



অধ্যায়-১০: যোগজীকরণ

Question Type-01: linear function কে x ধরে integration

Integration করার সময় যেকোন linear function $(ax + b)$ আকারের function কে x ধরে integration করা যাবে, পরবর্তীতে ঐ function এর differentiation অর্থাৎ a দ্বারা ভাগ করতে হবে।

Example: $\int (2x - 3)^5 dx = \frac{(2x-3)^6}{6 \times 2} + c$

Related Questions:

01. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4x+1}}$ এর মান নির্ণয় কর।

[RU'20-21]

(a) $\frac{3}{2}$ (b) 6 (c) $\frac{2}{3}$ (d) 9

সমাধান: (কোনটিই নয়); $z = 4x + 1 \Rightarrow dz = 4 dx \Rightarrow \frac{dz}{4} = dx$

$x = 0, z = 1; x = 2, z = 9$

$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4x+1}} = \frac{1}{4} \int_1^9 \frac{dz}{\sqrt{z}} = \frac{1}{4} [2\sqrt{z}]_1^9 = \frac{1}{2} (\sqrt{9} - \sqrt{1}) = \frac{1}{2} (3 - 1) = 1$

02. $X = \int_0^4 \sqrt{2x+1} dx$ হলে, X এর মান কত?

[JU'18-19]

(a) $\frac{26}{5}$ (b) $\frac{26}{3}$ (c) $\frac{3}{26}$ (d) 26

সমাধান: (b); $\int_0^4 \sqrt{2x+1} dx = \left[\frac{1}{3} (2x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 = \frac{26}{3}$

03. যদি $\int_0^6 f(t) dt = 8$ হয়, তবে $\int_0^3 f(2x) dx$ এর মান-

[DU'17-18]

(a) 0 (b) 6 (c) 10 (d) 4

সমাধান: (d); $\int_0^6 f(t) dt = 8 \therefore \int_0^3 f(2x) dx = \int_{0 \times 2}^{2 \times 3} \frac{f(2x)d(2x)}{2} = \frac{1}{2} \int_0^6 f(2x)d(2x) = \frac{1}{2} \times 8 = 4$

04. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = ?$

[Ans: d][JU'17-18]

(a) $2\sqrt{1-x} + C$ (b) $-1/2\sqrt{1-x} + C$ (c) $1/2\sqrt{1-x} + C$ (d) $-2\sqrt{1-x} + C$

05. যদি $f(x) = -f(-x)$ হয়, তবে $\int_{-a}^a f(x) dx =$ কত?

[RU'17-18]

(a) 1 (b) 0 (c) a (d) 2a

সমাধান: (b); কারণ এটি একটি অযুগ্ম ফাংশন।

06. $\int (x-2) = x^2 - 2x + 8$ হলে $\int (-4)$ এর মান কত?

[RU'17-18]

(a) 8 (b) 10 (c) 12 (d) 16

সমাধান: (d); $x - 2 = -4 \therefore x = -2 \therefore \int (-4) = (-2)^2 - 2(-2) + 8 = 16$





Question Type-02: x^n সংক্রান্ত

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} [n \neq -1]$$

$n = -1$ ছাড়া যেকোন মানের জন্য এটি সত্য হবে।

Ex: $\int \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} dx = \int x^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + c = -2x^{-\frac{1}{2}} + c$

এক্ষেত্রে মনে রাখতে হবে $\int f(x)dx = \int f(y) dy$ অর্থাৎ x এর স্থলে যেকোন চলক থাকতে পারে।

Related Questions:

01. x এর সাপেক্ষে e^{x^2} এর যোগজ কোনটি? [JU'19-20]

- (a) $2xe^{x^2} + c$ (b) $e^{2x} + c$ (c) $\frac{e^{x^2}}{2x} + c$ (d) $x^2e^{x^2} + c$

সমাধান: (a); Option Check.

02. $\int x^9 e^{x^{10}} dx = ?$ [JU'19-20]

- (a) $-\frac{1}{9}e^{x^{10}} + c$ (b) $-\frac{1}{10}e^{x^{10}} + c$ (c) $\frac{1}{9}e^{x^{10}} + c$ (d) $\frac{1}{10}e^{x^{10}} + c$

সমাধান: (d); $x^{10} = z \therefore 10x^9 dx = dz$; $x^9 dx = \frac{1}{10} dz$; $I = \int \frac{1}{10} e^z dz = \frac{1}{10} e^z + c = \frac{e^{x^{10}}}{10} + c$

03. $\int \sqrt{e^x} dx = ?$ [DU'18-19]

- (a) $\frac{2}{3}(e^x)^{3/2} + c$ (b) $\frac{1}{2}\sqrt{e^x} + c$ (c) $2e^{x/2} + c$ (d) $e^{x/2} + c$

সমাধান: (c); Let, $e^x = z^2 \Rightarrow z = e^{\frac{x}{2}} \Rightarrow e^x dx = 2z dz$

$$\int \frac{\sqrt{e^x} \cdot e^x}{e^x} dx = \int \frac{z \cdot 2z dz}{z^2} = \int 2 dz = 2z + c = 2e^{\frac{x}{2}} + c$$

04. $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ এর মান কোনটি? [Ans: d][JU'18-19]

- (a) $2x + c$ (b) $\sqrt{x} + c$ (c) $\sqrt{2x} + c$ (d) $2\sqrt{x} + c$

05. $\int_0^1 x^4(1-x)^5 dx =$ কত? [RU'18-19]

- (a) $\frac{1}{1260}$ (b) $\frac{1}{280}$ (c) $\frac{1}{315}$ (d) কোনটিই নয়

সমাধান: (a); $\int_0^1 x^4(1-x)^5 dx = \int_0^1 x^4(1-5x+10x^2-10x^3+5x^4-x^5) dx$

$$= \int_0^1 (x^4 - 5x^5 + 10x^6 - 10x^7 + 5x^8 - x^9) dx$$

$$= \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{5}{6}x^6 + \frac{10}{7}x^7 - \frac{10}{8}x^8 + \frac{5}{9}x^9 - \frac{1}{10}x^{10} \right]_0^1 = \frac{1}{5} - \frac{5}{6} + \frac{10}{7} - \frac{10}{8} + \frac{5}{9} - \frac{1}{10} = \frac{1}{1260}$$

[Ans: d][CU'18-19]

06. $\int a^x dx$ এর মান হবে-

- (a) $\frac{e^x}{\log a}$ (b) $\log a + c$ (c) $\frac{a^x}{\log a}$ (d) $\frac{a^x}{\log a} + c$



07. $\int \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right) dx$ এর মান কত? [JU'16-17]

- (a) $1 - \frac{1}{x^2} + c$ (b) $1 - \frac{1}{x} + c$ (c) $x - \frac{1}{x^2} + c$ (d) $x - \frac{1}{x} + c$

সমাধান: (d); $\int \frac{1}{x} \left(x + \frac{1}{x}\right) dx = \int (1 + x^{-2}) dx = x - \frac{1}{x} + c$

08. $\int e^{2x} dx$ এর মান কত? [Ans: a][JnU'16-17]

- (a) $\frac{1}{2} e^{2x} + c$ (b) $e^{2x} + c$ (c) $\frac{1}{2} e^x + c$ (d) $2e^{2x} + c$

09. $\int \frac{1}{3\sqrt{x}} dx =$ কত? [RU'12-13, JU'14-15]

- (a) $\frac{3}{2} \sqrt{x}$ (b) $\frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{x}$ (c) $\frac{2}{3} \sqrt{x}$ (d) $-\frac{2}{3} \sqrt{x}$

সমাধান: (c); $\frac{1}{3} \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{3} \times 2 \sqrt{x} = \frac{2}{3} \sqrt{x} + c$

10. $\int_0^9 \left(5 + \frac{1}{\sqrt{y}}\right) dy$ এর মান কত? [CU'14-15]

- (a) 51 (b) 34 (c) 44 (d) 46

সমাধান: (a); $\int_0^9 \left(5 + \frac{1}{\sqrt{y}}\right) dy = [5y + 2\sqrt{y}]_0^9 = (45 + 6) - (0) = 51$

Question Type-03: Replacement সংক্রান্ত

প্রদত্ত রাশির কোন অংশকে differentiation করলে যদি অন্য একটি অংশ তার সাথে গুণ অবস্থায় পাওয়া যায় তাহলে সেটাকে z দ্বারা replace করে লিখব।

Ex: $\int \tan^3 x \sec^2 x dx$

এক্ষেত্রে $\tan x$ কে differentiation করে $\sec^2 x$ পাওয়া যায়

$$= \int z^3 dz = \frac{z^4}{4} + c \quad \tan x = z \quad = \frac{\tan^4 x}{4} + c \quad \sec^2 x dx = dz$$

Related Questions:

01. $\int_0^1 x e^{x^2} dx$ এর মান কত? [RU'20-21]

- (a) $\frac{1}{2}(1 - e)$ (b) $\frac{1}{2}(e - 1)$ (c) $\frac{e}{2}$ (d) $\frac{1}{2}(e + 1)$

সমাধান: (b); $\int_0^1 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 2x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 e^z dz = \frac{1}{2} [e - 1]$

02. $\int \frac{dx}{(e^x + e^{-x})^2} = ?$ [DU'19-20]

- (a) $\frac{1}{2(e^{2x} + 1)} + c$ (b) $\frac{-1}{2(e^{2x} + 1)} + c$ (c) $\frac{1}{2e^{2x}} + c$ (d) $\frac{-1}{2e^{2x}} + c$

সমাধান: (b); Let, $e^{2x} + 1 = z \Rightarrow 2e^{2x} dx = dz$

$$\int \frac{dx}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{1}{2} \int \frac{2e^{2x} dx}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z^2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} + c = \frac{-1}{2(e^{2x} + 1)} + c$$

03. $\int_0^1 \frac{\tan^{-1} x}{1+x^2} dx$ এর মান কোনটি? [Ans: c][JU'19-20]

- (a) $\frac{\pi}{32}$ (b) $\frac{\pi}{16}$ (c) $\frac{\pi^2}{32}$ (d) $\frac{\pi^2}{16}$

সমাধান: (c); Let, $\tan^{-1} x = z \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} dx = dz$; $x = 0, z = 0$; $x = 1, z = \frac{\pi}{4}$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{4}} z dz = \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{16} \times \frac{1}{2} - 0 = \frac{\pi^2}{32}$$





04. $\int_0^1 \frac{x dx}{1+x^4}$ এর মান কোনটি?

[JU'19-20]

- (a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{\pi}{8}$ (c) $\frac{\pi}{3}$ (d) $\frac{2\pi}{3}$

সমাধান: (b); $\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x dx}{1+(x^2)^2}$; ধরি, $z = x^2$; $dz = 2x \cdot dx$

এখানে, $x = 1$ হলে $z = 1$; $x = 0$ হলে $z = 0$ $= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{2} [\tan^{-1} z]_0^1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}$

05. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1 + \sin x)^2 \cos x dx = ?$

[JU'19-20]

- (a) $-\frac{7}{3}$ (b) $\frac{7}{3}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) $-\frac{1}{2}$

সমাধান: (a); $1 + \sin x = z \therefore \cos x dx = dz$; $\int_{\frac{\pi}{2}}^1 z^2 dz = \frac{1}{3} [z^3]_{\frac{\pi}{2}}^1 = \frac{1}{3} - \frac{8}{3} = -\frac{7}{3}$

x	z
$\frac{\pi}{2}$	1
1	$\frac{\pi}{2}$

06. $\int \frac{dx}{1+\cos x}$ এর মান কোনটি?

[RU'17-18]

- (a) $\frac{1}{3} \sin x$ (b) $\frac{1}{2} \tan x$ (c) $\frac{1}{3} \cos x$ (d) $\frac{1}{3} \tan x$

সমাধান: (blank); $\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{dx}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \int \sec^2 \frac{x}{2} \cdot dx = \tan \frac{x}{2} + c$

07. $\int_0^x f(p)f'(p)dp = ?$

[DU'15-16]

- (a) $\frac{1}{2} f^2(x)$ (b) $\frac{1}{2} x^2$ (c) $\frac{1}{2} \{[f(x)]^2 - [f(0)]^2\}$ (d) $f(x) - f(0)$

সমাধান: (c); $\int_0^x f(p) \cdot f'(p) \cdot dp = \left[\frac{[f(p)]^2}{2} \right]_0^x = \frac{1}{2} \{[f(x)]^2 - [f(0)]^2\}$

08. $\int \frac{e^x(1+x)}{\cos^2(xe^x)} dx = f(x) + c$; $f(x) = ?$

[DU'11-12,15-16]

- (a) $\sin(xe^x)$ (b) $\tan(xe^x)$ (c) $\cot(xe^x)$ (d) $\sec(xe^x)$

সমাধান: (b); $\int \frac{e^x(1+x)}{\cos^2(xe^x)} dx$,

Let, $z = xe^x \Rightarrow dz = e^x(1+x)dx = \int \sec^2 z \cdot dz = \tan z + c = \tan(xe^x) + c$

09. $\int \frac{e^{m \tan^{-1} x}}{1+x^2} dx$ এর মান কত?

[RU'10-11, CU'15-16]

- (a) e^{1+x^2} (b) $\frac{1}{m} e^{m \tan^{-1} x}$ (c) $e^{m \tan^{-1} x}$ (d) $me^{\tan^{-1} x}$ (e) me^{1+x^2}

সমাধান: (b); ধরি, $\tan^{-1} x = z \therefore \frac{1}{1+x^2} dx = dz$

$\therefore \int \frac{e^{m \tan^{-1} x}}{1+x^2} dx = \int e^{mz} dz = \frac{1}{m} e^{mz} + c = \frac{1}{m} e^{m \tan^{-1} x} + c$

10. $\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx = ?$

[DU'14-15]

- (a) $\frac{1}{2} (\ln 2)^2$ (b) $\frac{1}{2} \ln 2$ (c) ∞ (d) 0

সমাধান: (a); $\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx = \int_0^{\ln 2} z dz = \frac{z^2}{2} = \frac{1}{2} (\ln 2)^2$

11. $\int_0^{\pi/2} (1 + \cos x)^2 \sin x dx$ এর মান কত?

[RU'07-08, JU'14-15]

- (a) $\frac{7}{4}$ (b) $\frac{7}{3}$ (c) $\frac{1}{3}$ (d) $\frac{1}{7}$

সমাধান: (b); $\int_0^{\pi/2} (1 + \cos x)^2 \sin x dx = -\int_1^0 (1+z)^2 dz$

$= -\int_1^0 (z^2 + 2z + 1) dz = -\left[\frac{z^3}{3} + \frac{2z^2}{2} + z \right]_1^0 = \frac{1}{3} + 1 + 1 = \frac{7}{3}$

let, $\cos x = z \Rightarrow dz = -\sin x dx$

when, $x = \frac{\pi}{2}, z = 0$; $x = 0, z = 1$





[CU'14-15]

12. $\int_0^1 x^3 \sqrt{1+3x^4} dx =$ কত?

(a) $\frac{3}{18}$

(b) $\frac{7}{18}$

(c) $\frac{7}{36}$

(d) $\frac{14}{9}$

সমাধান: (b); $\int_0^1 x^3 \sqrt{1+3x^4} dx$; Let, $1+3x^4 = Z \Rightarrow 12x^3 dx = dZ \Rightarrow x^3 dx = \frac{dZ}{12}$

$$\therefore \text{আমরা পাই, } \frac{1}{12} \int_1^8 \sqrt{Z} dz = \left[\frac{1}{12} \times \frac{Z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_1^8 = \left[\frac{2}{3 \times 12} \times Z^{\frac{3}{2}} \right]_1^8 = \frac{1}{18} \left[Z^{\frac{3}{2}} \right]_1^8 = \frac{1}{18} \left\{ (2^2)^{\frac{3}{2}} - 1 \right\} = \frac{1}{18} (8 - 1) = \frac{7}{18}$$

13. $\int \frac{3x^2}{1+x^6} dx = f(x) + c$ হলে $f(x)$ এর মান কত?

[Ans: a][RU'07-08]

(a) $\tan^{-1} x^3$

(b) $\sin^{-1} x^3$

(c) $\frac{1}{1+x^3}$

(d) $\cos^{-1} x^3$

Written

01. $\int_0^1 \sqrt{3x+1} dx$ এর মান নির্ণয় কর।

Find the value of $\int_0^1 \sqrt{3x+1} dx$.

[RU'19-20]

সমাধান: ধরি, Let, $m^2 = 3x+1 \Rightarrow 2mdm = 3 \cdot dx$

x	1	0
m	2	1

$$I = \int_0^1 \sqrt{3x+1} dx = \int_1^2 \sqrt{m^2} \left(\frac{2}{3} m dm \right) = \frac{2}{3} \int_1^2 m^2 dm$$

$$= \frac{2}{3} \left[\frac{m^3}{3} \right]_1^2 = \frac{2}{9} [2^3 - 1^3] = \frac{2}{9} \times 7 = \frac{14}{9}$$

Question Type-04: প্রতিস্থাপন পদ্ধতি

01. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = f(x) + c$ হলে, $f(x)$ সমান-

[Ans: d][DU'17-18]

(a) $\sin x$

(b) $\sin^{-1} x$

(c) $\cos x$

(d) $\sec^{-1} x$

02. $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ এর মান-

[DU'07-08, JU'09-10, KU'13-14]

(a) $\frac{1}{2}$

(b) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

(c) 1

(d) $\frac{\pi}{2}$

সমাধান: (c); $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left(-\frac{1}{2} \right) \int_0^1 \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left(-\frac{1}{2} \right) \left[2\sqrt{1-x^2} \right]_0^1 = 1$

Question Type-05: sine ও cosine এর power সংক্রান্ত

Example: $\int \sin^3 x dx$

Let, $\cos x = z = -\int (1 - \cos^2 x) (-\sin x dx) \Rightarrow -\sin x dx = dz$

$$= -\int (1 - z^2) dz = -z + \frac{z^3}{3} + c = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + c$$





Short method Ex: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \, dx = ?$

এই ধরনের Problem এ limit 0 থেকে $\frac{\pi}{2}$ হলে নিচের step follow করতে হবে।

(i) Answer হবে ভগ্নাংশ। power যা থাকবে তা হরে লিখতে হবে। $\left(\frac{\square}{3}\right)$

(ii) লবে হরের থেকে 1 কম লিখতে হবে। $\left(\frac{2}{3}\right)$

(iii) লব ও হর থেকে 2 করে কমাতে হবে 0 না আসা পর্যন্ত $\left(\frac{2}{3.1}\right)$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \, dx = \frac{2}{3} \text{ একইভাবে, } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 x \, dx = \frac{6.4.2}{7.5.3.1}$$

sin ও cos এর power জোড় হলে সূত্র ফেলে আগাও

$$\begin{aligned} \sin^4 x \, dx &= \frac{1}{4} \int (2 \sin^2 x)^2 \, dx = \frac{1}{4} \int (1 - \cos 2x)^2 \, dx \\ &= \frac{1}{4} \int (1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x) \, dx \text{ (Proceed)} \end{aligned}$$

Related Questions:

01. $\int \sec^2 \frac{5}{2} x \, dx$ এর মান কোনটি? [Ans: c][JU'19-20]

- (a) $2 \sec \frac{5}{2} x \tan \frac{5}{2} x + c$ (b) $\frac{5}{2} \tan \frac{5}{2} x + c$ (c) $\frac{2}{5} \tan \frac{5}{2} x + c$ (d) $\tan \frac{5}{2} x + c$

02. $\int \cos^3 x \, dx = ?$ [JU'18-19]

- (a) $\frac{1}{12} \sin 3x + C$ (b) $\frac{1}{12} \sin 3x + \sin x + C$ (c) $\frac{1}{12} \sin 3x + 9 \sin x + C$ (d) $\frac{1}{12} (\sin 3x + 9 \sin x) + C$

সমাধান: (d); $\int \cos^3 x \, dx = \frac{1}{4} \int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{4} \int (\cos 3x + 3 \cos x) \, dx$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} \sin 3x + 3 \sin x \right) + C = \frac{1}{12} (\sin 3x + 9 \sin x) + C$$

03. $\int e^x [f(x) + f'(x)] \, dx$ এর মান কত? [Ans: b][KU'18-19]

- (a) $e^x f'(x)$ (b) $e^x f(x)$ (c) $x e^x f(x)$ (d) $f'(x)$

04. $\int_0^{\frac{\pi^2}{4}} \sin \sqrt{x} \, dx =$ কত? [RU'17-18]

- (a) 0 (b) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ (c) 1 (d) 2

সমাধান: (d); ধরি, $u = \sqrt{x} \therefore du = \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx \therefore dx = 2u \, du$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} u \sin(u) \, du = [2(\sin u - u \cos u)]_0^{\pi/2} = 2$$

05. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx$ সমান কত? [JnU'15-16]

- (a) $\frac{\pi}{2}$ (b) 0 (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) 1

সমাধান: (c); $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx$

$$\therefore 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x + \cos^2 x) \, dx \Rightarrow I = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{4}$$



06. $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx$ -এর মান কত?

[RU'14-15]

- (a) $\pi/4$ (b) $3/8$ (c) $-2/3$ (d) $2/3$

সমাধান: (d); Walli's theorem থেকে পাই, $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cdot dx = \frac{2}{3}$

07. $\int \sqrt{1-\cos 2x} dx$ এর মান কত?

[KU'13-14]

- (a) $\sqrt{2} \cos x + c$ (b) $-2 \cos x + c$ (c) $2 \cos x + c$ (d) $-\sqrt{2} \cos x + c$

সমাধান: (d); $\int \sqrt{1-\cos 2x} dx = \int \sqrt{2} \sin x dx = -\sqrt{2} \cos x + c$

Question Type-06: sine, cosine এর সংমিশ্রণ সংক্রান্ত

Example-1: $\int \sin 3x \cos 4x dx = \frac{1}{2} \int 2 \sin 3x \cos 4x dx = \frac{1}{2} \int (\sin 7x - \sin x) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{-\cos 7x}{7} + \cos x \right] + c$

sin ও cos এর বিভিন্ন সংমিশ্রণ এর জন্য-

1. $2 \sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$

2. $2 \cos A \sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$

3. $2 \cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$

4. $2 \sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$

সূত্রগুলো apply করতে হবে।

Example-2: $\int \sin 3x \cdot \sin 7x dx$

এক্ষেত্রে $\cos(A-B) - \cos(A+B)$ এর সূত্র প্রয়োগ করব।

Question Type-07: sine, cosine এর power সংমিশ্রণ

উভয়ের Power বিজোড় হলে যার power বড় সেটা = z ধরব

Example-01: $\int \sin^5 x \cos^3 x dx$ $\sin x = z$

$= \int \sin^5 x \cdot (1 - \sin^2 x) \cos x dx$ $\cos dx = dz$

$= \int z^5 (1 - z^2) dz = \int (z^5 - z^7) dz = \frac{z^6}{6} - \frac{z^8}{8} + c = \frac{\sin^6 x}{6} - \frac{\sin^8 x}{8} + c$

* একটির power জোড়, আরেকটির বিজোড় হলে যার Power জোড় সেটা = z ধরব।

Example-02: $\int \sin^4 x \cos^3 x dx$ $\sin x = z$

$= \int \sin^4 x (1 - \sin^2 x) \cos x dx$ $\cos x dx = dz$

$= \int z^4 (1 - z^2) dz$ (Proceed)

* উভয়ের Power জোড় হলে trigonometric করে কাজে লাগাও

Example-03: $\int \sin^2 x \cos^2 x dx = \frac{1}{8} \int (1 - \cos 4x) dx$

$= \frac{1}{4} \int (2 \sin x \cos x)^2 dx = \frac{1}{8} \left(x - \frac{\sin 4x}{4} \right) + c = \frac{1}{4} \int \sin^2 2x dx$



**Related Questions:**

01. $\int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta \sin \theta d\theta = ?$ [CU'16-17]
 (a) 0 (b) $\frac{1}{5}$ (c) $-\frac{1}{\sqrt{5}}$ (d) $-\frac{1}{5}$ (e) $\frac{4}{5}$

সমাধান: (b); Shortcut: Calculator

02. $\int_0^{\pi} \sin^4 x \cos^5 x dx =$ কত? [CU'14-15]
 (a) 0 (b) $\frac{22}{7}$ (c) $\frac{8}{315}$ (d) কোনটিই নয়

সমাধান: (a); $\int_0^{\pi} \sin^4 x \cdot \cos^4 x \cdot \cos x dx = \int_0^{\pi} \sin^4 x (1 - \sin^2 x)^2 dx$

Let, $\sin x = z \Rightarrow \cos x \cdot dx = dz$

\therefore আমরা পাই, $\int_0^0 z^4 (1 - z^2)^2 dz = \int_0^0 z^4 (1 - 2z^2 + z^4) dz$

$$= \int_0^0 (z^4 - 2z^6 + z^8) dz = \left[\frac{z^5}{5} - \frac{2z^7}{7} + \frac{z^9}{9} \right]_0^0 = 0$$

Question Type-08: (tan এর power সংক্রান্ত)

Example: $\int \tan^4 x dx = \int \tan^2 x (\sec^2 x - 1) dx = \int \tan^2 x \sec^2 x dx - \int \tan^2 x dx$
 $= \int \tan^2 x \sec^2 x dx - \int (\sec^2 x - 1) dx = \int \tan^2 x d(\tan x) - \tan x + x + c$
 $= \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + c$

tan এর power বিজোড় হলেও এভাবে $\sec^2 x$ এ নিয়ে আসতে হবে।

Related Questions:

01. $\int \frac{\tan x}{\sqrt{2} \cot x} =$ কত? [JU'14-15]
 (a) $\frac{1}{\sqrt{2}} (\cot x - x) + c$ (b) $(\tan x - x) + c$ (c) $(\tan x + x) + c$ (d) $\frac{1}{\sqrt{2}} (\tan x - x) + c$

সমাধান: (d); $\frac{1}{\sqrt{2}} \int \tan^2 x dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int (\sec^2 x - 1) dx = \frac{1}{\sqrt{2}} [\tan x - x] + c$

02. $\int_0^{\pi/4} (\tan^3 x + \tan x) dx =$ কত [JU'14-15]
 (a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) $\frac{\pi}{4}$

সমাধান: (b); $\int_0^{\pi/4} \tan x (\tan^2 x + 1) dx = \int_0^{\pi/4} \tan x (\sec^2 x) dx = \left[\frac{(\tan x)^2}{2} \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}$

03. $\int (\sec^2 \theta - \tan^2 \theta) d\theta =$ কত? [CU'13-14]
 (a) $\theta + c$ (b) $\tan \theta - 2 \log \sec \theta + c$ (c) θ (d) $\tan^{-1} \theta + \cos \theta + c$

সমাধান: (a); $\int (\sec^2 \theta - \tan^2 \theta) d\theta = \int 1 d\theta = \theta + c$





Question Type-09: tan, sec সংক্রান্ত

$$\int \tan^m x \sec^n x dx$$

n বিজোড় হলে, m অবশ্যই বিজোড় হবে।

n জোড় হলে, m যেকোন কিছু হতে পারে।

$$\begin{aligned} \text{Ex: } \int \tan^3 x \sec^4 x dx &= \int \tan^2 x (1 + \tan^2 x) \sec^2 x dx \\ &= \int \tan^2 x d(\tan x) + \int \tan^4 x d(\tan x) = \frac{2}{5} \tan^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{9} \tan^{\frac{9}{2}} + c \end{aligned}$$

উভয়ের Power বিজোড় হলে sin, cos এ ভেঙে এগিয়ে যেতে হবে।

Related Questions:

01. $\int \frac{\tan(\sin^{-1} x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = ?$ [DU'18-19]

(a) $\sec^2(\sin^{-1} x) + c$ (b) $\sec(\sin^{-1} x) + c$ (c) $\ln|\sec(\sin^{-1} x)| + c$ (d) $\ln|\tan(\sin^{-1} x)| + c$

সমাধান: (c); $\int \tan(\sin^{-1} x) d(\sin^{-1} x) = \ln|\sec(\sin^{-1} x)| + c$

02. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\tan x}$ এর মান কত? [CU'18-19]

(a) $\sec x$ (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) 90° (d) $\frac{\pi}{2}$

সমাধান: (b); $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\tan x} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{(\sin x + \cos x) + (\cos x - \sin x)}{\sin x + \cos x} dx$
 $= \frac{1}{2} [x + \ln|\sin x + \cos x|]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} [\frac{\pi}{2} + 0 - 0 - 0] = \frac{\pi}{4}$ (Ans.)

03. $\int \frac{d\theta}{1+3\cos^2 \theta}$ এর মান কোনটি? [KU'18-19]

(a) $\frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{\tan \theta}{2} \right) + c$ (b) $\tan^{-1} \left(\frac{\tan \theta}{2} \right) + c$ (c) $\frac{1}{2} \cos^{-1} \left(\frac{\tan \theta}{2} \right) + c$ (d) $\cos^{-1} \left(\frac{\tan \theta}{2} \right) + c$

সমাধান: (a); $\int \frac{d\theta}{1+3\cos^2 \theta} = \int \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\sec^2 \theta + 3} = \int \frac{\sec^2 \theta d\theta}{\tan^2 \theta + 4} = \int \frac{d(\tan \theta)}{\tan^2 \theta + 2^2} = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left(\frac{\tan \theta}{2} \right) + c$

04. $\int \tan^2 x dx = ?$ [Ans: a][JU'17-18]

(a) $\tan x - x + C$ (b) $\cot x + x + C$ (c) $\cot x - x + C$ (d) $\tan x + x + C$

05. $\int_0^1 \frac{\tan^{-1} x}{1+x^2} dx = ?$ [CU'16-17]

(a) $\frac{\pi^2}{16}$ (b) $\frac{\pi}{8}$ (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{2}$ (e) $\frac{\pi}{8}$

সমাধান: (No correct answer); $\int_0^1 \frac{\tan^{-1} x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} [(\tan^{-1} x)^2]_0^1 = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\pi}{4} \right)^2 - 0 \right\} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{32}$

06. $\int \sec^2 a \sec^2 x dx = ?$ [CU'16-17]

(a) $\tan \tan x + c$ (b) $(\sec^2 a) \tan x + c$ (c) $\tan a + \tan x$ (d) $\cot a \cot x + c$
 (e) $\operatorname{cosec}^2 a \operatorname{cosec} x + c$

সমাধান: (b); $\int \sec^2 a \sec^2 x dx = \sec^2 a \int \sec^2 x dx = \sec^2 a + \tan x + c$

07. $\int \frac{(1+x)e^x}{\cos^2(xe^x)} dx = ?$ [Ans: b][DU'07-08,11-12,14-15]

(a) $\sin(e^x) + c$ (b) $\tan(xe^x) + c$ (c) $\cos(xe^x) + c$ (d) $\cot(xe^x) + c$





Question Type-10: sin, cos সংক্রান্ত

$\int \frac{1}{1 \pm \sin x} dx$, $\int \frac{1}{1 \pm \cos x} dx$ লব ও হরকে অনুবন্ধী রাশি দ্বারা গুণ করে লিখব।

$$\int \frac{1}{1 + \cos x} dx = \int \frac{1 - \cos x}{1 - \cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} dx = \int (\operatorname{cosec}^2 x - \operatorname{cosec} x \cot x) dx = -\cot x + \operatorname{cosec} x + c$$

একইভাবে উপরের 4 টি Problem Solve করা যাবে। কিন্তু cos এর ক্ষেত্রে Problem টা অন্যভাবে করা যায়।

$$\int \frac{1}{1 + \cos x} dx = \int \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2} \int \sec^2 \frac{x}{2} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\tan \frac{x}{2}}{\frac{1}{2}} + c = \tan \frac{x}{2} + c$$

এক্ষেত্রে mcq option এ যেটা থাকবে সেটা দিতে হবে।

Related Questions:

01. $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1 + \sin 2x}} dx = ?$

[JU'18-19]

- (a) $\sin x + c$ (b) $\cos x + c$ (c) $x + c$ (d) 1

সমাধান: (c); $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1 + \sin 2x}} dx = \int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x}} dx = \int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int dx = x + c$

02. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \cos x} dx =$ কত?

[JU'18-19, CU'18-19]

- (a) $\frac{\pi}{2}$ (b) 1 (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) -1

সমাধান: (b); $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sec^2 \frac{x}{2} dx = \left[\tan \frac{x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - 0 = 1$

Question Type-11: বিভিন্ন সূত্র ব্যবহারে যোগজ নির্ণয়

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c; \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + c; \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{a} + c \quad \text{এই ধরনের format না থাকলে বানিয়ে নিতে হবে।}$$

Ex: $\int \frac{dx}{\sqrt{16 - 4x^2}} = \int \frac{dx}{2\sqrt{4 - x^2}} = \frac{1}{2} \cdot \sin^{-1} \frac{x}{2} + c$

সর্বদা x কে সহগমুক্ত করে তারপর সূত্রে ফেলতে হবে।

$$* \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + c$$

সূত্র দুটি এভাবে মনে রাখতে পার $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \text{যা আছে তাই}| + c$

Related Questions:

01. যদি $\int \frac{1}{\sqrt{4 - 9x^2}} dx = \frac{1}{3} \sin ax + c$ হয়, তাহলে 'a' এর মান কত?

[RU'20-21]

- (a) 2 (b) 4 (c) $\frac{3}{2}$ (d) $\frac{2}{3}$

সমাধান: (c); $\frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 - x^2}} = \frac{1}{3} \cdot \sin^{-1} \left(\frac{x}{\frac{2}{3}} \right) \therefore a = \frac{3}{2}$





02. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$ এর মান হবে-

[RU'19-20]

- (a) $-\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $\frac{3\pi}{4}$ (d) $\frac{5\pi}{2}$

সমাধান: (সঠিক উত্তর নেই) (no correct answer); $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int_0^1 \frac{d(x-1)}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$
 $= [\sin^{-1}(x-1)]_0^1 = \sin^{-1}0 - \sin^{-1}(-1) = 0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$

03. $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{(1-2x)} dx$ এর মান কত?

[RU'19-20]

- (a) $e-1$ (b) $\frac{e-1}{2}$ (c) $\frac{e}{2}$ (d) $-\frac{e}{2}$

সমাধান: (b); $\int_0^{\frac{1}{2}} e^{1-2x} dx = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{1-2x} d(1-2x) = -\frac{1}{2} [e^{1-2x}]_0^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} [e^0 - e] = \frac{e-1}{2}$

04. $\int_0^1 \frac{e^x}{1+x} [(1+x) \ln(1+x) + 1] dx$ এর মান কত?

[SUST'19-20]

- (a) 1 (b) 0 (c) e (d) $\ln 2$ (e) $e \ln 2$

সমাধান: (e); $\int_0^1 \frac{e^x}{1+x} [(1+x) \ln(1+x) + 1] dx = \int_0^1 e^x \left[\ln(1+x) + \frac{1}{1+x} \right] dx$
 $= [e^x \ln(1+x)]_0^1 = e \ln 2 - 0 = e \ln 2$

05. যদি $x > a > 0$ হয় তবে $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$ এর মান কত?

[Ans: b][BAU'18-19]

- (a) $\frac{1}{2a} \ln \frac{x+a}{x-a}$ (b) $\frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a}$ (c) $\frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x}$ (d) $\frac{1}{2a} \ln \frac{a-x}{a+x}$

06. $\int f(x) dx = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x} + C$ হলে $f(x)$ এর মান কত?

[Ans: c][BAU'18-19]

- (a) $\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ (c) $\frac{1}{a^2-x^2}$ (d) $\frac{1}{a^2+x^2}$

07. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = ?$

[RU'17-18]

- (a) π (b) 2π (c) $\frac{\pi}{2}$ (d) 0

সমাধান: (c); $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1)^2-(x-1)^2}} = [\sin^{-1}(x-1)]_0^1 = \frac{\pi}{2}$

08. $\int_0^1 \frac{x}{1+x^4} dx$ এর মান কত?

[KU'17-18]

- (a) $\frac{\pi}{8}$ (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $\frac{\pi}{3}$ (d) $\frac{2\pi}{3}$

সমাধান: (a); দেওয়া আছে, $y = x^2$; $dy = 2x \cdot dx \therefore \int_0^1 \frac{x}{1+x^4} \cdot dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{2} [\tan^{-1} y]_0^1 = \frac{\pi}{8}$

09. $\int \frac{dx}{2+x^2} = ?$

[Ans: d][CU'16-17]

- (a) $\tan^{-1} \frac{x}{2} + k$ (b) $\tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}} + k$ (c) $\sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}} + k$ (d) $\frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}} + k$ (e) $\frac{1}{\sqrt{2}} \sin^{-1} \frac{x}{\sqrt{2}} + k$

10. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = ?$

[KU'04-05, DU'08-09, RU'11-12, JU'10-11, 11-12, 14-15]

- (a) $2/\pi$ (b) $\pi/2$ (c) $\pi^2/2$ (d) $1/\pi$

সমাধান: (b); $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = [\sin^{-1}(x-1)]_0^1 = \pi/2$





Question Type-12: $\sqrt{\pm a^2 \pm x^2}$ সংক্রান্ত

$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx$, $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$, $\int \sqrt{x^2 - a^2} dx$ এই Problem গুলোর ক্ষেত্রে সূত্রগুলো এভাবে মনে রাখবে।

$I = \frac{x}{2} (\text{Integrand}) + \frac{a^2}{2} \int \frac{1}{\text{integrand}} dx + c$; Integrand হল যাকে Integrate করতে বলা হবে।

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx + c = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \frac{x}{a} + c$$

Ex-1: $\int \sqrt{25 - x^2} dx = \int \sqrt{5^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{25 - x^2} + \frac{25}{2} \sin^{-1} \frac{x}{5} + c$

একইভাবে $\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{a^2}{2} \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + c$

Related Questions:

01. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = ?$

[Agri. Gucho'20-21]

(a) $\frac{\pi}{2}$

(b) π

(c) 2π

(d) $\frac{\pi}{4}$

সমাধান: (a); $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = [\sin^{-1}(x-1)]_0^1 = \frac{\pi}{2}$

02. $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2}} =$ কত?

(a) $\frac{3\pi}{2}$

(b) π

(c) 2π

(d) $\frac{\pi}{2}$

সমাধান: (b); $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2}} = \left[\sin^{-1} \left(\frac{2x}{3} - 1 \right) \right]_0^3 = \pi$

Question Type-13: পরমমান সংক্রান্ত

Example: $\int_2^5 |x-3| dx = ?$

এক্ষেত্রে, $|x-3| = x-3$ যখন $x-3 > 0 \Rightarrow x > 3$

$|x-3| = -(x-3)$ যখন $x-3 < 0 \Rightarrow x < 3$

$\therefore \int_2^5 |x-3| dx = \int_2^3 -(x-3) dx + \int_3^5 (x-3) dx \Rightarrow$ Proceed

[কারণ আমরা জানি, $|x| = x$ যখন $x > 0$ = $-x$ যখন $x < 0$

Integration এর ভিতরে একাধিক রাশির গুণফল ও থাকতে পারে।

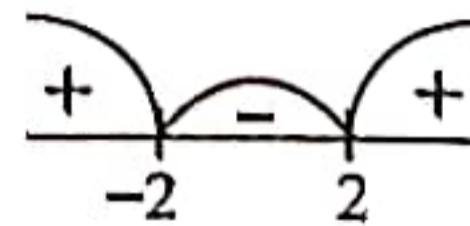
$\int_{-4}^4 |(x-3)(x+2)| dx$

এক্ষেত্রে কখন রাশিটি ধনাত্মক, কখন ঋণাত্মক এটা বের করে নিতে হবে।

$(x-3)(x+2) < 0 \Rightarrow -2 < x < 3$

আবার, $(x-3)(x+2) > 0 \Rightarrow x > 3$ or $x < -2$

$\therefore \int_{-4}^4 |(x-3)(x+2)| dx = \int_{-4}^{-2} (x-3)(x+2) dx - \int_{-2}^3 (x-3)(x+2) dx + \int_3^4 (x-3)(x+2) dx$





Related Questions:

01. $\int_0^2 |x - 1| dx = ?$ [DU'20-21]
 (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) $\frac{1}{2}$

সমাধান: (b); $\int_0^2 |x - 1| dx$

$$\int_0^1 -(x - 1) dx + \int_1^2 (x - 1) dx = -\left[\frac{x^2}{2} - x\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^2 = -\left[\frac{1}{2} - 1 - 0\right] + \left[\left(\frac{4}{2} - 2\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right]$$

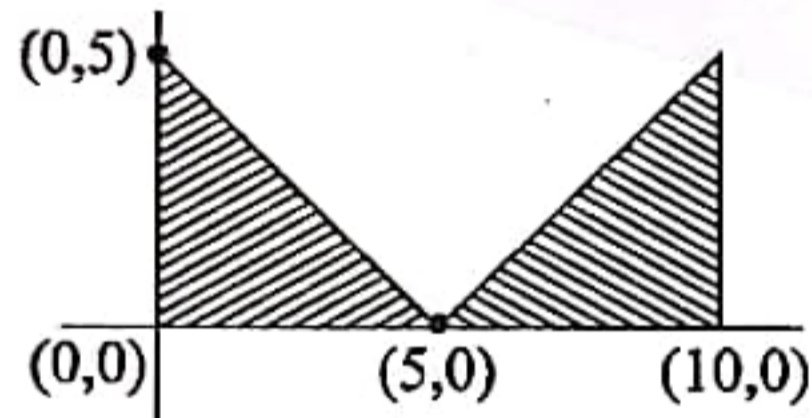
$$= -\left[\frac{1}{2} - 1\right] + \left[0 - \left(-\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

02. $\int_0^{10} |x - 5| dx = ?$ [DU'15-16]
 (a) $\frac{25}{2}$ (b) 25 (c) 50 (d) 5

সমাধান: (b); $\int_0^{10} |x - 5| dx = -\int_0^5 (x - 5) dx + \int_5^{10} (x - 5) dx = -\left[\frac{x^2}{2} - 5x\right]_0^5 + \left[\frac{x^2}{2} - 5x\right]_5^{10}$

$$= -\left[\frac{25}{2} - 25\right] + \left[\frac{100}{2} - 5 \times 10 - \frac{25}{2} + 5 \times 5\right] = \frac{25}{2} + \left[50 - 50 - \frac{25}{2} + 25\right] = 25$$

বিকল্প:



$$\int_0^{10} |x - 5| dx = \frac{1}{2} \times 5 \times 5 + \frac{1}{2} \times 5 \times 5 = 25$$

03. $\int_{-1}^2 |x| dx = ?$ [RU'15-16]
 (a) $3/2$ (b) 1 (c) 3 (d) $5/2$

সমাধান: (d); $\int_{-1}^2 |x| dx = \int_{-1}^0 (-x) dx + \int_0^2 x dx = \left[-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = -0 - \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{4}{2} - \frac{0}{2} = \frac{5}{2}$

Question Type-14: $\frac{f'(x)}{f(x)}$ সংক্রান্ত

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c$$

Example-1: $\int \frac{3x^2+2}{x^3+2x} dx = \ln|x^3 + 2x| + c$

হরকে differentiation করে সরাসরি লব পাওয়া যেতে পারে অথবা এর গুণিতক পাওয়া যেতে পারে।

Example-2: $\int \frac{4x^2+10}{x^2+5x-2} dx = \int \frac{2(2x^2+5)}{x^2+5x-2} dx = 2 \ln|x^2 + 5x - 2| + c$

Related Questions:

01. $\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx = ?$ [RU'17-18]
 (a) $\frac{1}{2} (\ln 2)^2$ (b) $\frac{1}{2} \ln 2$ (c) ∞ (d) 0

সমাধান: (a); $\int_0^{\ln 2} y \cdot dy = \frac{1}{2} [y^2]_0^{\ln 2} = \frac{1}{2} (\ln 2)^2$

02. If $\int_1^4 f(x) dx = 5$ the value of $\int_0^1 f(3x + 1) dx$ is- [DU'16-17]
 (a) $\frac{5}{4}$ (b) $\frac{4}{3}$ (c) $\frac{5}{3}$ (d) 5

সমাধান: (c); ধরি, $z = 3x + 1 \Rightarrow dz = 3dx$; যখন $x = 0, z = 1$

এবং $x = 1, z = 4 \therefore \int_0^1 f(3x + 1) dx = \frac{1}{3} \int_1^4 f(z) dz = \frac{5}{3}$



03. $\int_2^3 \frac{x}{x^2+1} dx$ এর মান কত?

[JU'15-16]

(a) $\frac{1}{2} \ln 2$

(b) $\frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$

(c) $\ln 2$

(d) $2 \ln 2$

সমাধান: (a); $\int_2^3 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} [\ln|x^2+1|]_2^3 = \frac{1}{2} \ln 2$

04. $\int \frac{(\cos x - x \sin x + 3x^2)}{x \cos x + x^3} dx =$ কত?

[CU'13-14]

(a) $\frac{\sin x + x \cos x}{x \sin x + 3x} + c$ (b) $\log(x^3 + x \cos x) + c$ (c) $\log\left(\frac{\sin x + x \cos x}{x^2 + x \sin x}\right) + c$ (d) $\log\left(\frac{\sin x + x \cos x}{x^2 + x \sin x}\right)$

সমাধান: (b); $x \cos x + x^3 = t$ $(\cos x - x \sin x + 3x^2) dx = dt$

$$\int \frac{\cos x - x \sin x + 3x^2}{x \cos x + x^3} dx = \int \frac{dt}{t} = \ln(t) + c = \ln(x^3 + x \cos x) + c$$

Question Type-15: uv method

$$\int uv dx = u \int v dx - \int \left\{ \frac{du}{dx} \int v dx \right\} dx$$

কাকে u, কাকে v ধরতে হবে এটা LIATE শব্দ থেকে decide করা হয়।

L → Logarithmic function (ln, log)

I → Inverse function (\tan^{-1} , \sin^{-1} , ...)

A → Algebraic function (x^2 , x^3 , ...)

T → Trigonometric function ($\sin x$, $\cos x$...)

E → Exponential function (e^x , a^x ...)

LIATE শব্দ অনুসারে যেটি আগে থাকবে সেটা u ধরবে।

Ex-1: $\int x e^x dx$

এক্ষেত্রে, x → Algebraic = u

e^x → exponential = v $\therefore \int x e^x = x \int e^x dx - \int 1 \cdot (\int e^x dx) dx = x e^x - e^x + c$

Short method:

যাকে u ধরবে তাকে differentiation ও যাকে v ধরবে তাকে integration করতে থাকবে যতক্ষণ পর্যন্ত না 0 আসে।

Ex-2: $\int x^3 e^x dx$

<u>u</u>	<u>v</u>	
x^3	e^x	
$3x^2$	e^x	→ +
$6x$	e^x	→ -
6	e^x	→ +
0	e^x	→ -

* উপর থেকে +, -, +, - এভাবে দিতে হবে। * arrow বরাবর গুণ করে যোগ করলেই answer পাওয়া যায়।

$\therefore \int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x + c$





Special trigonometric exponent একসাথে থাকলে,

$$\int e^{ax} \sin(bx + c) dx = \frac{TD(E) - ED(T)}{a^2 + b^2}$$

T → Trigonometric function

D(E) → Differentiation of exponent

D(T) → Differentiation of trigonometric

E → exponent function

$$\text{Ex: } \int e^{3x} \sin(7x - 3) dx = \frac{\sin(7x-3) \cdot 3e^{3x} - 7e^{3x} \cos(7x-3)}{3^2 + 7^2}$$

Related Questions:

01. $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$ এর মান কোনটি? [KU'19-20]

(a) $\tan^{-1}(e^{2x}) + c$ (b) $\tan^{-1}(e^{-x}) + c$ (c) $\tan^{-1}(e^x) + c$ (d) $\log(e^x) + c$

সমাধান: (c); $I = \int \frac{dx}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1}$

ধরি, $e^x = z \therefore e^x dx = dz$

$$\therefore I = \int \frac{dz}{1+z^2} = \tan^{-1} z + c = \tan^{-1}(e^x) + c$$

02. $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} =$ কোনটি? [DU'09-10, RU'09-10, JU'10-11, KU'14-15, 16-17, JU'17-18]

(a) $\sin^{-1}(e^x)$ (b) $\frac{1}{1+e^x}$ (c) $\cos^{-1}(e^{-x})$ (d) $\tan^{-1}(e^x)$

সমাধান: (d); $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1} = \int \frac{dz}{z^2 + 1}$ [let, $z = e^x \Rightarrow dz = e^x dx$]
 $= \tan^{-1} z + c = \tan^{-1}(e^x) + c$

03. $\int x \ln x dx =$ কত? [Ans: c][JU'17-18]

(a) $\frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \frac{1}{2}x^2 + C$ (b) $\frac{1}{2}x^2 \ln(x) + \frac{1}{2}x^2 + C$ (c) $\frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \frac{1}{4}x^2 + C$ (d) $\frac{1}{2}x^2 \ln(x) + \frac{1}{4}x^2 + C$

04. $\int f(x) dx = x + e^{2x}$ হলে $f(x)$ কোনটি? [CU'17-18]

(a) $1 + 2e^{2x}$ (b) $1 + e^{2x}$ (c) $1 + \frac{1}{2}e^{2x}$ (d) $x^2 + e^{2x}$

সমাধান: (a); $\int f(x) dx = x + e^{2x} \Rightarrow f(x) = \frac{d}{dx}(x + e^{2x}) = 1 + 2e^{2x}$

05. $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1+e^x} dx$ এর মান কত? [JU'16-17]

(a) $\ln \frac{3}{2}$ (b) 0 (c) $\ln \frac{2}{3}$ (d) কোনটিই নয়

সমাধান: (a); $\int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{1+e^x} dx = [\ln(1 + e^x)]_0^{\ln 2} = \ln(3/2)$

06. $\int_0^1 xe^x dx$ এর মান কত? [JU'16-17]

(a) $(e + 1)$ (b) $(e - 1)$ (c) $\frac{1}{2}(e + 1)$ (d) $\frac{1}{2}(e - 1)$

সমাধান: (No correct answer); $\int_0^1 xe^x dx = [e^x \cdot x - e^x \cdot 1]_0^1 = 1$





07. $\int \log x \, dx$ সমান কত? [KU'06-07, CU'06-07, JU'09-10, RU'07-08, 08-09, 10-11, JnU'15-16]

- (a) $x \log x - x$ (b) x (c) $\frac{1}{x}$ (d) $x \log x + x$

সমাধান: (a); $\int \log x \, dx = \log x \int dx - \int \left(\frac{d \log x}{dx} \int dx \right) dx = x \log x - x + c$

08. $\int e^x \left\{ \frac{1}{1-x} + \frac{1}{(x-1)^2} \right\} dx = ?$ [RU'15-16]

- (a) $\frac{e^x}{1-x}$ (b) $\frac{x}{1-e^x}$ (c) $\frac{e^x}{x-1}$ (d) $\frac{e^x}{(x-1)^2}$

সমাধান: (a); ধরি, $\frac{e^x}{1-x} = z \Rightarrow \frac{(1-x)e^x + e^x}{(1-x)^2} dx = dz \Rightarrow e^x \left\{ \frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2} \right\} dx = dz \therefore e^x \left\{ \frac{1}{1-x} + \frac{1}{(x-1)^2} \right\} dx = dz$

\therefore নির্ণেয় যোগজ = $\int e^x \left\{ \frac{1}{1-x} + \frac{1}{(x-1)^2} \right\} dx = \int dz = z + c = \frac{e^x}{1-x} + c$

09. $\frac{dy}{dx} = e^x(\sin x + \cos x)$ হলে y এর মান কত হবে? [CU'15-16]

- (a) $e^x \cos x$ (b) $e^x \sec x$ (c) $e^x \sin x$ (d) $e^x \operatorname{cosec} x$ (e) $e^x(\cos x - \sin x)$

সমাধান: (c); $y = e^x \sin x \therefore \frac{dy}{dx} = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x(\sin x + \cos x)$

10. $\int \frac{dy}{5e^{5y}} =$ কত? [JU'14-15]

- (a) $\frac{1}{15e^{5y}}$ (b) $\frac{1}{15} e^{5y}$ (c) $\frac{1}{5} e^{5y}$ (d) $-\frac{1}{15} e^{-5y}$

সমাধান: (none); $\int \frac{dy}{5e^{5y}} = \frac{1}{5} \int e^{-5y} dy = \frac{1}{5} \times \frac{e^{-5y}}{(-5)} = -\frac{1}{25 e^{5y}}$

11. $\int \sin^{-1} x \, dx$ সমান- [JnU'14-15]

- (a) $\sin^{-1} x + \sqrt{(1-x^2)} + c$ (b) $x \sin^{-1} x + \sqrt{(1-x^2)} + c$
(c) $\sin^{-1} x + c$ (d) $\sin^{-1} x + \sqrt{(1-x)} + c$

সমাধান: (b); $\int x^0 \cdot \sin^{-1} x \cdot dx = \sin^{-1} x \cdot \int x^0 \cdot dx - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \times x \cdot dx$

Question Type-16: Others

Ex-1: $\int \sqrt{1 + \sin 2\theta} \, d\theta = \int \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta} \, d\theta$
 $= \int (\sin \theta + \cos \theta) \, d\theta = -\cos \theta + \sin \theta + c$

এমন কিছু কিছু problems আছে যা উপরের নিয়মগুলোর মধ্যে পড়ে না।

এর পাশাপাশি direct সূত্র থেকে mcq হয়। সব সূত্রগুলো ভালোভাবে আয়ত্ত করতে হবে।

$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(a+b-x) \, dx$.

অর্থাৎ x এর স্থলে (upper limit + lower limit - x) লিখা যায়।

Ex-02: $\int_0^4 y\sqrt{4-y} \, dy = \int_0^4 (4-y)\sqrt{4-(4-y)} \, dy = \int_0^4 (4-y)\sqrt{y} \, dy = \int_0^4 (4\sqrt{y} - y\sqrt{y}) \, dy = \frac{128}{15}$

Related Questions:

01. যদি $\int \phi(x) \, dx = \ln(\ln x) + c$ হয়, যেখানে c একটি ধ্রুবক, তবে $\phi(x) = ?$ [GST'20-21]

- (a) $x \ln(\ln x) + x$ (b) $\frac{x}{\ln x}$ (c) $\frac{1}{x \ln x}$ (d) $x \ln x$

সমাধান: (c); $\int \phi(x) \, dx = \ln(\ln x) + c \Rightarrow \phi(x) = \frac{d}{dx} [\ln(\ln x) + c] = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} + 0 = \frac{1}{x \ln x}$





02. $\int_0^4 f(x)dx = 6$ হলে $\int_1^5 f(x+1)dx$ এর মান কত?

[Ans: d][BAU'18-19]

- (a) 0 (b) 1 (c) 5 (d) 6

সমাধান: (d); ধরি, $x+1 = t \Rightarrow t-1 = x \therefore t=5$ হলে $x=4$; $t=1$ হলে $x=0$

$$\therefore \int_1^5 f(t)dt = \int_0^4 f(x)dx = 6$$

03. $\int \sqrt{2x+3} dx$ এর মান কত?

[JU'16-17]

- (a) $\frac{1}{3}(2x+3)^{\frac{3}{2}} + c$ (b) $-\frac{1}{3}(2x+3)^{-\frac{1}{2}} + c$ (c) $\frac{2}{3}(2x+3)^{\frac{3}{2}} + c$ (d) কোনটিই নয়

$$\text{সমাধান: (a); } \int \sqrt{2x+3} dx = \frac{(2x+3)^{\frac{1}{2}+1}}{(\frac{1}{2}+1) \times 2} + c = \frac{1}{3}(2x+3)^{\frac{3}{2}} + c$$

04. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2\theta}{\cos^2 \theta} d\theta = ?$

[RU'15-16]

- (a) $\frac{\pi}{2} - 1$ (b) $\frac{\pi}{4} - 1$ (c) $\frac{\pi}{3} - 2$ (d) $2 - \frac{\pi}{4}$

$$\text{সমাধান: (a); } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2\theta}{\cos^2 \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos^2 \theta - 1}{\cos^2 \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = 2[\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} - [\tan \theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

05. ধনাত্মক x এর জন্য $F(x) = \int_1^x \ln t dt$ হলে $F'(x) = ?$

[DU'13-14]

- (a) $\frac{1}{x}$ (b) $\ln x$ (c) $x \ln x$ (d) $x \ln x - x$

$$\text{সমাধান: (b); } \int \ln t dt = \ln t \int dt - \int \left\{ \frac{d}{dt} (\ln t) \int dt \right\} dt = t \ln t - t$$

$$\therefore F(x) = x \ln x - x - 1 \cdot \ln 1 - 1 = x \ln x - x - 1 ; f'(x) = x \cdot \frac{1}{x} + \ln x - 1 = \ln x$$

06. $\int \sqrt{1-\sin 2x} dx$ এর মান কত?

[RU'13-14]

- (a) $\cos 2x + c$ (b) $\cos x + \sin x + c$ (c) $-(\cos x + \sin x) + c$ (d) $\cos x - \sin x + c$

$$\text{সমাধান: (b,c); } \int \sqrt{(\sin x - \cos x)^2} dx = \int \pm(\sin x - \cos x) dx = \pm(-\cos x - \sin x) + c \\ = +(\cos x + \sin x) + c, -(\cos x + \sin x) + c$$

Question Type-17: যোগজীকরণের সাহায্যে ক্ষেত্রফল

(i) $a \leq x \leq b$ সীমার মধ্যে x অক্ষ $y = f(x)$ ফাংশন দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \int_a^b y dx$

(ii) $a \leq y \leq b$ সীমার মধ্যে y অক্ষ $x = f(y)$ ফাংশন দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \int_a^b x dy$

(iii) $y_1 = f_1(x)$ এবং $y_2 = f_2(x)$ ফাংশনের দুইটি দ্বারা সীমাবদ্ধ অংশের ক্ষেত্রফল $= \int_a^b (y_1 - y_2) dx$; যেখানে $a \leq x \leq b$.

(iv) $x_1 = f_1(y)$ এবং $x_2 = f_2(y)$ বক্ররেখার $y = a$ এবং $y = b$ বিন্দুতে আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল, $A = \int_a^b (x_1 - x_2) dy$



◆ **IMPORTANT RESULT:**

(i) $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের- একটি চতুর্ভাগের ক্ষেত্রফল = $\frac{\pi a^2}{4}$ বর্গ একক এবং মোট ক্ষেত্রফল = πa^2 বর্গ একক।

(ii) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্ত দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের-

একটি চতুর্ভাগের ক্ষেত্রফল = $\frac{\pi ab}{4}$ বর্গ একক এবং মোট ক্ষেত্রফল = πab বর্গ একক।

(iii) $y^2 = 4ax$ এবং $x^2 = 4ay$ পরাবৃত্ত দুইটি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\frac{16}{3} a^2$.

(iv) $y^2 = 4ax$ এবং $y = mx$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\frac{8a^2}{2m^3}$.

(v) $x^2 = 4ay$ এবং $y = mx$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\frac{8}{3} a^2 m^3$.

Related Questions:

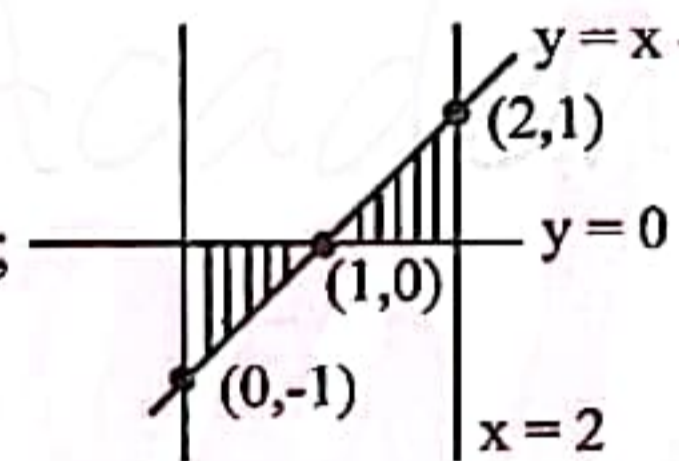
01. $y = x^2, x$ -অক্ষ, $x = 1$ এবং $x = 3$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত? [JU'20-21]

- (a) $\frac{26}{3}$ (b) $\frac{25}{3}$ (c) 8 (d) 9

সমাধান: (a); ক্ষেত্রফল = $\int_1^3 y dx = \int_1^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^3 = \frac{1}{3} (3^3 - 1^3) = \frac{26}{3}$ ব.একক।

02. $[0,2]$ ব্যবধিতে $y = x - 1$ এবং $y = 0$ রেখা দ্বারা আবদ্ধ অঞ্চলের মোট ক্ষেত্রফল কত? [DU'19-20]

- (a) $\int_0^2 (x - 1) dx$ (b) $\int_0^2 |x - 1| dx$ (c) $2 \int_1^2 (1 - x) dx$ (d) $2 \int_0^1 (x - 1) dx$

সমাধান: (b);  (যেহেতু ক্ষেত্রফল সবসময়ই ধনাত্মক এবং পরমমানের সাহায্যে লিখা হয়)

$$\therefore \text{Area} = \int_0^2 |x - 1| dx$$

03. $y = x^{\frac{2}{3}} \ln x$ বক্ররেখার প্রথম চতুর্থাংশে $x = 8$ রেখার সাথে আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত? [SUST'19-20]

- (a) ∞ (b) 0 (c) $-\infty$
(d) $\frac{9}{25} (160 \ln 2 - 31)$ (e) 1

সমাধান: (d); $y = 0 \Rightarrow x^{\frac{2}{3}} \ln x = 0 \therefore \ln x = 0 \therefore x = 1$ [NB: $x = 0$ হলে $\ln(0)$ হয়ে যায়, তাই $x \neq 0$]

$0 < x < 1$ এর জন্য $y = x^{\frac{2}{3}} \ln x$ বক্ররেখাটি চতুর্থ চতুর্ভাগে অবস্থান করে, কারণ $0 < x < 1$ এর জন্য $\ln x < 0$


$$\therefore A = \int_1^8 x^{\frac{2}{3}} \ln x dx = \left[\ln x \times \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} - \int \frac{1}{x} \times \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} dx \right]_1^8 = \left[\frac{3}{5} \ln x \times x^{\frac{5}{3}} - \left(\frac{3}{5} \right)^2 \times x^{\frac{5}{3}} \right]_1^8$$

$$= \frac{9}{25} \left(\frac{5}{3} \ln 8 \times 8^{\frac{5}{3}} - 8^{\frac{5}{3}} - 0 + 1 \right) = \frac{9}{25} (160 \ln 2 - 31)$$



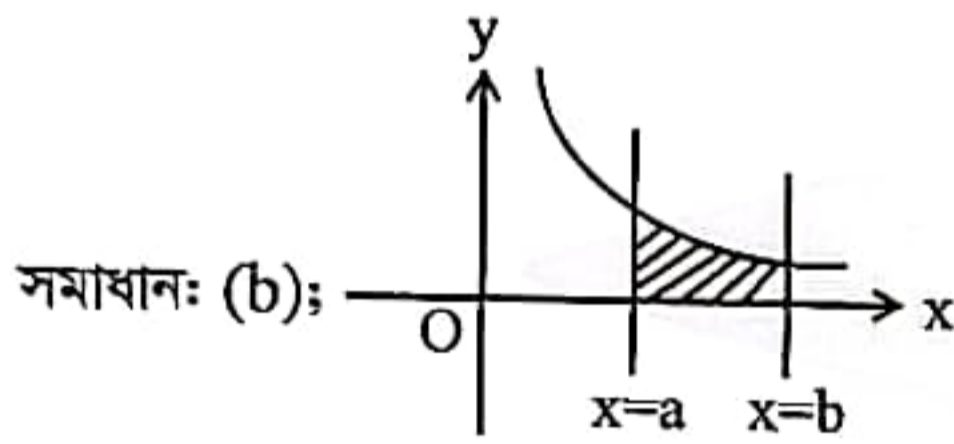


04. $y = x^2$, $x = 1$, $x = 3$ এবং x -অক্ষ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল- [DU'17-18]
 (a) $26/3$ sq units (b) $80/3$ sq units (c) $8/3$ sq units (d) $35/3$ sq units

সমাধান: (a);  $A = \int_1^3 x^2 dx = \left(\frac{x^3}{3}\right)_1^3 = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$

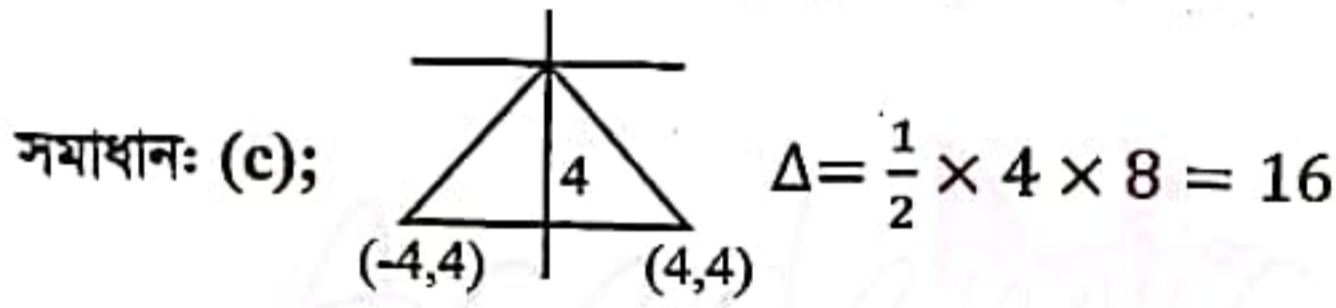
05. $\frac{x}{4} + \frac{y}{5} = 1$, x অক্ষরেখা ও y অক্ষরেখা দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কোনটি? [Ans: a][JU'17-18]
 (a) 10 (b) 5 (c) 2 (d) 20

06. $xy = c^2$ অধিবৃত্ত, x -অক্ষ এবং $x = a$ ও $x = b$ রেখা দুইটি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত? [JU'17-18]
 (a) $c^2 \ln\left(\frac{1}{ab}\right)$ (b) $c^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right)$ (c) $c^2 \ln(ab)$ (d) $c^2 \ln\left(\frac{a}{b}\right)$



$$\Delta = \int_{x_1}^{x_2} y dx = \int_a^b \frac{c^2}{x} dx = c^2 [\ln x]_a^b = c^2 \ln \frac{b}{a}$$

07. $y = -|x|$, x অক্ষ রেখা ও $y = -4$ রেখার দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত? [JnU'17-18]
 (a) 8 sq. unit (b) 0 sq. unit (c) 16 sq. unit (d) 32 sq. unit



08. $y^2 = 4ax$ এবং $x^2 = 4ay$ পরাবৃত্ত দুটি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক? [Ans: d][RU'17-18]
 (a) $16a^2$ (b) $3a^2$ (c) $\frac{3a^2}{16}$ (d) $\frac{16a^2}{3}$

09. $y = 3x$, x -অক্ষ ও $x = 4$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক? [RU'17-18]
 (a) 12 (b) 24 (c) 36 (d) 48

সমাধান: (b); $x = 4$ হলে, $y = 12$ \therefore ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times 4 \times 12 = 24$ বর্গ একক।

10. $y = x$, $y = 0$ রেখা দুই এবং $x^2 + y^2 = 16$ বৃত্ত দ্বারা প্রথম চতুর্ভাগে আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল- [DU'16-17]
 (a) 2π sq. units (b) 3π sq. units (c) 4π sq. units (d) 5π sq. units

সমাধান: (a); আবদ্ধ অংশটি বৃত্তের $\frac{1}{8}$ অংশ

$$\therefore \text{ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{8} \times \pi r^2 = \frac{1}{8} \times \pi \times 16 = 2\pi \text{ sq. units}$$



11. একটি ধ্রুবককে সময়ের সাপেক্ষে সমাকলন করলে কি পাওয়া যায়? [Ans: a][RU'16-17]
 (a) সরলরেখা (b) বক্ররেখা (c) বৃত্ত (d) কোনটিই নয়

12. জ্যামিতিকভাবে $\int_a^b f(x) dx$ দ্বারা কী বোঝায়? [Ans: b][KU'16-17]
 (a) ফাংশন (b) ক্ষেত্রফল (c) আয়তন (d) দৈর্ঘ্য



13. $y^2 = 16x$ এবং $y = 4x$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল-

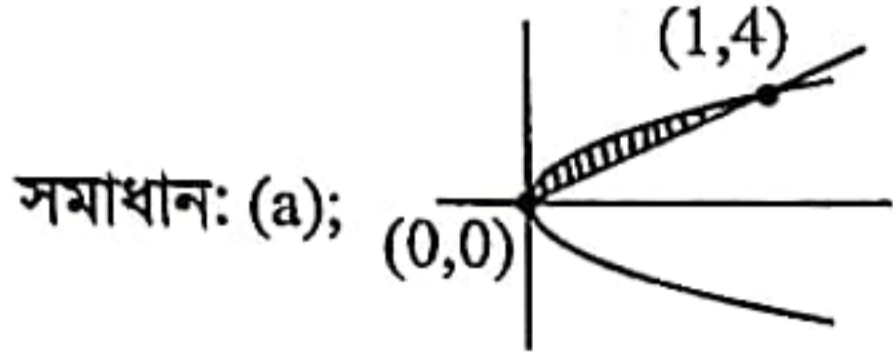
[DU'07-08,11-12,15-16]

(a) $\frac{2}{3}$ unit²

(b) $-\frac{2}{3}$ unit²

(c) $\frac{3}{2}$ unit²

(d) $\frac{1}{3}$ unit²



$$\text{ক্ষেত্রফল} = \int_0^1 (4\sqrt{x} - 4x) dx = \int_0^1 [4x^{\frac{1}{2}} - 4x] dx = \left[4 \times x^{\frac{3}{2}} \times \frac{2}{3} - 4 \cdot \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3} \text{ unit}^2$$

14. $y = x$ এবং $y = x^2$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল (বর্গ এককে)-

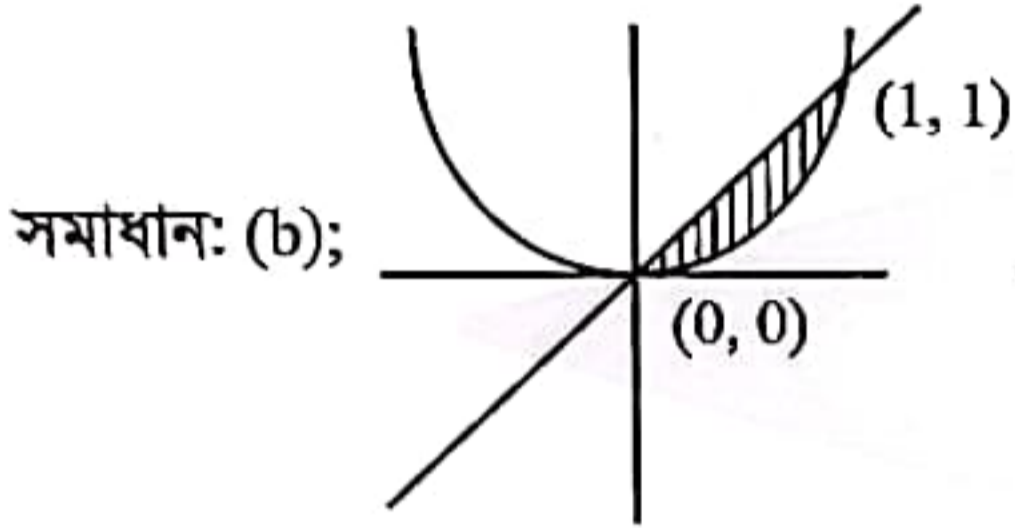
[DU'14-15]

(a) $\frac{5}{6}$

(b) $\frac{1}{6}$

(c) $-\frac{1}{6}$

(d) $\frac{1}{3}$



$$\therefore \int_0^1 (x - x^2) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

15. $y^2 = 4x$ ও $y = x$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রে ক্ষেত্রফল-

[DU'05-06,08-09,10-11,RU'10-11,JU'14-15]

(a) $\frac{3}{8}$ sq.units

(b) $\frac{8}{3}$ sq.units

(c) 3 sq.units

(d) 8 sq.units

সমাধান: (b); $y^2 = 4x \Rightarrow y = 2\sqrt{x}$ আর $y = x$ এর ছেদবিন্দু (0, 0) এবং (4, 4)

$$\therefore \text{ক্ষেত্রফল} \int_0^4 (2\sqrt{x} - x) dx = \left[2 \frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^2}{2} \right]_0^4 = \frac{8}{3}$$

16. $y = x$ সরলরেখা, x -অক্ষ এবং $x = 4$ কোনটি দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল -

[JU'09-10,14-15]

(a) 8

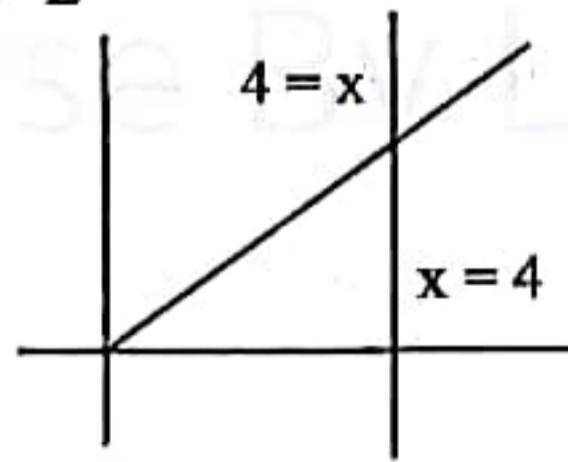
(b) 2

(c) 4

(d) 6

সমাধান: (a); $\therefore \int_0^4 y dx$

$$\int_0^4 y dx = \frac{1}{2} (x^2)_0^4 = \frac{4^2}{2} = 8$$



17. $y = -\sqrt{a^2 - x^2}$ ও $y = 0$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল-

[DU'13-14]

(a) $\frac{1}{4} \pi a^2$

(b) $\frac{1}{2} \pi a^2$

(c) πa^2

(d) $\frac{1}{2} a^2$

সমাধান: (b); $y = -\sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow y^2 = a^2 - x^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = a^2$ যা বৃত্তের সমীকরণ তার (-) মাইনাস থাকায় চিত্র

অর্ধবৃত্ত ক্ষেত্রফল আসবে। ফলে ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \pi a^2$.





[DU'13-14]

18. $y = -\sqrt{a^2 - x^2}$ ও $y = 0$ দ্বারা আবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল-

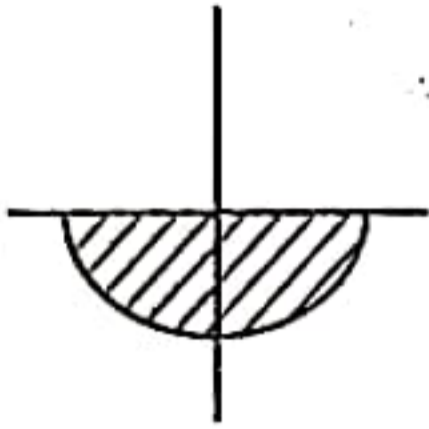
(a) $\frac{1}{4}\pi a^2$

(b) $\frac{1}{2}\pi a^2$

(c) πa^2

(d) $\frac{1}{2}a^2$

সমাধান: (b);



$$y = -\sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow y^2 = a^2 - x^2$$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = a^2$ যা বৃত্তের সমীকরণ তার (-) মাইনাস থাকায় চিত্র অর্ধবৃত্ত ক্ষেত্রফল আসবে। ফলে ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2}\pi a^2$.

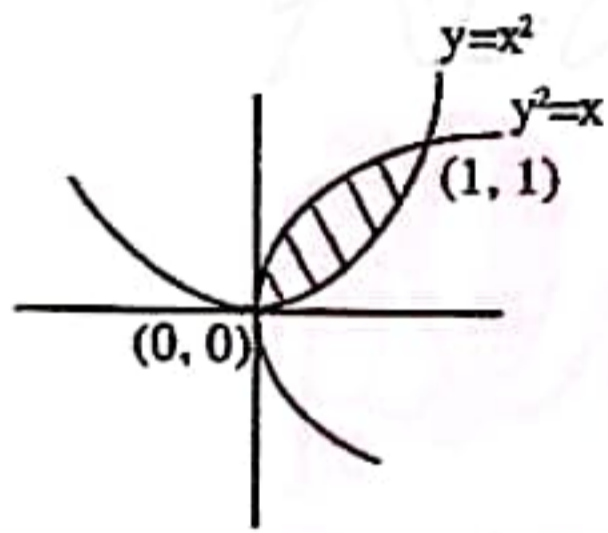
Written

01. $y = x^2$ এবং $x = y^2$ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান: $y = x^2$ (i); $x = y^2$ (ii)

(i) এ $x = y^2$ বসিয়ে পাই, $y = y^4 \Rightarrow y(y^3 - 1) = 0 \therefore y = 0, 1$

\therefore (ii) হতে, $y = 0$ হলে $x = 0$; $y = 1$ হলে $x = 1$



$$\therefore \text{ক্ষেত্রফল} = \int_0^1 (-x^2 + x^{1/2}) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}x^{3/2} \right]_0^1 = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \text{ বর্গ একক।}$$

02. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ অধিবৃত্ত এবং স্থানাঙ্কের অক্ষ দুইটির অন্তর্গত ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

[RU'19-20]

সমাধান: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a} \Rightarrow \sqrt{y} = \sqrt{a} - \sqrt{x} \therefore y = (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2 = a + x - 2\sqrt{ax}$

$x = 0$ হলে, $y = a$; $y = 0$ হলে, $x = a$

$$\therefore A = \int_0^a y dx = \int_0^a (a + x - 2\sqrt{ax}) dx = \left[ax + \frac{x^2}{2} - 2\sqrt{a} \times \frac{2}{3}x\sqrt{x} \right]_0^a$$

$$= \left[a^2 + \frac{a^2}{2} - \frac{4}{3}a^2 - 0 \right] = \frac{1}{6}a^2 \text{ sq. unit}$$