অধ্যায়-০২: ভেক্টর

Question Type-01: তথ্যমূলক ও ভেক্টরের যোগ-বিয়োগ সংক্রান্ত

- (i) দ্বিমাত্রিক স্থানাংক ব্যবস্থাঃ P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y), P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর, $\overrightarrow{OP}=\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}$ $\therefore$ $|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2}$

  (ii) ত্রিমাত্রিক স্থানাংকঃ কোন বিন্দু P(x,y,z) হলে এর অবস্থান ভেক্টর, $\overrightarrow{OP}=\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ $\therefore$ $|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

- একক ভেক্টর (Unit Vector)ঃ যে ভেক্টরের মান এক একক, তাকে একক ভেক্টর বলা হয়। অর্থাৎ, কোন একটি ভেক্টরকে তার মান দিয়ে ভাগ করলে প্রদত্ত ভেক্টরের একক ভেক্টর পাওয়া যায়। যেমনঃ $\vec{A}=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}$ একটি ভেক্টর এবং $\vec{A}$ বরাবর একক ভেক্টর $\hat{a}$ হলে,

  (i) $\hat{a}=\frac{\vec{A}}{|A|}=\frac{A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}}{\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}}$

  (ii) $\vec{A}$ এর সমান্তরাল একক ভেক্টর $=\pm\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$

  (iii) $\vec{A}$ এর সদৃশ সমান্তরাল একক ভেক্টর $=\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$

  (iv) $\vec{A}$ এর বিসদৃশ সমান্তরাল একক ভেক্টর $=-\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$

- আয়তাকার একক ভেক্টর (Rectangular Unit Vector): ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় একটি বিন্দুর অবস্থান নির্ণয়ের জন্য x-অক্ষ, y-অক্ষ, এবং z-অক্ষ বরাবর যে তিনটি একক ভেক্টর ব্যবহার করা হয়, তাদেরকে আয়তাকার একক ভেক্টর বলা হয়। x অক্ষ, y অক্ষ এবং z অক্ষ বরাবর আয়তাকার একক ভেক্টরগুলোকে যথাক্রমে $\hat{i},\hat{j},\hat{k}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

Notes:

(i) স্কেলার গুণনের ক্ষেত্রেঃ

$\hat{i}.\hat{j}=\hat{j}.\hat{k}=\hat{k}.\hat{i}=0$; [যেহেতু, $\theta=90^0$ এবং $\cos 90^0=0$]

$\hat{i}.\hat{i}=\hat{j}.\hat{j}=\hat{k}.\hat{k}=1$ [যেহেতু, $\theta=0^0$ এবং $\cos 0^0=1$]

(ii) ভেক্টর গুণনের ক্ষেত্রেঃ

$\hat{i}\times\hat{i}=j\times\hat{j}=\hat{k}\times\hat{k}=0$ [যেহেতু, $\theta=0^0$]

$\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k},\hat{j}\times\hat{k}=\hat{i},\hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$; [যেহেতু, $\theta=90^0$]

$\hat{j}\times\hat{i}=-\hat{k},\hat{k}\times\hat{j}=-\hat{i},\hat{i}\times\hat{k}=-\hat{j}$.

- দুইটি ভেক্টর $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ সংক্রান্ত বিভিন্ন রাশিঃ $\vec{A}=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}$, $\vec{B}=B_x\hat{i}+B_y\hat{j}+B_z\hat{k}$

  (i) A ভেক্টরের মান, $|\vec{A}|=A=\sqrt{A_x{}^2+A_y{}^2+A_z{}^2}$

  (ii) B ভেক্টরের মান, $|\vec{B}|=B=\sqrt{B_x{}^2+B_y{}^2+B_z{}^2}$

  (iii) $\vec{A}+\vec{B}=(A_x+B_x)\hat{i}+(A_y+B_y)\hat{j}+(A_z+B_z)\hat{k}$; $\vec{A}-\vec{B}=(A_x-B_x)\hat{i}+(A_y-B_y)\hat{j}+(A_z-B_z)\hat{k}$

Example-01: $\vec{A}=4\hat{i}-7\hat{j}+3\hat{k}$ এবং $\vec{B}=4\hat{j}-3\hat{i}-7\hat{k}$ হলে $\vec{A}+\vec{B}$ এবং $\vec{A}-\vec{B}$ এর মান কত?

সমাধানঃ দেওয়া আছে, $\vec{A}=4\hat{i}-7\hat{j}+3\hat{k}$ এবং $\vec{B}=4\hat{j}-3\hat{i}-7\hat{k}$

$\therefore \vec{A}+\vec{B}=(4\hat{i}-7\hat{j}+3\hat{k})+(4\hat{j}-3\hat{i}-7\hat{k})=\hat{i}-3\hat{j}-4\hat{k}$

$\therefore |\vec{A}+\vec{B}|=\sqrt{1^2+(-3)^2+(-4)^2}=\sqrt{1+9+16}=\sqrt{26}$

$\therefore \vec{A}-\vec{B}=(4\hat{i}-7\hat{j}+3\hat{k})-(4\hat{j}-3\hat{i}-7\hat{k})=7\hat{i}-11\hat{j}+10\hat{k}$

$\therefore |\vec{A}-\vec{B}|=\sqrt{7^2+(-11)^2+10^2}=\sqrt{49+121+100}=\sqrt{270}$

Example-02: $\overline{OA}=2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k}$ এবং $\overline{OB}=4\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$ হলে $\overline{AB}$ এবং $|\overline{AB}|$ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ $\overline{AB}=(4-2)\hat{i}+(-3-3)\hat{j}+(2+4)\hat{k}=2\hat{i}-6\hat{j}+6\hat{k}$

$\therefore |\overline{AB}|=\sqrt{4+36+36}=\sqrt{76}$

Example-03: P(2,3,4) এবং Q(3,2,-1) বিন্দু দুইটির মান থেকে PQ, QP নির্ণয় কর।

সমাধানঃ $\vec{P}=2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$, $\vec{Q}=3\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$

$\therefore \overline{PQ}=(3-2)\hat{i}+(2-3)\hat{j}+(-1-4)\hat{k}=\hat{i}-\hat{j}-5\hat{k}$

and, $\overline{QP}=(2-3)\hat{i}+(3-2)\hat{j}+(4+1)\hat{k}=-\hat{i}+\hat{j}+5\hat{k}$

Related Questions:

01. $A=3\hat{i}-\hat{j}-4\hat{k}$ এবং $B=-2\hat{i}+4\hat{j}-3\hat{k}$ হলে $|A+B|$ এর মান কত? **[JU'18-19]**

(a) $\sqrt{29}$ (b) $\sqrt{39}$ (c) $\sqrt{49}$ (d) $\sqrt{59}$

সমাধানঃ **(d);** $\vec{A}+\vec{B}=\hat{i}+3\hat{j}-7\hat{k}$; $|\vec{A}+\vec{B}|=\sqrt{1^2+3^2+7^2}=\sqrt{59}$

02. xy তলের সমান্তরাল এবং $2\hat{i}-2\hat{j}+6\hat{k}$ এর সাথে সমকোণে অবস্থিত একক ভেক্টর কোনটি? **[RU'18-19]**

(a) $\pm\frac{\hat{i}+\hat{j}}{\sqrt{2}}$ (b) $\pm\frac{\hat{k}}{\sqrt{2}}$ (c) $\pm\frac{\hat{i}+\hat{j}}{\sqrt{44}}$ (d) $\pm\frac{\hat{i}+\hat{j}}{2\sqrt{2}}$

সমাধানঃ **(a);** ধরি, একক ভেক্টরটি $(a\hat{i}+b\hat{j})$

এখন, $2a-2b=0 \Rightarrow a=b$ $\therefore$ একক ভেক্টর $=\pm\frac{a(\hat{i}+\hat{j})}{\sqrt{2}a}=\pm\frac{\hat{i}+\hat{j}}{\sqrt{2}}$

03. a এর মান কত হলে $\frac{1}{2}\underline{i}+\frac{1}{3}\underline{j}+a\underline{k}$ ভেক্টরটি একটি একক ভেক্টর হবে? **[DU'14-15]**

(a) $\pm\frac{2}{3}$ (b) $\pm\frac{\sqrt{15}}{6}$ (c) $\pm\frac{7}{6}$ (d) $\pm\frac{\sqrt{23}}{6}$

সমাধান: (d); $1=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{9}+a^2} \Rightarrow 1=\frac{13}{36}+a^2 \Rightarrow a^2=\frac{23}{36} \therefore a=\pm\frac{\sqrt{23}}{6}$

04. $\vec{a}=t\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ এবং $|\vec{a}|=7$ হলে t এর মান কত? **[JU'14-15]**

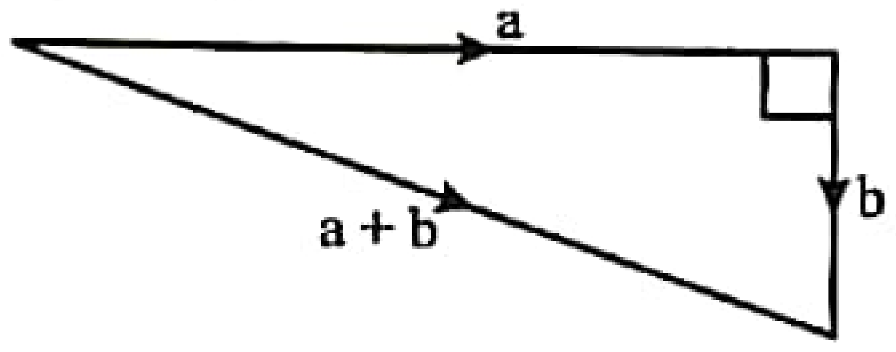
(a) 4 (b) – 3 (c) 6 (d) $\frac{3}{4}$

সমাধান: (c); $t^2+2^2+3^2=7^2 \Rightarrow t^2=36 \therefore t=6$

Question Type-02: ভেক্টরের মান ও প্রকাশ সংক্রান্ত

Example: একটি ভেক্টর a এর দিক পূর্বমুখী এবং $|a| = 12$. অপর একটি ভেক্টর b এর দিক দক্ষিণমুখী এবং $|b| = 5$ হলে $|a + b|$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: চিত্র থেকে পাই, $|a + b|^2 = 12^2 + 5^2 = 169 \therefore |a + b| = 13$.

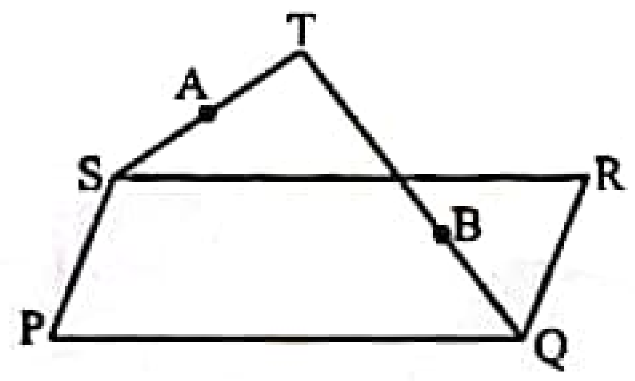


Example: চিত্রে PQTS একটি চতুর্ভুজ এবং PQRS একটি সামন্তরিক। A এবং B বিন্দু যথাক্রমে ST ও QT এর মধ্যবিন্দু। মাত্র একটি ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর:

(i) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{BA}$

(ii) $\overrightarrow{PT} + \overrightarrow{TS} + \overrightarrow{SQ} + \overrightarrow{QB}$

(iii) $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ}$



সমাধান:

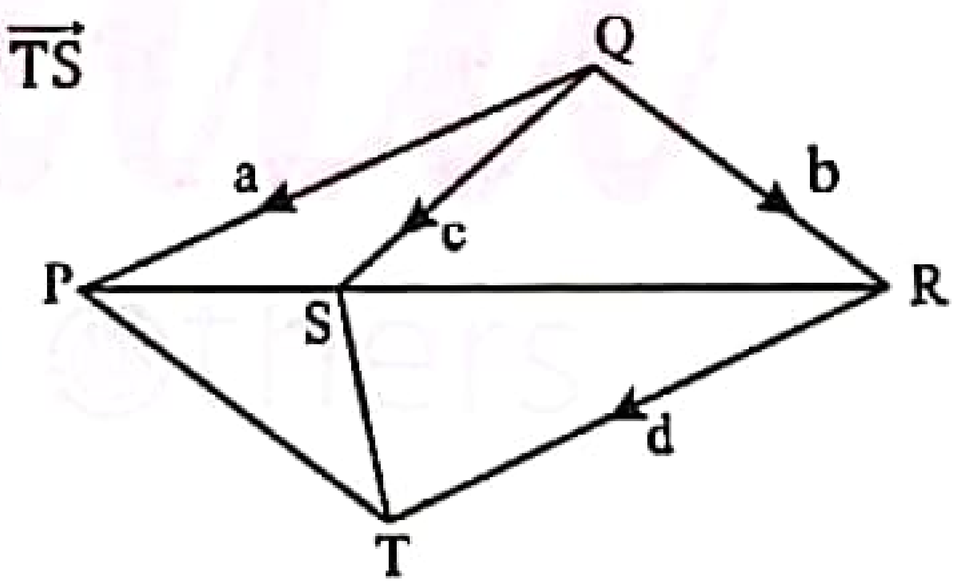
(i) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{BA} = (\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QB}) + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BA}$ (ত্রিভুজ বিধি অনুসারে) $= \overrightarrow{PA}$ (ত্রিভুজ বিধি অনুসারে)

(ii) $\overrightarrow{PT} + \overrightarrow{TS} + \overrightarrow{SQ} + \overrightarrow{QB} = (\overrightarrow{PT} + \overrightarrow{TS}) + (\overrightarrow{SQ} + \overrightarrow{QB}) = \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SB}$
(ত্রিভুজ বিধি অনুসারে) $= \overrightarrow{PB}$ (ত্রিভুজ বিধি অনুসারে)

(iii) $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ} = (\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AS}) + (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ})$
$= \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{PQ}$ (ত্রিভুজ বিধি অনুসারে) $= \overrightarrow{PR}$ (সামন্তরিক বিধি অনুসারে)

Example: ডানের চিত্রে দেয়া আছে, $\overrightarrow{QP} = a, \overrightarrow{QR} = b, \overrightarrow{QS} = c$ এবং $\overrightarrow{RT} = d$, নিচের ভেক্টরগুলিকে a, b, c ও d এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

(i) $\overrightarrow{PS}$ (ii) $\overrightarrow{RP}$ (iii) $\overrightarrow{PT}$ (iv) $\overrightarrow{TS}$



সমাধান: (i) $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QS} = -a + c$

(ii) $\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QP} = -b + a$

(iii) $\overrightarrow{PT} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RT} = -\overrightarrow{RP} + \overrightarrow{RT} = b - a + d$

(iv) $\overrightarrow{TS} = \overrightarrow{TR} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{TR} + (\overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QS}) = -d - b + c$

Example: ভেক্টর a এর মান 20 একক হলে, a এর দিকে একক ভেক্টর নির্ণয় কর।

সমাধান: আমরা জানি, a এর দিকে অথবা এর সমান্তরাল দিকে একক ভেক্টর হলো $\frac{a}{|a|}$

সুতরাং নির্ণেয় একক ভেক্টর হবে $\frac{a}{20}$.

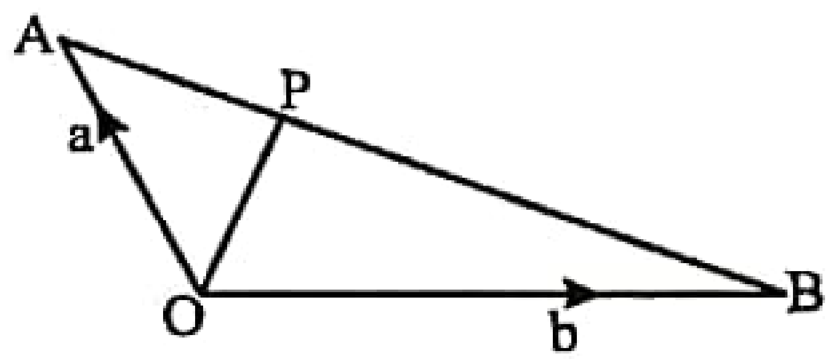
- যদি $\lambda a + \mu b = \alpha a + \beta b$, এবং a ও b অশূন্য, অসমান্তরাল ভেক্টর হয়, তাহলে $\lambda = \alpha$ এবং $\mu = \beta$

প্রমাণ: দেওয়া আছে, $\lambda a + \mu b = \alpha a + \beta b \Rightarrow (\lambda - \alpha)a + (\mu - \beta)b = 0$

$\Rightarrow (\lambda - \alpha) = 0$ এবং $(\mu - \beta) = 0$ [কারণ, a ও b উভয়ই অশূন্য এবং অসমান্তরাল ভেক্টর]

অতএব, $\lambda = \alpha$ এবং $\mu = \beta$ (প্রমাণিত)

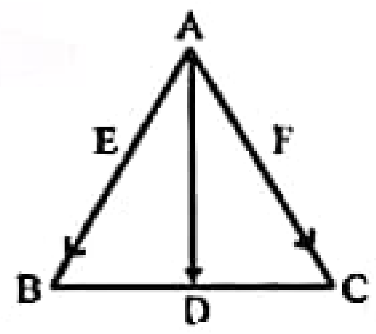
Example: ডান দিকের চিত্রে, O বিন্দুর সাপেক্ষে A ও B এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে a ও b, P বিন্দু AB কে 1 : 2 অনুপাতে বিভক্ত করেছে। P বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর নির্ণয় কর।



সমাধান: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$ (ভেক্টরের ত্রিভুজ বিধি অনুসারে) $= -a + b$
আবার, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$ ... ... (i)
কিন্তু $AP : PB = 1 : 2$, অর্থাৎ $AP = \frac{1}{3}AB$
সুতরাং, $\overrightarrow{OP} = a + \frac{1}{3}(-a + b)$ [সমীকরণ (i) হতে] $\therefore \overrightarrow{OP} = \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b.$

Related Questions:

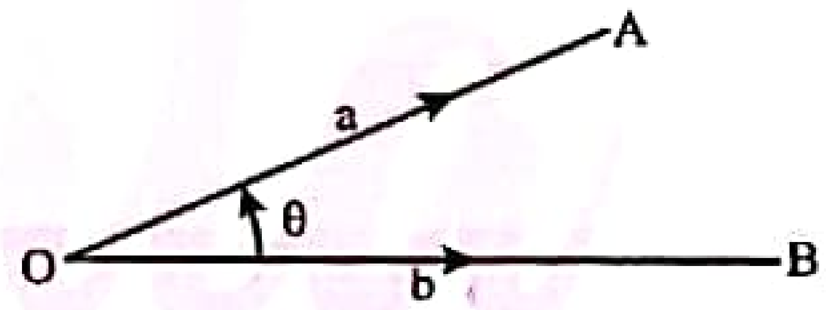
01. ABC ত্রিভুজের BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দুগুলো যথাক্রমে D, E ও F হলে- **[DU'13-14]**
(a) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ (b) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AE}$ (c) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ (d) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF}$



সমাধান: **(b)**; D, BC বাহুর মধ্যবিন্দু বলে $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$

Question Type-03: ভেক্টরের স্কেলার বা ডট গুণন

- $\bar{a}$ ও $\bar{b}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ θ হলে, $|\bar{a}||\bar{b}|\cos\theta$ কে ভেক্টরদ্বয়ের স্কেলার গুণন বলে এবং একে $\bar{a}.\bar{b}$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়। অর্থাৎ $\bar{a}.\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\theta$.
উল্লেখ্য, θ সূক্ষ্মকোণ হলে, $\cos\theta > 0$ এবং $\bar{a}.\bar{b} > 0$; θ স্থূলকোণ হলে, $\cos\theta < 0$ এবং $\bar{a}.\bar{b} < 0$ এবং $\theta = 90°$ হলে, $\cos 90° = 0$, সুতরাং $\bar{a}.\bar{b} = 0$, (যেখানে $\bar{a}$ ও $\bar{b}$ অশূন্য ভেক্টর)।
- যদি $\bar{a}$ ও $\bar{b}$ পরস্পর সমান্তরাল হয়, তাহলে $\bar{a}.\bar{b} = \pm|\bar{a}||\bar{b}|$ [কারণ $\cos 0° = 1$ এবং $\cos 180° = -1$]



বিশেষ ক্ষেত্র: $\bar{a}.\bar{a} = |\bar{a}|^2$
চিত্রে, O বিন্দুর সাপেক্ষে A ও B এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\bar{a}$ ও $\bar{b}$.
সুতরাং, $\cos\theta = \frac{\bar{a}.\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}$

Example: $2\hat{i} + a\hat{j} + k$ ও $4\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হলে, a এর মান কত?
সমাধান: $(2\hat{i} + a\hat{j} + k).(4\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}) = 0 \Rightarrow 2 \times 4 + a \times (-2) + 1 \times (-2) = 0 \Rightarrow 8 - 2a - 2 = 0 \Rightarrow a = 3$

- একক লম্ব ভেক্টর সম্পর্কিত:
চিন্তা-১: দুটি ভেক্টরের ক্রস গুণনে একটি নতুন ভেক্টর পাওয়া যায়। এর দিক ঐ ভেক্টরদ্বয়ের দ্বারা গঠিত সমতলের উপর লম্ব বরাবর।
Example: $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ ও $\vec{B} = 2\hat{i} + 10\hat{j} - 11\hat{k}$ দ্বারা গঠিত সমতলের উপর একক লম্ব ভেক্টর নির্ণয় কর।
$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 10 & -11 \end{vmatrix} = -32\hat{i} + 24\hat{j} + 16\hat{k}$ $\therefore$ একক লম্ব ভেক্টর $\frac{\vec{A}\times\vec{B}}{|\vec{A}\times\vec{B}|} = \frac{1}{\sqrt{29}}(-4\hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k})$ Ans
দ্রষ্টব্য: $\hat{i} \times \hat{j} = |\hat{i}|\,|\hat{j}|\,\sin 90°\ \hat{n} = \hat{k}$; $\hat{j} \times \hat{i} = |\hat{j}|\,|\hat{i}|\sin(-90°)\ \hat{n} = -\hat{k}$
$\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$, $\hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}$, $\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$, $\hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$, $\hat{i} \times \hat{i} = |\hat{i}|\,|\hat{i}|\sin 0°\ \hat{n} = \underline{0}$, $\hat{j} \times \hat{j} = \underline{0}$, $\hat{k} \times \hat{k} = \underline{0}$

Related Questions:

01. a-এর মান কত হলে $a\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ এবং $2a\hat{i} - a\hat{j} - 4\hat{k}$ পরস্পর লম্ব হবে? **[Ans: c] [RU'20-21]**

(a) 1, 2 (b) −1, −2 (c) 2, −1 (d) −2, 1

সমাধান: (d); $2a^2 + 2a - 4 = 0 \Rightarrow a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow a^2 + 2a - a - 2 = 0$

$\Rightarrow a(a+2) - 1(a+2) = 0 \Rightarrow (a+2)(a-1) = 0 \therefore a = 1, -2$

02. দুটি ভেক্টর পরস্পর লম্ব হওয়ার শর্ত কি? **[CU'20-21]**

(a) তাদের ডট গুণন শূন্য হয় (b) তাদের ক্রস গুণন শূন্য হয়

(c) তাদের ডট গুণন এক হয় (d) তাদের ক্রস গুণন এক হয়

সমাধান: (a); $\overline{A}.\overline{B} = 0$ হলে, $AB\cos\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = 90°$

03. $\overline{i} \times \overline{k}$ = কোনটি? **[Ans: d] [JU'17-18]**

(a) $\overline{j}$ (b) $\overline{i}$ (c) $-\overline{k}$ (d) $-\overline{j}$

04. $\vec{P} = 5\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$; $\vec{Q} = \hat{k}$ হলে $\vec{P} \times \vec{Q}$ = কত? **[Ans: a] [JU'17-18]**

(a) $-\hat{i} - 5\hat{j}$ (b) $\hat{i} - 5\hat{j}$ (c) $\hat{i} + 5\hat{j}$ (d) 0

05. $a = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $b = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ হলে নিম্নের কোনটি সত্য? **[DU'15-16]**

(a) $a.b = 0$ (b) $a \wedge b = 0$ (c) $(a+b).(a-b) = 0$ (d) $(a+b) \wedge (a-b) = 0$

সমাধান: (c); $a + b = 4\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, $a - b = -2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$ $\therefore (a+b).(a-b) = -8 + 3 + 5 = 0$

06. স্কেলার গুণনের ক্ষেত্রে নিম্নের কোনটি সত্য? **[Ans: a][CU'14-15]**

(a) এটি বিনিময়যোগ্য (b) এটি বণ্টন বিধি মেনে চলে না

(c) এটি বিনিময়যোগ্য না (d) এটি বিনিময় ও বণ্টনবিধি মেনে চলে না

Question Type-04: দুটি ভেক্টরের অন্তর্গত কোণ নির্ণয় সম্পর্কিত

Case-01: চিন্তা-১: $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ ভেক্টরদ্বয়ের ডট গুণন, $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

Case-02: $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ ভেক্টরদ্বয়ের ক্রস গুণফল, $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta \Rightarrow \theta = \sin^{-1}\frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

Example: $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ ও $\vec{b} = 2\hat{i} + 10\hat{j} - 11\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্গত কোণ কত?

সমাধানঃ $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$

$|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 10^2 + 11^2} = 15$

$\vec{a}.\vec{b} = 2 \times 2 + 2 \times 10 + 1 \times (-11) = 4 + 20 - 11 = 13$

এখন, অন্তর্গত কোণ $\theta = \cos^{-1}\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \cos^{-1}.\frac{13}{3\times15}$

Related Questions:

01. দুটি ভেক্টর $\vec{u}$ এবং $\vec{v}$ এর মধ্যবর্তী কোণ কত হলে $\vec{u}\cdot\vec{v} = 9$ এবং $|\vec{u}\times\vec{v}| = 3\sqrt{3}$ হবে? [GST'20-21]

(a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{4}$ √(c) $\frac{\pi}{6}$ (d) $\frac{2\pi}{3}$

সমাধান: (c); $|\vec{u}\times\vec{v}| = uv\sin\theta = 3\sqrt{3} \cdots (i)$

$\vec{u}.\vec{v} = uv\cos\theta = 9 \cdots (ii)$

$(i) \div (ii) \Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$

02. $2\hat{i} + 2\hat{j}$ ভেক্টরটি x-অক্ষের সাথে কত ডিগ্রী কোণ তৈরি করে? [JU'20-21]

(a) 30° (b) 45° (c) 90° (d) 180°

সমাধান: (b); $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j}$, $A_x = 2$

$\cos\theta = \frac{A_x}{|\vec{A}|} = \frac{2}{\sqrt{2^2+2^2}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \therefore \theta = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} = 45°$

03. অক্ষত্রয়ের সাথে উৎপন্ন কোণগুলি যথাক্রমে $\cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right), \cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{6}}\right)$ ও $\cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{6}}\right)$ হলে, তা নিচের কোন ভেক্টরের জন্য সত্য? [JU'19-20]

(a) $\vec{Q} = (2\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$ (b) $\vec{P} = (4\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$

(c) $\vec{P} = (4\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k})$ (d) $\vec{Q} = (2\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k})$

সমাধানঃ **(c);** কোণগুলো অনুযায়ী ভেক্টরটি হবে $(2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}) \times r$ যেখানে r হল অশূন্য ধ্রুবক। $r = 2$ হলে $4\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}$

04. অন্তর্ভূক্তি কোণের মান $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{7}}\right)$ হলে তা নিচের কোন ভেক্টরদ্বয়ের জন্য সত্য? [JU'19-20]

(a) $(2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k})$ এবং $(\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k})$ (b) $(2\hat{i} + 3\hat{j} - 3\hat{k})$ এবং $(\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k})$

(c) $(2\hat{i} - 3\hat{j} - 3\hat{k})$ এবং $(\hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{k})$ (d) $(2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k})$ এবং $(\hat{i} - 4\hat{j} - 3\hat{k})$

সমাধানঃ **(a);** $(2\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}).(\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}) = 2 - 12 - 3 = -13$

$\sqrt{4+9+1} \times \sqrt{1+16+9} \times \cos\theta = -13 \therefore \cos\theta = -\frac{\sqrt{13}}{2\sqrt{7}}$

05. $2\hat{i} - 3\hat{k}$ এবং $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ- [RU'19-20]

(a) $\cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{39}}\right)$ (b) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{39}}\right)$ (c) $\cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{-1}{39}}\right)$ (d) $\cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{36}}\right)$

সমাধানঃ **(a);** $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{2-3}{\sqrt{13}\times\sqrt{3}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{39}}\right)$

06. ভেক্টর $\vec{u} = \hat{i} + \hat{j}$ ও $\vec{v} = \hat{j} + \hat{k}$ এর অন্তর্ভুক্ত কোণ- [DU'18-19]

(a) $\cos^{-1}(1/\sqrt{3})$ (b) $\cos^{-1}(1/3)$ (c) $\cos^{-1}(1/2)$ (d) $\cos^{-1}(1/\sqrt{2})$

সমাধানঃ (c); $\cos(u\wedge v) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{u.v} = \frac{0+1+0}{\sqrt{2}.\sqrt{2}} \therefore u\wedge v = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

07. $\overline{p} = 24\hat{i} + 7\hat{j}$ এবং $\overline{q} = 20\hat{i} + 15\hat{j}$ হলে $(\overline{p} + \overline{q})$ এবং $(\overline{p} - \overline{q})$ এর অন্তবর্তী কোণ কত? [CU'18-19]

(a) 90° (b) 0° (c) 120° (d) 60°

সমাধানঃ **(a);** $\overline{A} = \overline{p} + \overline{q} = 44\hat{i} + 22\hat{j}$; $\overline{B} = \overline{p} - \overline{q} = 4\hat{i} - 8\hat{j}$

$A.B = AB\cos\theta \Rightarrow (44 \times 4 - 22 \times 8) = \sqrt{44^2 + 22^2}.\sqrt{4^2 + 8^2}\cos\theta \quad \therefore \theta = 90°$

08. এক বিন্দুতে লম্বভাবে ক্রিয়াশীল $P = 2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ ও $Q = \sqrt{3}\,\hat{i} + \sqrt{3}\,\hat{j} + \sqrt{3}\,\hat{k}$ বলের লব্ধি p বলের সাথে কত কোণ করে? [BAU'18-19]

(a) 30° (b) 45° (c) 60° (d) 90°

সমাধানঃ (Question ভুল); P ও Q এর মাঝে কোণ $= \cos^{-1}\left(\frac{2\sqrt{3}-2\sqrt{3}+\sqrt{3}}{3.3}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right) = 78.9°$

P ও Q এর মাঝে কোণ 78.9° তাই এরা লম্বভাবে ক্রিয়া করে না।

09. ভেক্টর $\vec{u} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ ও $\vec{v} = 3\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$ এর অন্তর্ভুক্ত কোণ- [DU'17-18]

(a) 60° (b) 45° (c) 30° (d) 120°

সমাধানঃ (a); $\vec{u}.\vec{v} = uv\cos\theta \Rightarrow 6 - 2 + 3 = \sqrt{2^2 + 1 + 9}.\sqrt{9 + 4 + 1}\cos\theta$

$\Rightarrow 7 = \sqrt{14}.\sqrt{14}\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{7}{14} = \frac{1}{2} \therefore \theta = 60°$

10. 5 একক এবং 6 একক মানের দুটি ভেক্টর কোন বিন্দুতে 60° কোণে ক্রিয়াশীল। $\overline{A}.\overline{B} =$ কত? [JU'17-18]

(a) 15 (b) 20 (c) 25 (d) 35

সমাধানঃ (a); $\overline{A}.\overline{B} = AB\cos\theta = 15$

11. $\vec{a} = 4\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{b} = -2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$ দুটি ভেক্টর এবং এদের অন্তর্ভুক্ত কোণ θ কত? [Ans: b][JU'17-18]

(a) 45° (b) 90° (c) 60° (d) 30°

সমাধানঃ (b); $\vec{a}.\vec{b} = 0 \therefore \theta = 90°$

12. $\vec{X} = 4\hat{i} + 2\hat{j} + 5\hat{k}$, $\vec{Y} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ কত? [RU'17-18]

(a) 0° (b) 30° (c) 60° (d) 90°

সমাধানঃ (blank); $\cos\theta = \frac{12+2-10}{\sqrt{4^2+2^2+5^2}.\sqrt{3^2+1^2+2^2}} \therefore \theta = 80.83°$

13. $2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ এবং $4\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণ কত? [JnU'16-17]

(a) 45 ° (b) 90° (c) 180° (d) 0°

সমাধান: (d) ; $\theta = \cos^{-1}\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|} = \cos^{-1}\frac{2.4+1.2+3.6}{\sqrt{14}\sqrt{56}} = \cos^{-1}\frac{28}{28} = 0$

Alternative: $4\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k} = 2\,(2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k})$ ∴ ভেক্টরদ্বয় সমান্তরাল।

14. ΔXYZ এর $XY = c, YZ = a, XZ = b$ হলে $\cos x =$? [Ans: c][CU'16-17]

(a) $\frac{a^2+b^2+c^2}{2ab}$ (b) $\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ (c) $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ (d) $\frac{\sqrt{(a^2+b^2)-c^2}}{2ab}$

15. $\overline{p} = 24\hat{i} + 7\hat{j}$ এবং $\overline{q} = 20\hat{i} + 15\hat{j}$ হলে $(\overline{p} + \overline{q})$ এবং $(\overline{p} - \overline{q})$ এর অন্তর্ভুক্ত কোণ কত? [CU'15-16]

(a) 20° (b) 90° (c) 45° (d) 30°

সমাধান: (b); $\vec{P} + \vec{Q} = 44\hat{i} + 22\hat{j}$; $\vec{P} - \vec{Q} = 4\hat{i} - 8\hat{j}$

এখন, $(\vec{P} + \vec{Q}).(\vec{P} - \vec{Q}) = 4 \times 44 - 8 \times 22 = 0 \therefore (\vec{P} + \vec{Q})$ এবং $(\vec{P} - \vec{Q})$ এর অন্তর্ভুক্ত কোণ 90°।

16. $\underline{A}=\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$ এবং $\underline{B}=6\hat{i}-3\hat{j}-2\hat{k}$ ভেক্টর দু'টির মধ্যবর্তী কোণ হচ্ছে– [CU'10-11,JU'14-15]

(a) $\cos^{-1}\frac{4}{25}$ (b) $\cos^{-1}\frac{2}{25}$ (c) $\cos^{-1}\left(\frac{4}{25}\right)$ (d) $\cos^{-1}\frac{3}{25}$

সমাধান: (d); $\underline{A}.\underline{B}=1.6+2(-3)+(-2).(-2)=6-6+4=4$

$|\underline{A}|=\sqrt{1+2^2+2^2}=3$; $|\underline{B}|=\sqrt{6^2+3^2+2^2}=7$; $\theta=\cos^{-1}\left(\frac{4}{3.7}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{4}{21}\right)$

17. $\overline{A}=\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ এবং $\overline{B}=3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ হলে $\vec{A}+\vec{B}$ এবং $\vec{A}-\vec{B}$ এর অন্তর্গত কোণের মান- [KU'14-15]

(a) 60° (b) 90° (c) 120° (d) 180°

সমাধান: (b); $\vec{A}=\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$; $\vec{B}=3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ $\therefore(\vec{A}+\vec{B}).(\vec{A}-\vec{B})=-8+3+5=0$

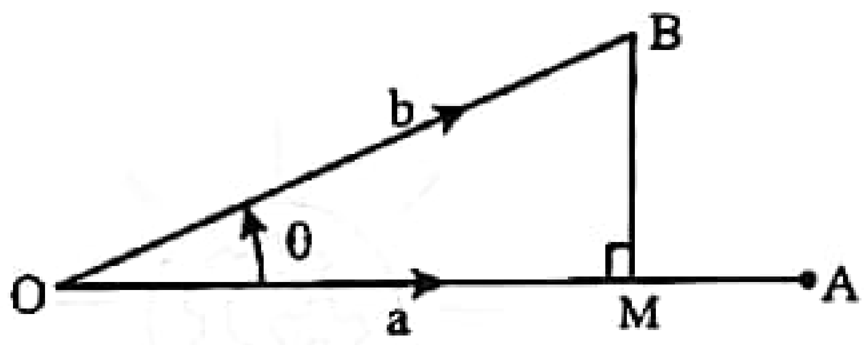
$\therefore(\vec{A}+\vec{B}).(\vec{A}-\vec{B})=-8+3+5=0$ $\therefore$ মধ্যবর্তী কোণ 90°

18. $\vec{v}$ এবং $-\vec{v}$ ভেক্টরের মধ্যবর্তী কোন কত ডিগ্রী? [KU'13-14]

(a) 0° (b) 180° (c) 360° (d) 90°

সমাধান: **(b);** $\vec{v}$ এবং $-\vec{v}$ বিপরীতমুখী

Question Type-05: অংশক ও অভিক্ষেপ সম্পর্কিত



ভেক্টরের অংশক: ডান দিকের চিত্রে ΔOBM এ, $\cos\theta=\frac{OM}{OB}\Rightarrow OM=OB\cos\theta$

দেয়া আছে, $\overline{OA}=\bar{a}$ এবং $\overline{OB}=\bar{b}$, যেখানে $\bar{a}$ ও $\bar{b}$ ভেক্টরের মধ্যবর্তী কোণ θ.

এখানে OM এবং OA এর দিক অভিন্ন; কিন্তু OM, OA এরই অংশ মাত্র।

তাই $\overrightarrow{OM}=\overline{OB}\cos\theta=\bar{b}\cos\theta$. $\therefore$ $\bar{a}$ ভেক্টরের দিক বরাবর $\bar{b}$ ভেক্টরের অংশক $=\bar{b}\cos\theta$

বি:দ্র: এখানে $\bar{a}$ ভেক্টরের দিক বরাবর $\bar{b}$ ভেক্টরের অংশক একটি ভেক্টর যার দৈর্ঘ্য হচ্ছে $\bar{b}$ ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপ।

$\therefore$ $\bar{a}$ ভেক্টরের উপর $\bar{b}$ ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপ $=|b|\cos\theta$ কিন্তু $\bar{a}.\bar{b}=|\bar{a}||\bar{b}|\cos\theta\Rightarrow\frac{\bar{a}.\bar{b}}{|\bar{a}|}=|\bar{b}|\cos\theta$

অর্থাৎ, $\bar{a}$ ভেক্টরের উপর $\bar{b}$ ভেক্টরের লম্ব অভিক্ষেপ $|\bar{b}|\cos\theta=\frac{\bar{a}.\bar{b}}{|\bar{a}|}$

$\therefore$ $\underline{a}$ ভেক্টরের উপর $\underline{b}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ $=|\underline{b}|\cos\theta=\frac{\underline{a}.\underline{b}}{|\underline{a}|}$

তদ্রূপ, $\underline{b}$ ভেক্টরের উপর $\underline{a}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ $=|\underline{a}|\cos\theta=\frac{\underline{a}.\underline{b}}{|\underline{b}|}$

$\therefore$ $\underline{a}$ ভেক্টরের দিক বরাবর $\underline{b}$ ভেক্টরের উপাংশ $=|\underline{b}|\cos\theta\,\hat{a}=\frac{\underline{a}.\underline{b}}{|\underline{a}|}\hat{a}$

তদ্রূপ, $\underline{b}$ ভেক্টরের দিক বরাবর $\underline{a}$ ভেক্টরের উপাংশ $=|\underline{a}|\cos\theta\,\hat{b}=\frac{\underline{a}.\underline{b}}{|\underline{b}|}\hat{b}$

দ্রষ্টব্য: $\underline{a}$ ভেক্টরের বরাবর $\underline{b}$ এর উপাংশের মান ও $\underline{a}$ এর উপর $\underline{b}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ পরস্পর সমান।

Example: $\vec{a}=2\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}, \vec{b}=-\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ হলে $\vec{b}$ ভেক্টরের উপর $\vec{a}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ কত?

সমাধানঃ $\vec{a}.\vec{b}=(2\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}).(-\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})=(2\times-1)-(3\times2)+(1\times-1)=-9$

$|\vec{a}|=\sqrt{2^2+(-3)^2+1^2}=\sqrt{14}$; $|\vec{b}|=\sqrt{(-1)^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$ $\therefore$ লম্ব অভিক্ষেপ $=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|}=-\frac{9}{\sqrt{6}}$ (Ans)

Related Questions:

01. $\vec{b} = 6\hat{i} + 7\hat{j} - 6\hat{k}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{a} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরের উপাংশ হলো- [DU'19-20]

(a) $\frac{8}{121}\vec{b}$ (b) $\frac{-8}{121}\vec{b}$ (c) $\frac{8}{121}\vec{a}$ (d) $\frac{-8}{121}\vec{a}$

সমাধান: (b); Component of $\vec{a}$ along $\vec{b} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|}\hat{b} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|} \times \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{b^2}\vec{b} = \frac{6\times2-7\times2-6\times1}{6^2+7^2+(-6)^2}\vec{b} = \frac{-8}{121}\vec{b}$

02. $A = \sqrt{3}\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}, B = \sqrt{3}\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$ হলে A ভেক্টরের উপর B ভেক্টরের অভিক্ষেপ হবে কোনটি? [KU'19-20]

(a) $\frac{1}{2}$ (b) 1 (c) $\frac{4}{\sqrt{5}}$ (d) $\frac{\sqrt{5}}{4}$

সমাধান: **(c);** $\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}|} = \frac{3+3-2}{\sqrt{3+1+1}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$

03. ভেক্টর $\vec{B} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$ বরাবর ভেক্টর $\vec{A} = -\hat{i} + 2\hat{k}$ এর উপাংশ কত? [SUST'19-20]

(a) $\vec{0}$ (b) 0 (c) 1 (d) $\frac{2\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}}{\sqrt{14}}$ (e) $\frac{-\hat{i}+2\hat{k}}{\sqrt{5}}$

সমাধান: (a); $\vec{A} \cdot \vec{B} = -2 - 0 + 2 = 0$; উপাংশ ভেক্টর রাশি।

04. $\vec{A} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{B} = 6\hat{i} + 7\hat{j} - 6\hat{k}$ হলে, $\vec{B}$ এর উপর $\vec{A}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ কত? [KU'17-18]

(a) $-\frac{8}{3}$ (b) $-\frac{8}{11}$ (c) $\frac{8}{11}$ (d) $\frac{8}{3}$

সমাধান: **(b);** $A\cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{12-14-6}{\sqrt{6^2+7^2+6^2}} = -\frac{8}{11}$

05. $\vec{P} = 5\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরের উপর $\vec{Q} = 2\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ ভেক্টরের অভিক্ষেপ– [DU'16-17]

(a) $\frac{5}{\sqrt{38}}$ (b) $\frac{3}{\sqrt{38}}$ (c) $\frac{2}{\sqrt{38}}$ (d) $\frac{1}{\sqrt{38}}$

সমাধান: (b); অভিক্ষেপ $= Q\cos\theta = \frac{\vec{P}\cdot\vec{Q}}{P} = \frac{5.2-3.1+2(-2)}{\sqrt{5^2+(-3)^2+2^2}} = \frac{3}{\sqrt{38}}$

06. $A = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $B = \sqrt{3}\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$, A ভেক্টরের উপর B ভেক্টরের অভিক্ষেপ কী হবে? [KU'16-17]

(a) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}$ (b) $\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}}$ (c) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$ (d) $\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{2}}$

সমাধান: (a); লম্ব অভিক্ষেপ $= \frac{\sqrt{3}+3-2}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}$

07. $\vec{B} = 2\hat{i} + 10\hat{j} - 11\hat{k}$ ভেক্টর বরাবর $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ ভেক্টরের উপাংশ হবে- [Ans: a][CU'07-08,KU'14-15]

(a) $\frac{13}{15}$ (b) $\frac{12}{15}$ (c) $\frac{13}{14}$ (d) $\frac{12}{14}$

Written

01. $4\hat{i} - 4\hat{j} + 7\hat{k}$ এর উপর $\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ এর লম্ব অভিক্ষেপ নির্ণয় কর। [RU'19-20]

সমাধান: $\frac{\vec{A}.\vec{B}}{|\vec{A}|} = \frac{4+8+7}{\sqrt{4^2+4^2+7^2}} = \frac{19}{9}$

Question Type-06: ক্ষেত্রফল সম্পর্কিত

Case-01: OABC সমান্তরিকের $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ এবং $\overrightarrow{OC} = \vec{b}$ হলে, তার ক্ষেত্রফল $= |\vec{a} \times \vec{b}|$

Case-01: OAB ত্রিভুজের $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ এবং $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ হলে, তার ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$

Example: যদি কোন সামান্তরিকের দুটি সন্নিহিত বাহু যথাক্রমে $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j}$ এবং $\vec{b} = 3\hat{i} - \hat{j} + 5\hat{k}$ হয়, ক্ষেত্রফল কত?

সমাধান: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \hat{i}(5) - \hat{j}(10) + \hat{k}(-2-3) = 5\hat{i} - 10\hat{j} - 5\hat{k}$

$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{5^2 + (-10)^2 + (-5)^2} = 5\sqrt{6}$ বর্গ একক।

Related Questions:

01. $\vec{a} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ ও $\vec{b} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ ভেক্টর দুইটি যে সামান্তরিকের সন্নিহিত বাহু তার ক্ষেত্রফল হবে- **[DU'17-18]**

(a) $3\sqrt{3}$ sq unit (b) $6\sqrt{3}$ sq unit (c) $6\sqrt{6}$ sq unit (d) $3\sqrt{6}$ sq unit

সমাধান: (c); $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -6\hat{i} - 12\hat{j} - 6\hat{k}$; এখন, $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{6^2 + 12^2 + 6^2} = 6\sqrt{6}$

02. দুটি ভেক্টর $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AC}$ কে সন্নিহিত বাহু ধরে অংকিত বর্গের ক্ষেত্রফল 6 বর্গ একক। $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AC}$ এর ক্রস গুণফলের মান কত?

(a) 6 একক (b) 15 একক (c) 12 একক (d) 10 একক **[Ans: a][JU'14-15]**

Question Type-07: লম্ব সম্পর্কিত

01. α এর মান কত হলে $\alpha\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ এবং $2\alpha\hat{i} - \alpha\hat{j} - 4\hat{k}$ পরস্পর লম্ব হবে? **[Agri. Guccho'20-21]**

(a) -2 and 1 (b) 2 and -1 (c) 2 and 1 (d) -2 and -1

সমাধান: (a); $\vec{A} = \alpha\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$; $\vec{B} = 2\alpha\hat{i} - \alpha\hat{j} - 4\hat{k}$

লম্ব হলে, $\vec{A}.\vec{B} = 0$

$\Rightarrow \alpha.2\alpha + (-2)(-\alpha) - 4 = 0 \Rightarrow 2\alpha^2 + 2\alpha - 4 = 0 \therefore \alpha = 1, -2$

02. $a\hat{i} - 3a\hat{j} - 4\hat{k}$ এবং $a\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হলে a এর মান- **[RU'19-20]**

(a) 1,1 (b) 2,3 (c) 1,4 (d) 2,4

সমাধান: **(d);** $a^2 - 6a + 8 = 0 \Rightarrow (a-2)(a-4) = 0 \therefore a = 2, 4$

03. m এর মান কত হলে $A = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}$ এবং $B = m\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}$ ভেক্টর দুটি লম্ব হবে? **[JU'18-19, RU'16-17]**

(a) 9 (b) 19 (c) -9 (d) -19

সমাধান: **(a);** $\vec{A}.\vec{B} = 0 \Rightarrow 2m + 6 - 24 = 0 \Rightarrow m = 9$

04. $b\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$ ও $2b\hat{i} - b\hat{j} - 4\hat{k}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হলে b কত হবে? **[KU'18-19]**

(a) $3, -5$ (b) $-2, 1$ (c) $-1, 2$ (d) $5, 7$

সমাধান: **(b);** $(b\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}).(2b\hat{i} - b\hat{j} - 4\hat{k}) = 0$

$2b^2 + 2b - 4 = 0 \Rightarrow b = 1, -2$

05. $\vec{X} = -3\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k}$ এবং $\vec{Y} = 2\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ হলে নিচের কোন একক ভেক্টরটি $\vec{X}$ ও $\vec{Y}$ উভয়ের উপর লম্ব হবে?

(a) $\frac{1}{3}(-2\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k})$ (b) $-\frac{1}{3}(-2\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k})$ [CU'16-17]

(c) $\pm\frac{1}{3}(-2\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k})$ (d) $\frac{1}{29}(-3\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k})$

সমাধান: (No correct answer); $\vec{X}\times\vec{Y} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & 4 & -5 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix}$

$= \hat{i}(-12+10)-\hat{j}(9+10)+\hat{k}(-6-8) = -2\hat{i}-19\hat{j}-14\hat{k}$

$\therefore$ নির্ণেয় একক ভেক্টর $= \frac{1}{\sqrt{561}}(-2\hat{i}-19\hat{j}-14\hat{k})$

06. $\underline{A} = a\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ ও $\underline{B} = 2\hat{i}-4\hat{j}+b\hat{k}$ ভেক্টর দুটি সমান্তরাল হলে a ও b এর মান যথাক্রমে- [CU'13-14]

(a) 2, 6 (b) –1, –6 (c) 3, 7 (d) –3, –7

সমাধান: **(b);** ভেক্টর দুটি সমান্তরাল হলে $\frac{a}{2} = \frac{2}{-4} = \frac{3}{b}$ $\therefore a = -1$ and $b = -6$

Question Type-08: সমতলীয় হওয়ার শর্ত

Case-01: $\vec{a} = a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$, $\vec{b} = b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$, $\vec{c} = c_1\hat{i}+c_2\hat{j}+c_3\hat{k}$ ভেক্টর তিনটি সমতলীয় হলে,

$(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c} = 0$ অর্থাৎ $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

Example: ধ্রুবক a এর মান কত হলে $2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}, 3\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k}$ এবং $\hat{i}-3\hat{j}+a\hat{k}$ এই তিনটি ভেক্টর একই সমতলে থাকলে?

সমাধান: একই সমতলে থাকবে, $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow 2(-2a+12)-1(3a-4)-1(-9+2) = 0 \Rightarrow -7a = -35 \therefore a = 5$

Related Questions:

01. a-এর কোন মানের জন্য $2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$, $3\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k}$ এবং $\hat{i}-3\hat{j}+a\hat{k}$ ভেক্টরত্রয় সমতলীয়?

(a) 5 (b) 4 (c) 3 (d) 2 [DU'10-11,12-13,JnU'15-16,RU'17-18]

সমাধান: (a); $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2(-2a+12)-1(3a-4)-1(-9+2) = 0$

$\Rightarrow -4a+24-3a+4+7 = 0 \Rightarrow -7a = -35 \quad \therefore a = 5$

02. তিনটি ভেক্টর $\overline{A}, \overline{B}$ এবং $\overline{C}$ সমতলীয় হওয়ার শর্ত হল- [Ans: a][RU'17-18]

(a) $\overline{A}.(\overline{B}\times\overline{C}) = 0$ (b) $\overline{A}.\overline{B}.\overline{C} = 0$ (c) $\overline{A}\times(\overline{B}\times\overline{C}) = 0$ (d) $(\overline{A}.\overline{B})\times\overline{C} = 0$

03. $2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরটি y অক্ষের সঙ্গে যে কোণ তৈরি করে তার মান হলো– [RU'16-17]

(a) $\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ (b) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)$ (c) $\cos^{-1}\left(\frac{-2}{3}\right)$ (d) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$

সমাধান: $\cos^{-1}\left(\frac{\vec{r}\cdot\hat{j}}{|\vec{r}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{3}\right)$

Question Type-09: ভেক্টরের ক্রসগুণন সংক্রান্ত

Written

01. $(a\hat{i} + b\hat{j} + \hat{k}) \times (2\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}) = \hat{i} - \hat{j}$ হলে a ও b এর মান নির্ণয় কর। [RU'19-20]

সমাধান: $\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a & b & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \hat{i}(3b-2) - \hat{j}(-2+3a) + \hat{k}(2a-2b)$

শর্তমতে, $2a - 2b = 0 \therefore a = b$, আবার, $3b - 2 = 1 \Rightarrow 3b = 3 \therefore b = 1$

আবার, $-2 + 3a = 1 \Rightarrow 3a = 3 \therefore a = 1$

Question Type-10: বিবিধ

01. দুইটি দিক রাশির প্রত্যেকটির মান যদি এদের লব্ধি রাশির মানের সমান হয় তবে রাশি দুইটির মধ্যবর্তী কোণের মান কত?

(a) 45° (b) 60° (c) 90° (d) 120° **[Ans: d][RU'14-15]**

02. $2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ ভেক্টরটি z অক্ষের সহিত যে কোণ উৎপন্ন করে তা কত? [KU'12-13]

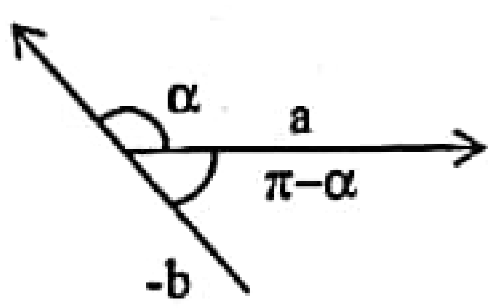
(a) $\cos^{-1}\frac{2}{3}$ (b) $\cos^{-1}\left(\frac{-1}{3}\right)$ (c) 60° (d) 45°

সমাধান: **(a);** $\cos\theta = \frac{(2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}).\hat{k}}{|2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}|} \therefore \theta = \cos^{-1}\frac{2}{3}$

03. যদি $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$ এবং $|\vec{a} - \vec{b}| = 7$ হয় তবে $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ ভেক্টর দুটির মধ্যবর্তী কোণ কত হবে? [CU'11-12]

(a) 180° (b) 120° (c) 30° (d) 220° (e) 135°

সমাধান: **(b);**



$|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$; $|\vec{a} - \vec{b}| = 7$; $7^2 = 5^2 + 3^2 + 2.5.3(0)(\pi - \alpha) \therefore \alpha = 120°$

04. যে ভেক্টরের মডুলাস ও দিক স্থির অথচ অবস্থান স্থির নয় তাকে বলা হয়– **[Ans: d][KU'11-12]**

(a) সমান ভেক্টর (b) বিপরীত ভেক্টর (c) শূন্য ভেক্টর (d) মুক্ত ভেক্টর