ হলে, $x = \pm\frac{4\pi}{3} \therefore x = \frac{4\pi}{3}$ (গ্রহণযোগ্য মান)

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 0, \frac{4\pi}{3}, 2\pi$

বিকল্প: $\sin x + \sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0 \Rightarrow 2\sin\frac{x+\frac{x}{2}}{2}\cos\frac{x-\frac{x}{2}}{2} = 0 \Rightarrow 2\sin\frac{3x}{4}\cos\frac{x}{4} = 0$

সুতরাং হয়, $\sin\frac{3x}{4} = 0 \Rightarrow \frac{3x}{4} = n\pi \therefore x = \frac{4n\pi}{3}$

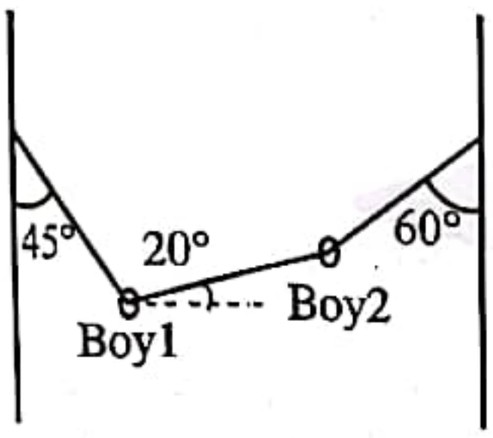
$n = 0, 1$ হলে, $x = 0, \frac{4\pi}{3}$

অথবা, $\cos\frac{x}{4} = 0 \Rightarrow \frac{x}{4} = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

$\therefore x = (2n+1)2\pi$; $n = 0$ হলে, $x = 2\pi$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $x = 0, \frac{4\pi}{3}, 2\pi$

13.



প্রতিটি 5 kg ওজনের দুটি দোলনা, একটি চেইনের মাধ্যমে সংযুক্ত করা হয়েছে এবং তারপরে প্রতিটি দোলনা একেকটি চেইনের সাহায্যে উল্লম্ব খুঁটিতে আটকানো আছে। দুইজন বালক দোলনা দুটিতে বসে আছে। সমস্ত চেইনগুলো টানটান অবস্থায় আছে এবং সম্পূর্ণ সিস্টেমটি সাম্যাবস্থায় আছে। চেইনগুলো চিত্রে দেখানো মত কোণ তৈরি করলে, এবং প্রথম বালকটির ওজন 40 kg হলে, দ্বিতীয় বালকটির ওজন নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, ২য় বালকের ওজন W

১ম বালকের জন্য, $\frac{T_2}{\sin(90°+45°)} = \frac{45}{\sin(115°)}$

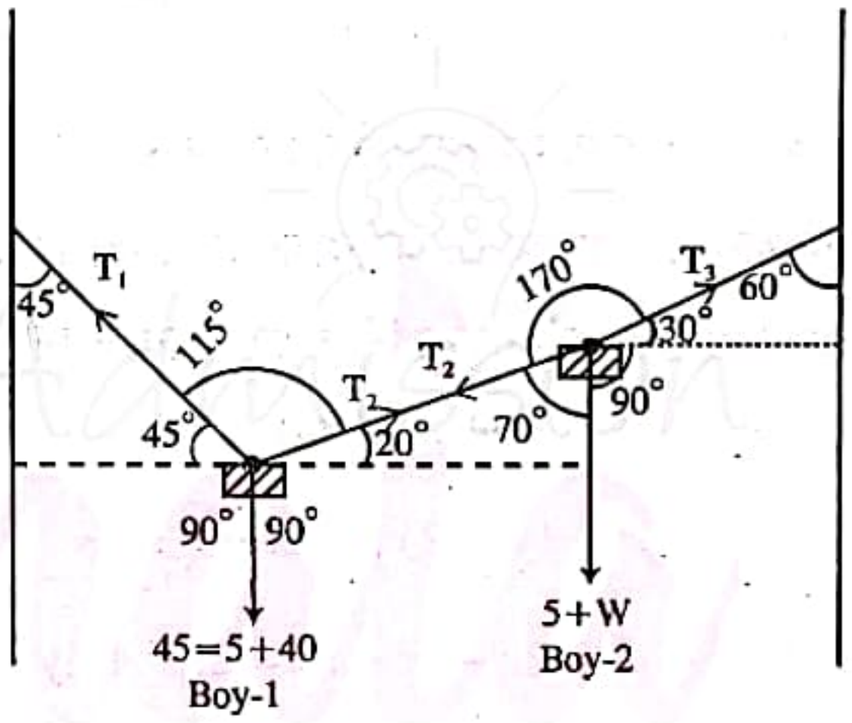
$\therefore T_2 = 45 \times \frac{\sin(135°)}{\sin(115°)} = 35.11$ kg-wt

২য় বালকের জন্য, $\frac{5+W}{\sin(170°)} = \frac{T_2}{\sin(120°)}$

$\Rightarrow 5 + W = T_2 \times \frac{\sin(170°)}{\sin(120°)}$

$\Rightarrow W = T_2 \times \frac{\sin(170°)}{\sin(120°)} - 5$

$\therefore W = 35.11 \times \frac{\sin 170°}{\sin 120°} - 5 = 2.04$ kg-wt **(Ans.)**



Extra Syllabus

02. λ এর কোন মানের জন্য নিম্নের ভেক্টর তিনটি সমতলীয় হবে? প্রদত্ত ভেক্টরত্রয়ের সমতলের উপর লম্ব একক ভেক্টর নির্ণয় কর।
$\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}, \vec{b} = 2\hat{i} - 4\hat{k}$ এবং $\vec{c} = \hat{i} + \lambda\hat{j} + 3\hat{k}$

সমাধান: $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$; $\vec{b} = 2\hat{i} - 4\hat{k}$ এবং $\vec{c} = \hat{i} + \lambda\hat{j} + 3\hat{k}$

ভেক্টরত্রয় সমতলীয় হলে, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & \lambda & 3 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow 1(0 + 4\lambda) - 1(6 + 4) + 1(2\lambda - 0) = 0 \Rightarrow 4\lambda - 10 + 2\lambda = 0 \therefore \lambda = \frac{5}{3}$ **(Ans.)**

$\because \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ সমতলীয় তাই $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ এর সমতলের লম্ব একক ভেক্টর নিলেই ভেক্টরত্রয়ের সমতলের উপর লম্ব একক ভেক্টর পাওয়া যাবে। $\therefore \vec{a}$ ও $\vec{b}$ এর সমতলের লম্ব একক ভেক্টর, $\hat{n} = \pm\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|} \cdots\cdots\cdots$ (i)

এখন, $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = \hat{i}(-4-0) - \hat{j}(-4-2) + \hat{k}(0-2) = -4\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k} = -2(2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k})$

$\therefore |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(-4)^2 + (+6)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{14}$ একক $\therefore \hat{n} = \pm\frac{-2(2\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k})}{2\sqrt{14}} = \pm\frac{2\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}}{\sqrt{14}}$ **(Ans.)**

04. 'HIPPOPOTAMUS' শব্দটির বর্ণগুলো থেকে 1 টি স্বরবর্ণ ও 2 টি ব্যঞ্জনবর্ণ নিয়ে কতগুলো শব্দ গঠন করা সম্ভব যেন স্বরবর্ণটি সবসময় মাঝখানে থাকে?

সমাধান: H I P P O P O T A M U S; এই শব্দের ব্যঞ্জনবর্ণগুলো হলো: H, P, P, P, T, M, S এবং শব্দের স্বরবর্ণগুলো হলো: I, O, O, A, U অর্থাৎ স্বরবর্ণ আছে 4টি (I, O, A, U) এবং তাদের থেকে 1 টি স্বরবর্ণ নিতে হবে যা মাঝে বসবে। ব্যঞ্জনবর্ণ আছে 5 টি (H, P, T, M, S) যেখানে P আছে 3 বার। এদের থেকে 2 টি স্বরবর্ণ নিতে হবে

Cases	Example	বাছাই (সমাবেশ)	শব্দ গঠন (বিন্যাস)
(i) 2 টি ব্যঞ্জনবর্ণ (একই), 1 টি স্বরবর্ণ মাঝে	PIP	${}^1C_1 \times {}^4C_1 = 4$	${}^1C_1 \times {}^4C_1 \times \frac{2!}{2!} = 4$
(ii) 2 টি ব্যঞ্জনবর্ণ (ভিন্ন), 1 টি স্বরবর্ণ মাঝে	HAP	${}^5C_2 \times {}^4C_1 = 40$	${}^5C_2 \times {}^4C_1 \times 2! = 80$
মোট		44	84 টি (Ans.)

11. নিচের ফাংশন f এবং g এর সংযোজিত ফাংশন (gof)(x) বের কর এবং এই সংযোজিত ফাংশনের ডোমেন বের কর।

$f(x) = \sqrt{(x+2)}, g(x) = \ln(1-x^2)$

সমাধান: দেওয়া আছে, $f(x) = \sqrt{x+2}; g(x) = \ln(1-x^2)$

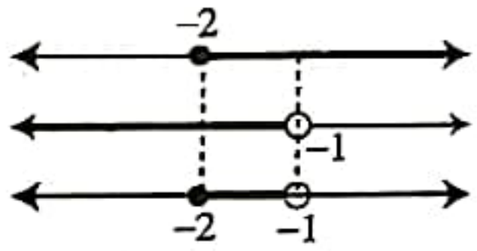
$(gof)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{x+2}\right) = \ln\left(1-\left(\sqrt{x+2}\right)^2\right) = \ln(1-x-2) = \ln(-x-1)$ (Ans.)

ডোমেন নির্ণয়: $(gof)(x) = g(f(x))$

$\therefore f(x)$ সংজ্ঞায়িত হতে হবে এবং $g(f(x))$ সংজ্ঞায়িত হতে হবে।

$f(x)$ এর জন্য: $x+2 \geq 0 \therefore x \geq -2$; $g(f(x))$ এর জন্য: $-x-1 > 0 \therefore x < -1$

$\therefore (gof)(x)$ এর ডোমেন $= [-2, -1)$ (Ans.)



12. x এর কোন মানের জন্য $\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^{20}$ দ্বিপদী বিস্তৃতিতে শেষ হতে পঞ্চম পদের মান 1240320 হবে?

সমাধান: $\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^{20}$ বিস্তৃতির পদ সংখ্যা 21 $\therefore$ শেষ হতে ৫ম পদ হলো $= 21 - 5 + 1 = 17$ তম পদ

$\therefore T_{16+1} = {}^{20}C_{16} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{20-16} \times \left(\frac{-1}{2\sqrt{x}}\right)^{16} = 1240320$

$\Rightarrow 4845 \times \frac{1}{256} \times \frac{1}{65536} \times \frac{1}{x^8} = 1240320 \Rightarrow x^8 = \frac{4845}{256 \times 65536 \times 1240320} \therefore x = \frac{1}{16}$ (Ans.)

14. 1 থেকে 1000 এর মধ্যে তিনটি পূর্ণসংখ্যা দৈবচয়নে বাছাই করলে তাদের সবগুলো 3 দ্বারা বিভাজ্য হবার এবং একই সাথে সংখ্যা তিনটির গুণফল জোড় হবার সম্ভাবনা কত?

সমাধান: 1-1000 এর মধ্যে 3 দ্বারা বিভাজ্য সংখ্যা আছে $=$ 333 টি [$999 = 3 + (n-1) \times 3 \Rightarrow n = 333$]; এদের মধ্যে জোড় সংখ্যা আছে 166 টি এবং বিজোড় সংখ্যা আছে 167 টি।

তিনটি সংখ্যার গুণফল জোড় হলে তিনটি Case হতে পারে

(i) বিজোড় × বিজোড় × জোড় = জোড় (ii) বিজোড় × জোড় × জোড় = জোড় (iii) জোড় × জোড় × জোড় = জোড়

$\therefore P = \frac{{}^{333}C_3 - {}^{167}C_3}{{}^{1000}C_3} = 0.0321$ (Ans.)

পদার্থবিজ্ঞান: Written (১৩ × ১০ = ১৩০)

Short Syllabus

15. 1.5 kg ভরের একটি মডেল হেলিকপ্টারের আদি গতিবেগ $5\hat{j}\ ms^{-1}$. 2 sec সমত্বরণে চলার পর তার গতিবেগ হয় $(6\hat{i} + 12\hat{j})\ ms^{-1}$ এই সময়ে প্রযুক্ত বলের মান নির্ণয় কর।

সমাধান: $\vec{F} = m\vec{a} = 1.5 \times \vec{a}; \vec{u} = 5\hat{j}\ ms^{-1}; t = 2s; \vec{v} = (6\hat{i} + 12\hat{j})\ ms^{-1}; \vec{a} = ?$

$\therefore \vec{a} = \frac{\vec{v}-\vec{u}}{t} = \frac{6\hat{i}+12\hat{j}-5\hat{j}}{2} = \frac{6\hat{i}+7\hat{j}}{2} = 3\hat{i} + \frac{7}{2}\hat{j}$ $\therefore$ প্রযুক্ত বল, $\vec{F} = m\vec{a} = 1.5\left(3\hat{i} + \frac{7}{2}\hat{j}\right) = 4.5\hat{i} + 5.25\hat{j}$ (Ans.)

16. কোভিড-১৯ (COVID-19) অতিমারী সময়ে 4×10^3 kg ভরের একটি পিকআপ ট্রাক এবং 10^3 kg ভরের একটি মাইক্রোবাস অক্সিজেন সিলিন্ডার সরবরাহের জন্য একটি হাসপাতালে যাচ্ছিল। পিকআপ ট্রাকের বেগ ঘণ্টায় 80 km ছিল। একই গতিশক্তি সম্পন্ন হতে হলে মাইক্রোবাসকে কত বেগে চলতে হবে?

সমাধান: $\frac{1}{2}m_p v_p^2 = \frac{1}{2}m_m v_m^2 \Rightarrow v_m^2 = \frac{m_p}{m_m}.v_p^2 \Rightarrow v_m = v_p.\sqrt{\frac{m_p}{m_m}} = 80 \times \sqrt{\frac{4\times10^3}{10^3}} = 80 \times 2 = 160\,\text{kmh}^{-1}$

17. 200 kg ভরের একটি কৃত্রিম উপগ্রহকে ভূ-পৃষ্ঠ থেকে একটি নির্দিষ্ট উচ্চতায় তুলে তার মধ্যে 6000 MJ গতিশক্তি দেয়া হলো। উপগ্রহটি কত উচ্চতায় পৃথিবীকে পরিভ্রমণ করবে? পৃথিবীর ভর 6×10^{24} kg, ব্যাসার্ধ 6400 km এবং $G = 6.6 \times 10^{-11}\,\text{Nm}^2\text{kg}^{-2}$.

সমাধান: $\frac{1}{2}mv^2 = 6000 \times 10^6\text{J} \Rightarrow mv^2 = 2 \times 6000 \times 10^6\text{J} \Rightarrow v^2 = \frac{2\times6000\times10^6}{200} = 6 \times 10^7\text{m}^2\text{s}^{-2}$

এখন, $\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow \frac{GM}{r^2} = \frac{v^2}{r} \Rightarrow \frac{GM}{r} = v^2 \Rightarrow r = \frac{GM}{v^2} = \frac{6.6\times10^{-11}\times6\times10^{24}}{6\times10^7}\text{m} = 6.6 \times 10^6\,\text{m} = 6600\,\text{km}.$

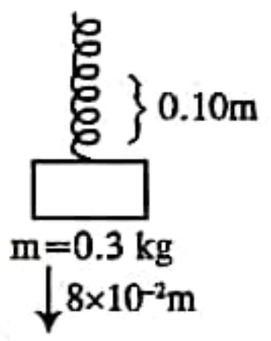
$\therefore$ উচ্চতা, $h = 6600\,\text{km} - 6400\,\text{km} = 200\,\text{km}$ (Ans.)

18. একটি স্প্রিংয়ের অগ্রভাগে 0.3 kg ভরবিশিষ্ট একটি বস্তু ঝুলানো হলে স্প্রিংটি 0.10 m লম্বা হয়। স্প্রিংটিকে এই সাম্যাবস্থা থেকে আরও 8×10^{-2}m লম্বা করে ছেড়ে দেয়া হলো। (i) বস্তুর মোট শক্তি কত? (ii) সাম্যাবস্থা থেকে 5×10^{-2} m দূরে অবস্থানকালে বস্তুটির বেগ কত?

সমাধান: (i) বস্তুর মোট শক্তি $= \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}.\frac{F}{e}.A^2 = \frac{1}{2} \times \frac{0.3\times9.8}{0.10} \times (8 \times 10^{-2})^2\text{m} = 0.094\,\text{J}$

(ii) $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \therefore \frac{1}{2} \times 0.3 \times v^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{0.3\times9.8}{0.10}\right) \times (5 \times 10^{-2})^2$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{0.3\times9.8}{0.10}\right) \times (8 \times 10^{-2})^2 \therefore v = 0.618\,\text{ms}^{-1}$



19. সমান ভরের তিনটি ভিন্ন তরল পদার্থ A, B, C এর তাপমাত্রা যথাক্রমে 12°,19°C এবং 28°C। A কে যদি B এর সাথে মেশানো হয় তাহলে তাপমাত্রা হয় 16°C। B কে যদি C এর সাথে মেশানো হয় তাহলে তাপমাত্রা হয় 23°C। A কে যদি C এর সাথে মেশানো হয় তাহলে তাপমাত্রা কত হবে?

সমাধান: ধরি, আপেক্ষিক তাপ, S_A, S_B, S_C

$Q_A = Q_B \Rightarrow mS_A\Delta\theta_A = mS_B\Delta\theta_B$

$\Rightarrow S_A(16-12) = S_B(19-16) \Rightarrow 4S_A = 3S_B \ldots\ldots\ldots$ (i)

আবার, $Q_B = Q_C \Rightarrow S_B\Delta\theta'_B = S_C\Delta\theta_C$

$\Rightarrow S_B(23-19) = S_C(28-23) \Rightarrow 4S_B = 5S_C \ldots\ldots\ldots$ (ii)

$\Rightarrow 4 \times \frac{4}{3}S_A = 5S_C \Rightarrow \frac{16}{3}S_A = 5S_C \Rightarrow \frac{S_A}{S_C} = 5 \times \frac{3}{16} = \frac{15}{16}$

$Q_A = Q_C \Rightarrow S_A(\theta - 12) = S_C(28 - \theta)$

$\Rightarrow \frac{S_A}{S_C} = \frac{28-\theta}{\theta-12} \Rightarrow \frac{15}{16} = \frac{28-\theta}{\theta-12}$

$\Rightarrow \theta = 20.258°\text{C}$

20. একটি ইলেকট্রিক কেটলির সাহায্যে 2 kg পানির তাপমাত্রা 25°C থেকে 80°C এ উন্নীত করলে এন্ট্রপির পরিবর্তন বের কর। পানির আপেক্ষিক তাপ $4200\,\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$.

সমাধান: এখানে, পানির ভর, $m = 2$ kg; পানির আপেক্ষিক তাপ, $S = 4200\,\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$;

পানির প্রাথমিক তাপমাত্রা, $T_1 = (273 + 25)\,\text{K} = 298\,\text{K}$; পানির চূড়ান্ত তাপমাত্রা, $T_2 = (273 + 80)\,\text{K} = 353\,\text{K}$

$\therefore$ এন্ট্রপির পরিবর্তন, $\Delta s = mS\ln\frac{T_2}{T_1} = \left(2 \times 4200 \times \ln\frac{353}{298}\right)\text{JK}^{-1} = 1422.75\,\text{JK}^{-1}$

23. একটি 100pF ধারকত্বের ধারকে সঞ্চিত শক্তির পরিমাণ নির্ণয় কর যখন (i) ধারকটিকে 4 kV বিভব পার্থক্য প্রদান করা হয় এবং (ii) ধারকের প্রতিটি পাতের চার্জ 60 nC.

সমাধান: (i) সঞ্চিত শক্তি, $U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2} \times 100 \times 10^{-12} \times (4 \times 10^3)^2\text{J} = 8 \times 10^{-4}\,\text{J}$

(ii) সঞ্চিত শক্তি, $U = \frac{1}{2}.\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \times \frac{(60\times10^{-9})^2}{100\times10^{-12}}\text{J} = 1.8 \times 10^{-5}\,\text{J}$

25. একটি এক্স-রে টিউবকে 80 kV বিভব পার্থক্যে রাখা হলে, লক্ষ্যবস্তুতে ইলেকট্রনগুলো সর্বোচ্চ কত বেগে আঘাত করবে? আঘাতের পর ইলেকট্রনের শক্তির 2% এক্স-রে বর্ণালিতে রূপান্তরিত হলে উৎপন্ন বর্ণালির সর্বনিম্ন তরঙ্গদৈর্ঘ্য কত হবে?

সমাধান: $E_{k(max)} = eV \Rightarrow \frac{1}{2}mv_{max}^2 = 80 \times 10^3 \times e \Rightarrow v_{max}^2 = \frac{2\times80\times10^3\times e}{m}$

$\Rightarrow v_{max} = \sqrt{\frac{2 \times 80 \times 10^3 \times e}{m}} = 1.67 \times 10^8\ ms^{-1}$

আবার, আঘাতের পর, $eV \times 2\% = \frac{hc}{\lambda_{min}} \Rightarrow \lambda_{min} = \frac{6.626\times10^{-34}\times3\times10^8}{80\times10^3\times e\times\frac{2}{100}} = 0.776\ nm$

26. টাংস্টেন ধাতুতে আলোকতড়িৎ বিচ্ছুরণ সংঘটনের সর্বোচ্চ তরঙ্গদৈর্ঘ্য 230 nm। উক্ত ধাতুতে কত তরঙ্গদৈর্ঘ্যের আলো ফেললে নির্গত ইলেকট্রনের সর্বোচ্চ গতিশক্তি 1.5 eV হবে?

সমাধান: $h\frac{c}{\lambda} = h\frac{c}{\lambda_{max}} + 1.5\ eV \Rightarrow \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{230\times10^{-9}} + 2.4 \times 10^{-19} \Rightarrow \frac{1.98782\times10^{-25}}{\lambda} = \frac{1.98782\times10^{-25}}{230\times10^{-9}} + 2.4 \times 10^{-19}$

$\Rightarrow \frac{1.98782\times10^{-25}}{\lambda} = 1.104 \times 10^{-18} \Rightarrow \lambda = 180 \times 10^{-9}\ m = 180\ nm$

27. $^{235}_{92}U$ এর একটি ফিশন বিক্রিয়ায় 200 MeV শক্তি উৎপন্ন হয়। এরূপ 2 gm $^{235}_{92}U$ হতে নির্গত শক্তির পরিমাণ kWh-এর নির্ণয় কর।

সমাধান: $E = 200 \times 10^6 \times 1.6 \times 10^{-19} \times \frac{2}{235} \times 6.02 \times 10^{23}\ J$

$= \frac{200\times10^6\times1.6\times10^{-19}\times2\times6.023\times10^{23}}{235} \times 2.78 \times 10^{-7}\ kWh = 45541.37\ kWh$ (Ans.)

Extra Syllabus

21. একটি আবাসিক এলাকার শব্দের তীব্রতার ভিত্তি মাত্রা এবং অনুমোদিত সর্বোচ্চ তীব্রতার মাত্রা সীমা যথাক্রমে 50 dB এবং 60 dB। 40 W ক্ষমতার শব্দের নতুন একটি উৎস ঐ আবাসিক এলাকা হতে ন্যূনতম কতদূরে স্থাপন করার জন্য অনুমোদন দেয়া যাবে?

সমাধান: $\beta_{max} = 10\log\frac{I_{max}}{I_0} \Rightarrow 60 = 10\log\frac{40}{4\pi r_{min}^2\times10^{-12}}$; [যেখানে, $I_{max} = \frac{P}{4\pi r_{min}^2}$] $\therefore r_{min} = 1784.12\ m$ (Ans.)

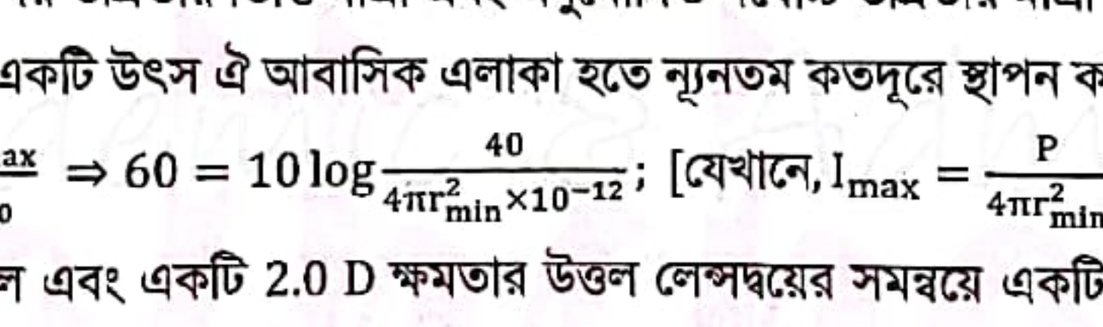
22. একটি 2.5 D ক্ষমতার অবতল এবং একটি 2.0 D ক্ষমতার উত্তল লেন্সদ্বয়ের সমন্বয়ে একটি যৌগিক লেন্স তৈরি করা হল। উক্ত যৌগিক লেন্সের সামনে 300 cm দূরে একটি বস্তু রাখলে বস্তুটির প্রতিবিম্ব কোথায় পাওয়া যাবে?

সমাধান: যৌগিক লেন্সটির ক্ষমতা, $P = (-2.5 + 2.0)\ D = -0.5\ D$; সুতরাং লেন্সটি অবতল লেন্সের ন্যায় কাজ করবে।

বস্তুর অবস্থান, $u = 300\ cm = 3\ m$; প্রতিবিম্বের অবস্থান, $v = \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{u}\right)^{-1} = \left(-0.5 - \frac{1}{3}\right)^{-1} m = -\frac{6}{5}\ m$

$\therefore$ বস্তুটির প্রতিবিম্ব লেন্সের $\frac{6}{5}\ m$ সামনে পাওয়া যাবে।

24. $0.2\ m^2$ ক্ষেত্রফলের একটি আয়তাকার কুণ্ডলী $\vec{B} = (0.5 + 10t)\hat{j}$ (T), (যেখানে t হল সেকেন্ড) মানের একটি চৌম্বকক্ষেত্রের মধ্যে রাখা আছে। কুণ্ডলীটি 0.1 s এ চিত্র অনুযায়ী (a) থেকে (b) তে অবস্থান পরিবর্তন করে। কুণ্ডলীতে আবিষ্ট তড়িৎচালক বল নির্ণয় কর।



(a) t=0 (b) t=0.1s

সমাধান: $\varepsilon(+) = \frac{d}{dt}\phi = \frac{d}{dt}\vec{A}.\vec{B} = \frac{d}{dt}AB\cos\theta = A\frac{d}{dt}(B\cos\theta) = A\left[\cos\theta\frac{dB}{dt} + B\frac{d}{dt}\cos\theta\right]$

$= A\left[\cos\theta \times 10 - (0.5 + 10t)\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\right]$; At, $t = 0.1s \therefore \varepsilon = 0.2\left[\cos30° \times 10 - 1.5 \times \sin30° \times \frac{\pi}{6\times0.1}\right] = 0.947\ V$

রসায়ন: Written (১৩ × ১০ = ১৩০)

Short Syllabus

29. নিম্নোক্ত পারমাণবিক সংখ্যাবিশিষ্ট মৌলসমূহের ইলেকট্রন বিন্যাস দেখাও এবং পর্যায় সারণিতে অবস্থান নির্ণয় কর।

(a) 38 (b) 54.

সমাধান: (a) $_{38}Sr \rightarrow [Kr]5s^2$ এবং পর্যায় সারণিতে এটির অবস্থান: পর্যায়: 5, গ্রুপ: 2

(b) $_{54}Xe \rightarrow [Kr]4d^{10}5s^25p^6$ এবং পর্যায় সারণিতে এটির অবস্থান: পর্যায়: 5, গ্রুপ: 18

30. কোন একটি বিক্রিয়ার তাপমাত্রা 427°C থেকে 527°C তে উন্নীত করার ফলে বিক্রিয়ার হার ধ্রুবক দ্বিগুণ হয়ে গেল। বিক্রিয়াটির সক্রিয়ন শক্তি (kJ mol^{-1} এককে) কত?

সমাধান: $\ln\frac{k_2}{k_1} = \frac{E_a}{R}\left[\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right] \Rightarrow \ln 2 = \frac{E_a}{8.31}\left[\frac{1}{700} - \frac{1}{800}\right] \Rightarrow E_a = 32.26\ kJmol^{-1}$ (Ans.)

31. একটি ফার্নেসে 35% CO_2 - 65% CO গ্যাস মিশ্রণ ব্যবহার করে 700°C এ স্টীলকে তাপ দিলে এর উপর মরিচা পড়বে কিনা তা নির্ণয় কর। [দেওয়া আছে; $Fe(s) + CO_2(g) = FeO(s) + CO(g); K = 1.43$]

সমাধান: $Q_p = \frac{P^0_{CO}}{P^0_{CO_2}} = \frac{0.65}{0.35} = 1.86 > k.$ সুতরাং, মরিচা পড়বে না।

32. নিম্নোক্ত রাসায়নিক বিক্রিয়াসমূহে সাম্যাবস্থার চাপ হ্রাস করে গ্যাসীয় আয়তন বৃদ্ধি করলে বিক্রিয়ার মিশ্রণে উৎপাদের মোল সংখ্যার কী পরিবর্তন হবে ব্যাখ্যা কর।

(i) $CaO(s) + CO_2(g) \leftrightharpoons CaCO_3(s)$ (ii) $3Fe(s) + 4H_2O(g) \leftrightharpoons Fe_3O_4(s) + 4H_2(g)$

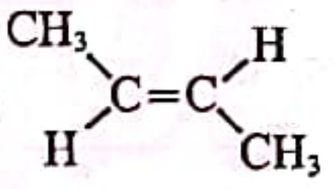
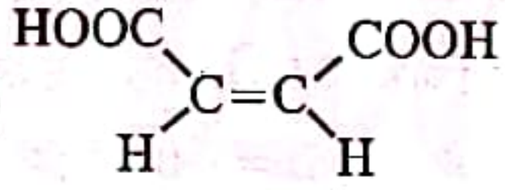
সমাধান: (i) উৎপাদ কমবে, $\Delta n = -1$ (ii) অপরিবর্তিত থাকবে, $\Delta n = 0$

33. 950 mol গ্যাস বহন করার জন্য 200 L আয়তনবিশিষ্ট সিলিন্ডার তৈরিতে 250 MPa শক্তিবিশিষ্ট স্টীল ব্যবহার করা হবে। গরমকালে তাপমাত্রা 50°C পর্যন্ত বৃদ্ধির বিবেচনায় উক্ত স্টীলটি ব্যবহার করা যাবে কি না তা নির্ণয় কর।

সমাধান: 50°C তাপমাত্রায়, $P = \frac{nRT}{V} = \frac{950\times8.31\times323}{200\times10^{-3}\times10^6}\ MPa = 12.75\ MPa \therefore$ রাখা যাবে। (Ans.)

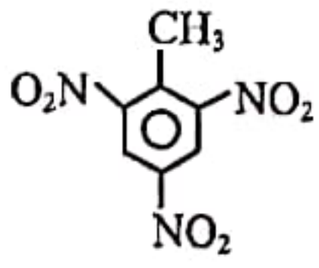
34. IUPAC পদ্ধতি ব্যবহার করে নিম্নোক্ত যৌগের গাঠনিক সংকেত লিখ।

(i) Transbute-2-ene, (ii) Cisbutene-dioic acid

সমাধান: (i)  (ii) 

35. নাইট্রোগ্লিসারিন ও টিএনটি এর বিস্ফোরণ পদ্ধতির মধ্যে পার্থক্য কী? টিএনটির বিস্ফোরণ বিক্রিয়াটি লিখ।

সমাধান: নাইট্রোগ্লিসারিন ও TNT এর বিস্ফোরণ পদ্ধতির মূল পার্থক্য হলো নাইট্রোগ্লিসারিনের মতো TNT আঘাত বা কম্পন দ্বারা বিস্ফোরিত হয় না। Detonator সহযোগে স্ফূলিঙ্গ ঘটালে TNT বিস্ফোরিত হয়। অপরদিকে নাইট্রোগ্লিসারিনে বাহ্যিক চাপ ও অধিক তাপমাত্রায় অভ্যন্তরীণ দহনজনিত অধিক গ্যাস সৃষ্টির ফলে বিস্ফোরণ ঘটে থাকে। অথচ, TNT এর বিস্ফোরণে নাইট্রোগ্লিসারিনের চেয়ে কম চাপ ও তাপ সৃষ্টি হয়।

TNT এর বিস্ফোরণ প্রক্রিয়া:  $\xrightarrow[+2[O]]{\text{Detonation}} 14CO\ (g) + 2N_2\ (g) + 5H_2\ (g)$

37. রিডবার্গ সমীকরণটি লেখ। H-পরমাণুর বামার সিরিজের একটি রেখা বর্ণালির তরঙ্গদৈর্ঘ্য (nm-এ) নির্ণয় কর, যখন ইলেকট্রন উচ্চ শক্তিস্তর, $n_2 = 4$ থেকে লাফিয়ে চলে আসে। [রিডবার্গ ধ্রুবক $R_H = 1.09678 \times 10^7 m^{-1}$]

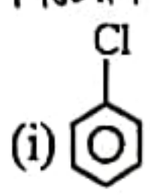
সমাধান: $\frac{1}{\lambda} = R_H Z^2\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right)$; H-এর জন্য, $\frac{1}{\lambda} = 109678\ cm^{-1}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2}\right)$

$\Rightarrow \frac{1}{\lambda} = 20{,}564.625\ cm = 2.056 \times 10^{11}\ nm \Rightarrow \lambda = 4.86 \times 10^{-5}\ cm = 486.27\ nm$

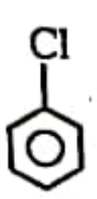
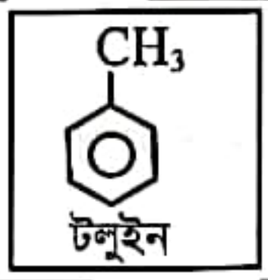
39. যদি H_2SO_4এর লঘু দ্রবণের মধ্যদিয়ে Pt তড়িৎদ্বারের মাধ্যমে একটি তড়িৎ বিশ্লেষ্য কোষে 1 ঘণ্টা বিদ্যুৎ প্রবাহিত হয়, তাহলে STP-তে 300 mL H_2 (g) উৎপন্ন হয়। বিদ্যুৎ প্রবাহের পরিমাণ নির্ণয় কর।

সমাধান: $n = \frac{It}{eF} \Rightarrow \frac{PV}{RT} = \frac{It}{eF} \Rightarrow I = \frac{PVeF}{RTt} \Rightarrow I = \frac{1\times\frac{300}{1000}\times2\times96500}{0.0821\times273\times3600} A = 0.72\ A$ (প্রায়)

40. নিচের বিক্রিয়াগুলো সম্পূর্ণ কর।

(i)  $+2\,Na + CH_3Cl \xrightarrow[\Delta]{\text{Dry ether}}$ ☐ + ☐

(ii) $CH_3C \equiv CH + Br_2 \xrightarrow{CCl_4}$ ☐ $\xrightarrow{Br_2}$ ☐

সমাধান: (i)  $+2\,Na + CH_3Cl \xrightarrow[\Delta]{\text{Dry ether}}$  + 2NaCl

টলুইন

(ii) $CH_3C \equiv CH + Br_2 \xrightarrow{CCl_4}$ $CH_3-\underset{Br}{\overset{Br}{C}}=\underset{Br}{\overset{Br}{CH}}$ $\xrightarrow{Br_2}$ $CH_3-\underset{Br}{\overset{Br}{\underset{Br}{\overset{Br}{C}}}}-\underset{Br}{\overset{Br}{CH}}$

Extra Syllabus

28. নিচের রাসায়নিক দ্রব্যসমূহ সংরক্ষণে ঝুঁকিসমূহ উল্লেখ কর।

(i) C_2H_5OH (ii) KOH (iii) Br_2 (iv) HCl (v) C_6H_6

সমাধান: (i) C_2H_5OH: অত্যন্ত দাহ্য পদার্থ, চর্মে স্পর্শ ও শ্বাসের সাথে গ্রহণ ক্ষতিকর।

(ii) KOH: চর্মে ক্ষতি করে (iii) Br_2: স্বাস্থ্যের ক্ষতি করে এবং বিষাক্ত

(iv) HCl: ত্বকের ক্ষতি করে (v) C_6H_6: অত্যন্ত দাহ্য পদার্থ, চর্মে স্পর্শ ও শ্বাসের সাথে গ্রহণ ক্ষতিকর

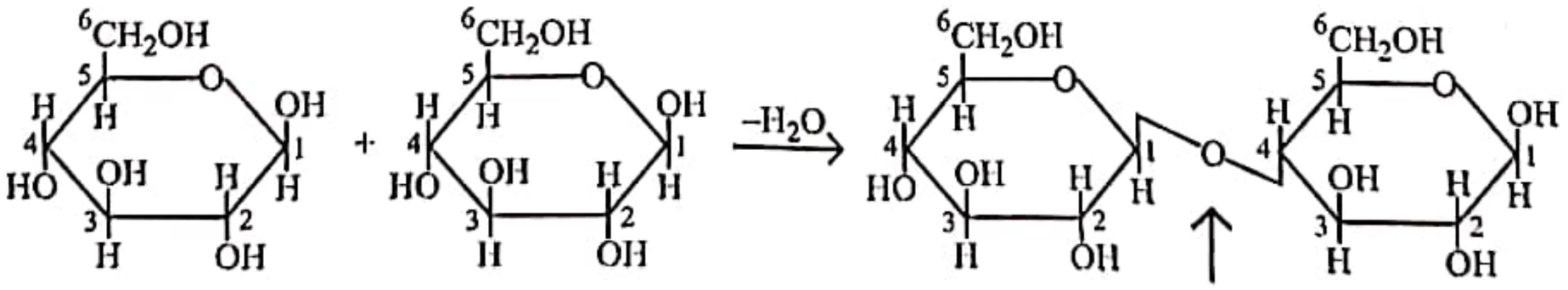
36. গাড়ির ক্যাটালাইটিক কনভার্টারে রক্ষিত প্লাটিনাম ধাতু পরিবেশ দূষণের গ্যাসগুলোকে বিক্রিয়ার মাধ্যমে অন্য পদার্থে রূপান্তর করে বায়ু দূষণ কমায়। উক্ত কাজের সংশ্লিষ্ট বিক্রিয়াগুলো দেখাও।

সমাধান: বর্তমান আধুনিক বিশ্বে সব মোটরযানে এবং কলকারখানায় দহনের ফলে উৎপন্ন জ্বালানির বর্জ্য বায়ু দূষক গ্যাসকে প্রভাবকীয় বা ক্যাটালাইটিক কনভার্টার দ্বারা রূপান্তর করে পরিবেশবান্ধব গ্যাসরূপে বায়ুতে মুক্ত করা হয়। এ কনভার্টারে প্রভাবকরূপে প্লাটিনাম (Pt), প্যালাডিয়াম (Pd) বা রেডিয়াম (Rh) ধাতুর সূক্ষ্ম চূর্ণকে সিরামিকের তৈরি মৌচাকের ন্যায় জালির মধ্যে টিউব বন্ধ করে রাখা হয়। দহন স্থান হতে নির্গত উত্তপ্ত বর্জ্য দূষক গ্যাস ধাতব প্রভাবকের সংস্পর্শে আসলে অদহনকৃত জ্বালানি বাষ্প ও CO গ্যাস বায়ুর অক্সিজেন দ্বারা পূর্ণ জারিত হয়ে CO_2 গ্যাসে পরিণত হয় এবং বর্জ্য গ্যাসের NO গ্যাস CO দ্বারা বিজারিত হয়ে N_2 গ্যাসরূপে বাতাসে মুক্ত হয়।

$C_xH_y + \left(x + \frac{y}{4}\right)O_2 \xrightarrow[\Delta]{Pt} xCO_2 + \frac{y}{2}H_2O$; $2NO + 2CO \rightarrow 2CO_2 + N_2$; $2CO + O_2 \rightarrow 2CO_2$

38. গাঢ় H_2SO_4 কাঠের উপর পড়লে কী ঘটে তা রাসায়নিক বিক্রিয়ার সাহায্যে দেখাও এবং বিক্রিয়ক ও উৎপাদসমূহের নাম লিখ।

সমাধান: কাঠের মূল উপাদান হচ্ছে সেলুলোজ, যা β-D গ্লুকোজের সরল শিকল পলিমার। এতে প্রায় 3000 β-D গ্লুকোজ অণু β-গ্লাইকোসাইড বন্ধনে আবদ্ধ থাকে।



β-D-গ্লুকোজ (দুই অণু) β-গ্লাইকোসাইড বন্ধন

অপরদিকে, গাঢ় H_2SO_4 হলো তীব্র ক্ষয়কারক (Corrosive) ও তাপোৎপাদী পানি শোষণকারী বা নিরুদক (Hygroscopic) পদার্থ, যা কাঠের উপর পড়লে পানি শোষণ করে নিতে চেষ্টা করবে।

বিক্রিয়া: $\underset{\text{সালফিউরিক এসিড}}{H_2SO_4} + \underset{\text{সেলুলোজ}}{(C_6H_{10}O_5)_n} \rightarrow \underset{\text{কার্বন}}{nC} + \underset{\text{পানি}}{nH_2O}$