

31. $\cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \cos \alpha$ হলে, $\cos \alpha - \sin \alpha =$ কত? [RU'13-14]

- (a) $\sqrt{2} \sin \alpha$ (b) $\sqrt{3} \cos \alpha$ (c) $\sqrt{5} \sin \alpha$ (d) $\sqrt{2} \sin \alpha$

Solⁿ: (d); $\cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \cos \alpha$ Or, $\sin \alpha = \cos \alpha (\sqrt{2} - 1)$

Or, $\cos \alpha = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{2} - 1}$ Or, $\cos \alpha = (\sqrt{2} + 1) \sin \alpha$ Or, $\cos \alpha - \sin \alpha = \sqrt{2} \sin \alpha$

32. $\frac{1 - \tan^2(45^\circ - A)}{1 + \tan^2(45^\circ - A)} =$ কত? [CU'12-13,11-12]

- (a) $\sin 4A$ (b) $\sin 3A$ (c) $\sin 2A$ (d) $\sin A$ (e) $\cos 2A$

Solⁿ: (c); $\frac{1 - \tan^2(45^\circ - A)}{1 + \tan^2(45^\circ - A)} = \cos(90^\circ - 2A) = \sin 2A$

Question Type-15:

01. কোন লেখচিত্রটি মূলবিন্দু দিয়ে যায় না? [Ans.: b][RU'15-16]
 (a) $y = \sin x$ (b) $y = \sin(x + 45^\circ)$ (c) $y = \tan x$ (d) সবকয়টিই
02. $\sin \theta = 0$ হলে সংজ্ঞানুযায়ী θ কোণের বিপরীত বাহুর দৈর্ঘ্য কত হবে? [Ans: c][JU'10-11]
 (a) সমান (b) অসীম (c) শূন্য (d) কোনটিই নয়

অধ্যায় - ০৮: ফাংশন ও ফাংশনের লেখচিত্র

Question Type-01:

Example-1: $f(x^2 - 5x + 4) = x + 3$ হলে $f(-2) = ?$

Solⁿ: দেওয়া আছে, $f(x^2 - 5x + 4) = x + 3$

$\therefore f(x^2 - 5x + 4 = -2) = x + 3$

বা, $f(x^2 - 5x + 6 = 0) = x + 3$

বা, $f((x - 2)(x - 3) = 0) = x + 3$

বা, $f(x = 2, 3) = x + 3$

$= 2 + 3$, বা $3 + 3$

$= 5$, বা 6

$\therefore f(-2) = 5$, বা 6 (Ans.)

Example-2: $f(2x^2 + 5x + 4) = \frac{x}{x + 2}$ হলে, $f(7) = ?$

Solⁿ: Given, $f(2x^2 + 5x + 4) = \frac{x}{x + 2}$ ----- (i)

Let, $2x^2 + 5x + 4 = 7$

$\Rightarrow 2x^2 + 5x - 3 = 0$

$\Rightarrow (x + 3)(2x - 1) = 0$

$\Rightarrow x = -3$ or $\frac{1}{2}$

$x = -3$ হলে,

$f(7) = \frac{-3}{-3 + 2} = 3$ [Ans.]

$x = \frac{1}{2}$ হলে,

$f(7) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + 2} = \frac{1}{5}$ [Ans.]

Example-3: $f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = x^2 - 2x + 4$ হলে, $f(-3) = ?$, $f(1/5) = ?$

Solⁿ: Given. $f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = x^2 - 2x + 4$

Let, $\frac{1-x}{1+x} = -3$

Again, Let,

$\Rightarrow x = -2$ $\frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{5} \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

$\therefore f(-3) = (-2)^2 + 2 + 4 = 12$ [Ans.]

$\therefore f\left(\frac{1}{5}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 2 \times \frac{2}{3} + 4 = \frac{4}{9} - \frac{4}{3} + 4 = \frac{28}{9}$ Ans.

Example-4: $f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = x + 2$ হলে, $f(x+3) = ?$

Solⁿ: Let, $\frac{1-x}{1+x} = y$

$\Rightarrow xy + y = 1 - x$

$\Rightarrow x = \frac{1-y}{1+y}$

from (i), we get, $f(y) = \frac{1-y}{1+y} + 2$

$\Rightarrow f(y) = \frac{y+3}{1+y}$

$\therefore f(x+3) = \frac{x+3+3}{x+3+1} = \frac{x+6}{x+4}$ [Ans.]

Related Questions:

01. $f(x) = \cos^3 x \sin x$ হলে $f(\pi + x)$ এর মান কোনটি?

[BAU'14-15]

(a) $\sin^3 x \cos x$ (b) $-\cos^3 x \sin x$ (c) $f(x)$ (d) $f(x) + 1$

Solⁿ: (c); $f(x) = \cos^3 x \sin x$ এটি একটি odd function $f(\pi + x) = \cos^3(\pi + x) \sin(\pi + x) = (-\cos x)^3 \cdot (-\sin x) = (-\cos^3 x) \cdot (-\sin x) = \cos^3 x \sin x = f(x)$

02. $f(x) = |1 - x^3| + 1$ হলে $f(2)$ এর মান কোনটি?

[BAU'14-15]

(a) 8 (b) -8 (c) 9 (d) -9

Solⁿ: (a); $f(x) = |1 - x^3| + 1 \therefore f(2) = |1 - 2^3| + 1 = |1 - 8| + 1 = 7 + 1 = 8$

03. $f(x) = \frac{x}{1+x}$ হলে $f(2/3) \div f(3/2) = ?$

[DU'04-05, JU'09-10]

(a) $\frac{2}{3}$ (b) 3 (c) 2 (d) $\frac{3}{2}$

Solⁿ: (a); $f(x) = \frac{x}{1+x} \therefore f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\frac{2}{3}}{1+\frac{2}{3}} = \frac{2}{5} \therefore f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\frac{3}{2}}{1+\frac{3}{2}} = \frac{3}{5} \therefore f\left(\frac{2}{3}\right) \div f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{2}{3}$

04. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ কে $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x & \text{যখন } x \geq 2 \\ x^2 + 3x & \text{যখন } x < 2 \end{cases}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হল। $f(0)$ এর মান কত?

[Ans:a][RU'10-11]

(a) 0 (b) 5 (c) 2 (d) 3

05. $f(\theta) = \cos \theta - \sin \theta$ এর কোন মানের জন্য $f(\theta) = 0$?

[Ans:b][RU'08-09]

(a) $\pi/2$ (b) $\pi/4$ (c) π (d) $\pi/6$

06. $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ হলে $f(\cos \theta) =$ কত?

[Ans: c][RU'08-09]

(a) $\tan \frac{\theta}{2}$ (b) $\tan^2 \theta$ (c) $\tan^2 \frac{\theta}{2}$ (d) $\tan \theta$

07. $f(x) = x^2$ হলে $f(x^2)$ এর মান কত যখন $x = 2$?

- (a) 4 (b) 8 (c) 16 (d) 32

[Ans: c][RU'08-09]

08. $f(x) = \frac{x}{x+1}$ হলে, $f\left(\frac{p}{q}\right) + f\left(\frac{q}{p}\right)$ -এর মান কত?

- (a) 1 (b) 0 (c) pq (d) p+q

[RU'08-09]

Solⁿ: (a); $f\left(\frac{p}{q}\right) + f\left(\frac{q}{p}\right) = \frac{\frac{p}{q}}{\frac{p}{q}+1} + \frac{\frac{q}{p}}{\frac{q}{p}+1} = \frac{p}{p+q} + \frac{q}{q+p} = \frac{p+q}{p+q} = 1$

09. $f(x) = x^2$ হলে, $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ -এর মান কত?

- (a) $x+2h$ (b) $2x+h$ (c) x^2+h (d) $2h+x^2$

[Ans: b][RU'08-09]

10. $f(x) = 3e^{x^2}$ হলে, $f'(x) - 2xf(x) + \frac{1}{3}f(0) - f'(0) = ?$

- (a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) কোনটিই নয়

[Ans: b][RU'08-09]

Solⁿ: (b); $f(x) = 3e^{x^2}$

$f'(x) = 2x \cdot 3e^{x^2} = 6x \cdot e^{x^2} \therefore f'(x) - 2xf(x) + \frac{1}{3}f(0) - f'(0) = 6x \cdot e^{x^2} - 2x \cdot 3 \cdot e^{x^2} + \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot e^{0^2} - 6 \cdot 0 \cdot e^{0^2}$
 $= 6x \cdot e^{x^2} - 6x \cdot e^{x^2} + \frac{1}{3} \cdot 3e^0 - 0 = 0 + 1 - 0 = 1$

11. যদি $f(x) = \frac{3 - \frac{1}{2x}}{1 + \frac{1}{x}}$ হয় তবে $f\left(\frac{1}{2}\right)$ এর মান হবে-

- (a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{3}{2}$ (c) $\frac{-3}{2}$ (d) $\frac{5}{2}$ (e) $\frac{1}{3}$

[CU'15-16]

Solⁿ: (a); $f(x) = \frac{3 - \frac{1}{2x}}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{6x-1}{2(x+1)} \therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}$

12. $y = f(x) = \frac{5x+1}{4x-1}$ হলে x এর মাধ্যমে $f(y)$ এর মান কি হবে?

- (a) x (b) 2x (c) $\frac{1}{x}$ (d) $1+x$

[RU'16-17]

Solⁿ: (No correct answer); $f(x) = \frac{5x+1}{4x-1} \therefore f(y) = \frac{5y+1}{4y-1} = \frac{5 \cdot \frac{5x+1}{4x-1} + 1}{4 \cdot \frac{5x+1}{4x-1} - 1} = \frac{25x+5+4x-1}{20x+4-4x+1} = \frac{29x+4}{16x+5}$

13. যদি $f(x) = x^2 - 5x + 4$ হয়, তবে $f(2) = ?$

- (a) -2 (b) 3 (c) 2 (d) 5

[JU'11-12]

Solⁿ: (a); $f(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 4 = -2$

14. যদি $\varphi(\theta) = 2\cos\theta$ হয়, তবে $\varphi\left(\frac{\pi}{3}\right) = ?$

- (a) 6 (b) 1 (c) 2 (d) 3

[JU'11-12]

Solⁿ: (b); $\varphi\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\frac{\pi}{3} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

15. $f(x) = \frac{5x+3}{4x-5}$ হলে $f(0) = ?$

- (a) $\frac{3}{-5}$ (b) 5 (c) $\frac{5}{-3}$ (d) কোনটিই নয়

[Ans: a][JU'11-12]

16. $f(x) = \frac{x}{1+x}$ হলে, $f\left(\frac{1}{p}\right) f\left(\frac{1}{q}\right)$ এর মান কত?

- (a) $\frac{1}{p+1} \cdot \frac{1}{q+1}$ (b) $\frac{p}{q}$ (c) x (d) $\frac{p}{q} + 1$

[Ans: a][JU'11-12,10-11]

17. $f(x) = (x-4)(10-x)$, যখন $4 \leq x \leq 10$, $f(1-2t) = ?$ [JU'10-11]
 (a) $(3+2t)(9+2t)$ (b) $-(3+2t)(9+2t)$
 (c) $(3+2t)(9-2t)$ (d) $(3-2t)(9-2t)$

Solⁿ: (b); $f(1-2t) = (1-2t-4)(10-1+2t) = -(3+2t)(9+2t)$

18. যদি $f(x) = \frac{2x+1}{2x-1}$ হয়, তাহলে $\frac{f(x)+1}{f(x)-1}$ এর মান নির্ণয় কর — [JU'09-10]
 (a) $2x$ (b) $3x$ (c) $4x$ (d) $5x$

Solⁿ: (a); $f(x) = \frac{2x+1}{2x-1} \Rightarrow \frac{f(x)+1}{f(x)-1} = \frac{2x+1+2x-1}{2x+1-2x+1}$ [যোজন-বিয়োজন করে পাই]

$\Rightarrow \frac{f(x)+1}{f(x)-1} = \frac{4x}{2} \Rightarrow \frac{f(x)+1}{f(x)-1} = 2x$

19. $f(x) = 2x^{1/3} + 3x^{-2/3}$ হলে $f(64)$ এর মান কত? [Ans: a][RU'09-10]
 (a) $\frac{131}{16}$ (b) $\frac{141}{16}$ (c) $\frac{151}{16}$ (d) $\frac{161}{16}$

20. যদি $y = f(x) = \frac{4x-7}{2x-4}$ হয় তবে কোনটি সঠিক? [Ans: d][RU'09-10]
 (a) $f(x) = f(y)$ (b) $f(x+1) = f(y+1)$
 (c) $f(x=y)$ (d) $f(y) = x$

21. $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ হলে $f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) =$ কত? [Ans: a][RU'09-10]
 (a) $\frac{1}{x}$ (b) $\frac{1}{2x}$ (c) $-\frac{1}{x}$ (d) x

22. $f(x) = \frac{x-4}{x-2}$ হলে $f(2)$ এর মান কত? [Ans: d][RU'08-09]
 (a) 0 (b) 1 (c) 4 (d) কোনটিই নয়

23. $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ হলে $f(\cos \theta)$ এর মান কত? [Ans: c][RU'07-08]
 (a) $\tan \frac{\theta}{2}$ (b) $\tan^2 2\theta$ (c) $\tan^2 \frac{\theta}{2}$ (d) $\tan^2 \theta$

24. $f(x) = \frac{x}{1+x}$ হলে $f\left(\frac{p}{q}\right) \div f\left(\frac{q}{p}\right)$ এর মান কত? [KU'13-14]
 (a) $\frac{p}{q}$ (b) $\frac{q}{p}$ (c) $\frac{q}{p+q}$ (d) $\frac{p}{p+q}$

Solⁿ: (a); $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{p+q}$; $f\left(\frac{q}{p}\right) = \frac{q}{p+q} \therefore f\left(\frac{p}{q}\right) \div f\left(\frac{q}{p}\right) = \frac{p}{q}$

25. $p = f(q) = \frac{\sqrt{q+1}}{\sqrt{q-1}}$ হলে $f(4)$ এবং $f(2)$ যথাক্রমে কত? [Ans: a][CU'16-17]
 (a) $\sqrt{3}, \sqrt{2} + 1$ (b) $\sqrt{3}, \sqrt{2} + 1$ (c) $\sqrt{3}, \sqrt{2} - 1$ (d) $\sqrt{5}, \sqrt{2} - 1$ (e) $\sqrt{3}, \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}$

Question Type-02: ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় সংক্রান্ত

2.1: $f(x) = ax^n + b$ n ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং বিজোড়।

$D_f = \mathbb{R} = (-\infty, \infty) =] - \infty, \infty[$

$R_f = \mathbb{R} = (-\infty, \infty) = [-\infty, \infty[$

2.2: $f(x) = \sqrt{ax + b}$ আকৃতির

$D_f: x \geq -\frac{b}{a}$ বা $x = [-\frac{b}{a}, \infty)$ যখন, $a > 0$

$: x \leq -\frac{b}{a}$ বা, $x = (-\infty, -\frac{b}{a}]$ যখন, $a < 0$

$R_f: f(x) \geq 0$ বা $[0, \infty)$

2.3.1: $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$

$D_f: -a \leq x \leq a$ বা, $x \in [-a, a]$

$R_f: f(x) = [0, a]$ বা, $0 \leq f(x) \leq a$

2.3.2: $f(x) = \sqrt{x^2 - a^2}$

$D_f: x \leq -a$ বা $x \geq a \Rightarrow x = (-\infty, -a] \cup [a, \infty)$

$R_f: f(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) = [0, \infty)$

2.3.3: $f(x) = \sqrt{a^2 + x^2}$

$D_f: x = \mathbb{R}$

$R_f: f(x) \geq a \Rightarrow f(x) = [a, \infty)$

2.4: $f(x) = \frac{x^2 - a^2}{x - a}$

$D_f = \mathbb{R} - \{a\}$ $R_f = \mathbb{R} - \{2a\}$

2.5: $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$

$D_f = \mathbb{R} - \{-\frac{d}{c}\}$

$R_f = \mathbb{R} - \{\frac{ax + b}{cx + d} \text{ (যেখানে } x \text{ এর সহগ)}\}$

2.6: $f(x) = ax^2 + bx + c$

$D_f = \mathbb{R}$

$R_f: f(x) \geq \frac{4ac - b^2}{4a}$ যখন, $a > 0$

$f(x) \leq \frac{4ac - b^2}{4a}$, যখন, $a < 0$

2.7: $f(x) = |ax + b|$

$D_f = \mathbb{R}$

$R_f: f(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) = [0, \infty)$

2.8: $f(x) = K + \text{পূর্ণবর্গরাশি} \times L$, K, L ধ্রুবক, $L > 0$

$D_f = \mathbb{R}$

$R_f: f(x) \geq k \Rightarrow f(x) = [k, \infty)$ যখন, $L > 0$

$R_f: f(x) \leq k \Rightarrow f(x) = (-\infty, k]$, যখন, $L < 0$

2.9: $f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$

$D_f = \mathbb{R}$

$R_f: f(x) > 0 \Rightarrow f(x) = (0, \infty)$

2.10: $f(x) = -a^x$

$D_f = \mathbb{R}$

$R_f: f(x) < 0 \Rightarrow f(x) = (-\infty, 0)$

Related Questions:

01. $f(x) = \frac{x}{|x|}$ এর রেঞ্জ—

(a) $\{0,1\}$

(b) $\{1,0\}$

(c) $\{-1,1\}$

(d) $\{1, \infty\}$

[Ans: c]

02. যদি A সেট থেকে B সেটে একটি ফাংশন $f: A \rightarrow B$ দ্বারা সূচিত করা হয়, তবে রেঞ্জ $f(\text{range } f)$ এর জন্য নিচের কোনটি সঠিক?

(a) রেঞ্জ $f = B$

(b) রেঞ্জ $f \subset B$

(c) রেঞ্জ $f = A$

(d) রেঞ্জ $f \subset A$

[Ans: d] [KU'14-15]

03. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ যথাক্রমে- [JU'09-10,14-15,RU'14-15]
 (a) $[-4,4]$ ও $[0,2]$ (b) $[-2,2]$ ও $[0,4]$ (c) $[-2,2]$ ও $[0,1]$ (d) $[-2,2]$ ও $[0,2]$
 Solⁿ: (d); $f(x) = \sqrt{4 - x^2} \therefore |x| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$ এবং রেঞ্জ $= [0, 2]$
04. Let $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$. The domain and range of the real valued function f is - [DU'14-15]
 (a) $x < -2, y > \frac{1}{2}$ (b) $-2 < x < 2, y \geq \frac{1}{2}$
 (c) $-2 \leq x \leq 2, y < \frac{1}{2}$ (d) $-x < -2 \& x > 2, 2 < y < 2$
 Solⁿ: (b); $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \in \mathbb{R} \therefore -2 < x < 2 \therefore y^2 = \frac{1}{4-x^2} \Rightarrow 4 - x^2 = \frac{1}{y^2} \Rightarrow 4 - \frac{1}{y^2} = x^2 \Rightarrow 4 - x^2 = \frac{1}{y^2}$
 $|x|$ এর value minimum হলে, y minimum
 $\therefore -2 < x < 2, |x|_{\min} = 0 \therefore 4 = \frac{1}{y_{\min}^2} \therefore y_{\min} = \frac{1}{2} \therefore y_{\min} = \frac{1}{2} \therefore y \geq \frac{1}{2}$
05. $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ ফাংশনের ডোমেইন এবং রেঞ্জ যথাক্রমে- [DU'13-14]
 (a) $x \leq 2, 3 \leq x$ and $y \geq 0$ (b) $2 \leq x \leq 3$ and $y \geq 0$
 (c) $x \geq 3$ and $y > 0$ (d) $x \leq 2, x \geq 3$ and $y > 0$
 Solⁿ: (a); $x^2 - 5x + 6 \geq 0 \Rightarrow (x-3)(x-2) \geq 0 \therefore x \leq 2$ বা $x \geq 3 \Rightarrow x \leq 2, 3 \leq x$
 domain $x \leq 2, 3 \leq x$; Range $y \geq 0$
06. $f(x) = 4 - (x - 3)$ ফাংশনের ডোমেইন এবং রেঞ্জ যথাক্রমে- [DU'12-13]
 (a) \mathbb{R}, \mathbb{R} (b) $\mathbb{R}, x \leq 4$ (c) $x \geq 4, \mathbb{R}$ (d) $\mathbb{R}, x \geq 3$
 Solⁿ: (b); $f(x) = 4 - (x - 3)^2$; \mathbb{R} এর সকল মানের জন্য সংজ্ঞায়িত \therefore Domain = \mathbb{R}
 আবার, সকল $x \in \mathbb{R}$ এর জন্য $f(x) \leq 4 \therefore$ Range = $\{x \in \mathbb{R}; x \leq 4\}$
07. $f(x) = \frac{x}{|x|}$ ফাংশনটির ডোমেইন হল- [Ans: b][CU'04-05,09-10]
 (a) $(-\infty, \infty)$ (b) $(-\infty, \infty) - \{0\}$ (c) $(0, \infty)$ (d) $[(0, \infty) - \{0\}]$
08. $y = \frac{1}{\sqrt{4-x}}$ ফাংশনটির ডোমেইন এবং রেঞ্জ — [DU_KA'15-16]
 (a) $-\infty < x \leq 4; 0 \leq y < \infty$ (b) $-\infty < x < 4; 0 < y < \infty$
 (c) $-\infty < x < 4; 0 \leq y < \infty$ (d) $-\infty < x \leq 4; 0 < y < \infty$
 Solⁿ: (b); $4 - x > 0 \Rightarrow x < 4 \therefore -\infty < x < 4; 0 < y < \infty$
09. ফাংশন $f(x) = \sqrt{4 - x}$ এর ডোমেন হবে- [CU'15-16]
 (a) $[4, +\infty)$ (b) $[0, 4]$ (c) $(-\infty, 0]$ (d) $(-\infty, 4]$ (e) $[-4, 4]$
 Solⁿ: (d); $f(x) \in \mathbb{R}$ হবে যদিও কেবল যদি $4 - x \geq 0$ হয় $\therefore x \leq 4$ হয়।
 \therefore নির্ণেয় ডোমেন = $(-\infty, 4]$, যেহেতু, অসীমকে ছোঁয়া যায় না, তাই $-\infty$ এর পূর্বে প্রথম বন্ধনী ব্যবহার করতে হবে।
10. যদি $f(x) = |x|$ হয় তবে $f(x)$ এর রেঞ্জ কত? [Ans: a][JnU'15-16]
 (a) $[0, \infty)$ (b) $(-\infty, \infty)$ (c) $(0, \infty)$ (d) কোনটিই নয়
11. $f(x) = \frac{x}{x+2}$ এর ডোমেন কত? [Ans: c][JU'16-17]
 (a) $\{x \in \mathbb{R}; x \neq 2\}$ (b) $\{x \in \mathbb{R}\}$ (c) $\{x \in \mathbb{R}; x \neq -2\}$ (d) $\{x \in \mathbb{R}; x \neq 0\}$
12. $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ এর ডোমেন কত? [Ans: c][JU'16-17]
 (a) $\{x \in \mathbb{R}; x \geq 4\}$ (b) $\{x \in \mathbb{R}; -4 < x < 4\}$ (c) $\{x \in \mathbb{R}; -4 \leq x \leq 4\}$ (d) $\{x \in \mathbb{R}; x \leq -4\}$
13. মনে কর $X = \{-3, -2, 0, 1\}$, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ এবং f কে $f(x) = x^2 + 2x - 1$, দ্বারা জীববিজ্ঞান সংজ্ঞায়িত করা হল, f এর রেঞ্জ কত? [Ans: e][CU'16-17]
 (a) $\{0, 1\}$ (b) \emptyset (c) -3 (d) -2 (e) $\{-1, 2\}$
14. $g(x) = -\sin^2 x$ হলে g এর ডোমেইন ও রেঞ্জ যথাক্রমে কত? [Ans: e][CU'16-17]
 (a) $\mathbb{R}, [-1, \infty)$ (b) $(-\infty, 0], (-\infty, 2]$ (c) $(-1, \infty), [0, 1]$ (d) $(-\infty, \infty), [0, 1]$ (e) $\mathbb{R}, [-1, 0]$
15. $f(x) = -2^x$ ফাংশনটির রেঞ্জ [Ans: a][JU'11-12]
 (a) $(-\infty, 0)$ (b) $(0, \infty)$ (c) $(-\infty, \infty)$ (d) $(-2, \infty)$

16. যদি $\frac{x+2}{y-3} = 0$ হয় তাহলে নিচের কোনটি সত্য?

(a) $x=2$ এবং $y=3$

(b) $x=2$ এবং $y \neq 3$

(c) $x=0$ এবং $y=0$

(d) $x=-2$ এবং $y \neq 3$

Solⁿ: সত্য হবে যদি $x = -2$ এবং $y \neq 3$

17. $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$ ফাংশনটির ডোমেন—

(a) $[-1, 1]$

(b) $(-\infty, \infty)$

(c) $(-\infty, 0)$

(d) $[-1, 0]$

Solⁿ: (a); যদি x এর মান $[-1, 1]$ এর মধ্যে বসাই তাহলে $f(x)$ এর বাস্তব মান পাওয়া যায়।

18. $f(x) = (x-3)(5-x)$, যখন $3 \leq x \leq 5$, হলে $f(1-t) =$

(a) $(4-t)(2+t)$

(b) $(-2-t)(4+t)$

(c) $-2t(t-2)$

(d) কোনটিই নয়

Solⁿ: (b); $f(1-t) = \{(1-t)-3\} \{5-(1-t)\} = (-2-t)(t+4)$

19. $f(x) = \sqrt{x^2-2}$ ফাংশনটির ডোমেন—

(a) $(-\infty, \sqrt{2})$

(b) $(-\infty, \infty)$

(c) $[0, \sqrt{2}]$

(d) $(-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \infty)$

Solⁿ: (d); [কারণ এই সীমার মধ্যে সকল মানের জন্য ফাংশনটির বাস্তব মান পাওয়া যায়]

20. $f(x) = x/(x-1)$ ফাংশনটির ডোমেন—

(a) \mathbb{R}

(b) $\mathbb{R} - \{0\}$

(c) $\mathbb{R} - \{1\}$

(d) $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

[Ans: c][JU'10-11]

21. $f(\theta) = 3\sin^2 \theta + 2\cos^3 \theta$ হলে $f(0)$ এর মান কত?

(a) 1

(b) 3

(c) 2

(d) 5

Solⁿ: (c); $f(0) = 3\sin^2 0 + 2\cos^3 0 = 2$

22. $f(x) = \ln(x) + 2$ হলে $f(0)$ এর মান কত হবে?

(a) 0

(b) ∞

(c) -2

(d) 2

Solⁿ: (b); $f(0) = \ln(0) + 2$ [$\because \ln(0) = \infty$] = ∞

23. $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ হলে $f(\tan \theta) = ?$

(a) $\sin 2\theta$

(b) $\cos 2\theta$

(c) $\sec 2\theta$

(d) $\tan 2\theta$

[Ans: b][JU'09-10]

24. $f(x) = \frac{1}{x}$ ফাংশনটি ডোমেন—

(a) \mathbb{R}

(b) $\mathbb{R} - \{1\}$

(c) $\mathbb{R} - \{0\}$

(d) $\mathbb{R} \setminus \{1, 0\}$

Solⁿ: (c); 0 বাদে অন্য যে কোন সংখ্যার জন্য রেঞ্জ পাওয়া যাবে।

25. $y = |x|$ ফাংশনটির রেঞ্জ—

(a) $(\infty, 0]$

(b) $[0, \infty)$

(c) (∞, ∞)

(d) $(\infty, 0)$

[Ans: b][JU'09-10]

26. $y = |x|$ ফাংশনটির ডোমেন—

(a) $(-\infty, 0]$

(b) $[0, \infty)$

(c) $(-\infty, \infty)$

(d) $\{-\infty, 0\}$

[Ans: c][JU'09-10]

27. $y = \sqrt{x}$ বক্ররেখার উপর কোন বিন্দুতে স্পর্শক x- অক্ষের সহিত 45° কোণ সৃষ্টি করে?

(a) $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$

(b) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$

(c) $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$

(d) $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$

Solⁿ: (a); $y = \sqrt{x}$ Or, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ Or, $\tan 45^\circ = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ Or, $x = \frac{1}{4} \therefore y = \frac{1}{2}$

[RU'13-14]

28. $f(x) = \frac{x-3}{2x+1}$ হলে এর ডোমেন এবং রেঞ্জ হবে- [RU'12-13]

- (a) $\mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$, $\mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$ (b) $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$, $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ (c) $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$, $\mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$ (d) কোনটিই নয়

Solⁿ: (d); $y = \frac{x-3}{2x+1} \Rightarrow x-3 = 2xy+y \Rightarrow x = \frac{y+3}{1-2y}$ ডোমেন = $\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ এবং রেঞ্জ = $\mathbb{R} - \left\{\frac{3}{2}\right\}$

29. $T = \{-1, 0, 2, 5, 11\}$ এবং $T \rightarrow \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = x^2 - x - 2$ হলে f এর রেঞ্জ কত? [Ans: a] [RU'09-10]

- (a) $\{0, -2, 0, 18, 108\}$ (b) $\{0, 2, 18, 108\}$ (c) $\{0, -2, -18, 108\}$ (d) $\{0, -2, 18, -108\}$

30. $g(x) = \sqrt{x+1}$ হলে g এর ডোমেইন ও রেঞ্জ যথাক্রমে- [Ans: d] [CU'12-13]

- (a) $[1, \infty), \mathbb{R}$ (b) $\mathbb{R}, [1, \infty)$ (c) \mathbb{R}, \mathbb{R} (d) $[-1, \infty), [0, \infty)$ (e) $[0, 0]$

31. $y = \frac{\sqrt{2x-1}}{x-2}$ এর ডোমেইন কত? [Ans: c] [CU'10-11, 09-10, 08-09, 12-13]

- (a) $(-\infty, \infty) - \{2\}$ (b) $\left[\frac{1}{2}, \infty\right)$ (c) $\left[\frac{1}{2}, \infty\right) - \{2\}$ (d) $(-\infty, \infty)$ (e) $\left(\frac{1}{2}, \infty\right) - \{2\}$

32. $-4 \leq x \leq 0$ যদি ডোমেন হয় তবে $f(x) = -x^2 - 2x + 3$ ফাংশনের রেঞ্জ নির্ণয় কর। [Ans: b] [CU'10-11]

- (a) $2 \leq f(x) \leq 11$ (b) $-5 \leq f(x) \leq 4$ (c) $f(x) \leq 4$ (d) $-4 \leq f(x) \leq 0$ (e) $x \leq 1$

33. $\log(5x^2 - 7)$ ফাংশনের ডোমেন হবে [Ans: d] [CU'07-08]

- (a) $x^2 < 1.4$ (b) $x > -1.18$ (c) কোনটিই নয় (d) $x < -1.18$ (e) $x < 1.18$

34. $f(x) = \sqrt{x^3 + 8}$ ফাংশনটির ডোমেন ও রেঞ্জ যথাক্রমে- [CU'13-14]

- (a) $(-2, \infty), [0, \infty)$ (b) $[0, \infty], (0, \infty]$ (c) $[-2, \infty), [0, \infty)$ (d) $(8, -\infty), [0, \infty)$ (e) $(-\infty, \infty), [1, \infty)$

Solⁿ: (c); -2 থেকে ∞ পর্যন্ত $f(x) = \sqrt{x^3 + 8}$ এর বাস্তব মান থাকে। তখন $f(x)$ এর মান 0 থেকে ∞ পর্যন্ত হয়।

অন্যভাবে, $y = \sqrt{x^3 + 8}$ Or, $y^2 - 8 = x^3$ Or, $x = \sqrt[3]{y^2 - 8}$ যেহেতু $y^2 \geq 0$

$\therefore x$ এর সর্বনিম্ন মান -2 এবং সর্বোচ্চ মান ∞ \therefore ডোমেন = $[-2, \infty)$

Question Type-3:

01. $f = \{(x, y) : x \in X, y \in Y \text{ এবং } x^2 + y^2 = 4\}$ অন্সয়টি কি? [Ans: a] [KU'12-13]

- (a) ফাংশন (b) ফাংশন নয় (c) অন্সয় (d) কোনটিই নয়

Question Type-4: বিপরীত ফাংশন নির্ণয়ের পদ্ধতি

নিয়ম-১: (i) প্রথমে $y = f(x)$ ধরে $x = f^{-1}(y)$ লিখ।

(ii) $y =$ প্রদত্ত ফাংশন হতে x এর মান y এর মাধ্যমে প্রকাশ কর।

(iii) i ও ii হতে $f^{-1}(y)$ এর একটি সমীকরণ পাওয়া যাবে এবং বের কর।

নিয়ম-২: প্রদত্ত ফাংশনে x এর স্থলে $f^{-1}(x)$ বসানো দেখা ম্যাজিকের মতো $f^{-1}(x)$ বের হবে।

নিয়ম-৩: $f^{-1}(x) = m \Leftrightarrow f(m) = x$ অতপর m এর মান নির্ণয় করলেই $f^{-1}(x)$ বের হবে।

Example-4.1: $f(x) = \frac{3x+5}{2x+7}$ হলে, $f^{-1}(x)$ এর মান বের কর।

ধরি, $f^{-1}(x) = m$ বা, $f(m) = x$ বা, $\frac{3m+5}{2m+7} = x$ বা, $2mx + 7x = 3m + 5$

বা, $2mx - 3m = -7x + 5$ বা, $m(2x - 3) = -7x + 5$

$\therefore m = \frac{-7x+5}{2x-3} \therefore f^{-1}(x) = \frac{-7x+5}{2x-3}$

Example-4.2: $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ হলে, প্রমাণ করবে, $f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$ [M.C.Q-এর জন্য খুবই গুরুত্বপূর্ণ]

Example-4.3: $f(x) = \frac{ax+b}{cx-a}$ হলে, প্রমাণ করবে, $f^{-1}(x) = f(x)$ [M.C.Q-এর জন্য খুবই গুরুত্বপূর্ণ]

Example-4.4: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ কে $f(x) = x^2 + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। $f^{-1}(5)$, $f^{-1}(10)$ এর মান নির্ণয় কর।

Solⁿ: $f(x) = x^2 + 1$ $f(f^{-1}(10)) = (f^{-1}(10))^2 + 1$
 $\Rightarrow f(f^{-1}(5)) = (f^{-1}(5))^2 + 1$ $\Rightarrow (f^{-1}(10))^2 = 10 - 1$
 $\Rightarrow (f^{-1}(5))^2 = 5 - 1$ $\Rightarrow f^{-1}(10) = \pm 3$ [Ans.]
 $\Rightarrow f^{-1}(5) = \pm 2$ [Ans.]

Example-4.5: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ কে $f(x) = x^3 + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলো। $f^{-1}(x)$ এর মান নির্ণয় কর।

Solⁿ: $f(x) = x^3 + 1 \Rightarrow f(f^{-1}(x)) = (f^{-1}(x))^3 + 1 \Rightarrow x = (f^{-1}(x))^3 + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$ [Ans.]

Example-4.6: $f(x) = -\ln x$ হলে, $f^{-1}(x)$ এর মান নির্ণয় কর।

Solⁿ: $f(x) = -\ln x$
 $\Rightarrow f(f^{-1}(x)) = -\ln(f^{-1}(x)) = x \Rightarrow -x = \log_e f^{-1}(x) \Rightarrow f^{-1}(x) = e^{-x}$ [Ans.]

Example-4.7: $f(x) = \frac{5x+7}{3x-a}$. a-এর কোন মানের জন্য $f(x) = f^{-1}(x)$ হবে। [Ans. a=5]

Related Questions:

01. $f(x) = x^3 + 5$ হলে $f^{-1}(32) =$ কত? [JU'14-15]
 (a) 5 (b) 3 (c) 2 (d) -3

Solⁿ: (b); $f(x) = x^3 + 5$ ধরি, $f^{-1}(32) = x \Rightarrow f(x) = 32 \Rightarrow x^3 + 5 = 32 \Rightarrow x^3 = 27 \therefore x = 3$

02. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ কে $f(x) = x^2 + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হলে $f^{-1}(5) = ?$ [JU'14-15]
 (a) ± 1 (b) ± 2 (c) 0 (d) 2

Solⁿ: (b); $f(x) = x^2 + 1$; Let, $f^{-1}(5) = x \Rightarrow f(x) = 5 \Rightarrow x^2 + 1 = 5 \Rightarrow x^2 = 4 \therefore x = \pm 2$

03. যদি $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ফাংশনটি $f(x) = x^2 + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয়, তবে $f^{-1}(0) = ?$ [KU'14-15]
 (a) $f^{-1}\{0\} = \{i, -i\}$ (b) $f^{-1}(0) = \{\emptyset\}$ (c) $f^{-1}(0) = \emptyset$ (d) কোনটিই নয়

Solⁿ: (c);

$f(x) = x^2 + 1$ $f^{-1}(y) = \pm \sqrt{y-1}$
 $y = x^2 + 1$ $\Rightarrow f^{-1}(x) = \pm \sqrt{x-1}$
 $x^2 = y-1$ $\therefore f^{-1}(0) = \pm \sqrt{0-1} = \pm i$
 $x = \pm \sqrt{y-1}$ কিন্তু $\pm i \notin \mathbb{R} \therefore f^{-1}(0) = \emptyset$

04. $f(x) = \frac{x-3}{2x+1}$ এবং $x \neq -\frac{1}{2}$ হলে $f^{-1}(-2)$ এর মান হবে— [DU'12-13]
 (a) 1/2 (b) 1/5 (c) 2 (d) 5

Solⁿ: (b); $f(x) = \frac{x-3}{2x+1} \Rightarrow y = \frac{x-3}{2x+1} \Rightarrow 2xy + y = x - 3 \Rightarrow y + 3 = x - 2yx \Rightarrow \frac{y+3}{1-2y} = x$
 $\therefore f^{-1}(y) = \frac{y+3}{1-2y} \therefore f^{-1}(-2) = \frac{(-2)+3}{1-2(-2)} = \frac{1}{5}$

05. $f(x) = \frac{x-2}{x-3}$ হলে, $f^{-1}(0)$ এর মান কত? [JU'15-16]
 (a) -2 (b) -1 (c) 2 (d) 4

Solⁿ: (c); $f(x) = \frac{x-2}{x-3} \therefore f^{-1}(x) = \frac{3x-2}{x-1} \therefore f^{-1}(0) = 2$

06. $f(x) = \cos a$ হলে $f'(a)$ এবং $f''(a)$ এর মান যথাক্রমে কত?

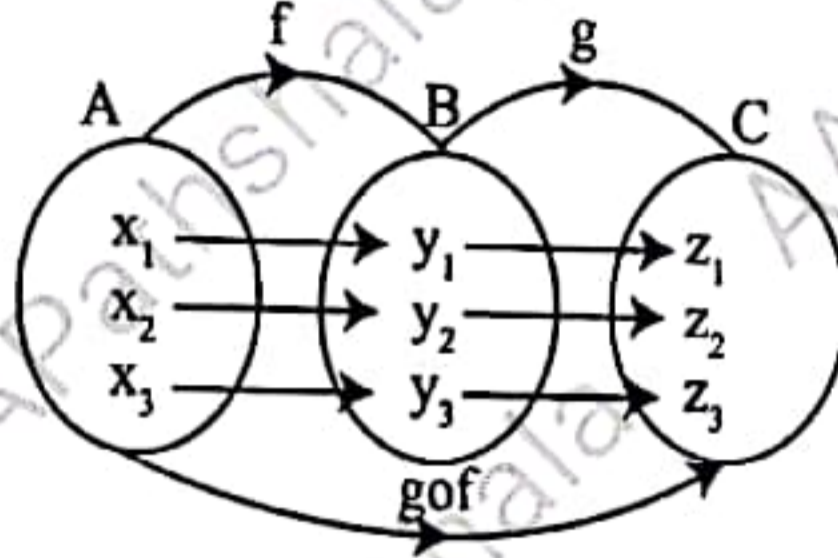
- (a) $-\sin a, -\cos a$ (b) $0, -\sin a$ (c) $-\cos a, -\sin a$ (d) $0, 0$

[Ans: d][CU'16-17]

(e) $-\sin a, 0$

Question Type-5: সংযোজিত ফাংশন

দুই বা ততোধিক ফাংশনের সংযোজিত ফাংশনে একটি ফাংশনের আউটপুট অন্য ফাংশনের ইনপুট রূপে ব্যবহৃত হয়। $f: A \rightarrow B$ এবং $g: B \rightarrow C$ দ্বারা দুইটি ফাংশন সূচিত হলে, $g \circ f: A \rightarrow C$ দ্বারা সূচিত ফাংশনকে f এর সঙ্গে g এর সংযোজিত ফাংশন বলা হয়, যেখানে A, B, C তিনটি অশূন্য সেট। রেখাচিত্রে, f এর অধীন $x_1 \in A$ এর আউটপুট মান $y_1 = f(x_1) \in B$ যা g এর অধীন ইনপুট মান এবং y_1 এর আউটপুট মান $z_1 = g(y_1) = g(f(x_1)) = (g \circ f)(x_1) \in C$.



[নোট: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. 'g o f' পড়া হয় 'g operation f']

মনে করি, f, g এবং $g \circ f$ তিন ধরনের মেশিন। যেখানে, f মেশিন দ্বারা তুলা থেকে সুতা এবং g মেশিন দ্বারা সুতা থেকে কাপড় উৎপাদন করা হয়। তাহলে $g \circ f$ মেশিন দ্বারা তুলা থেকে কাপড় উৎপাদন করা যাবে।

নিচের চারটি ক্ষেত্র ভালভাবে মনে রাখবেঃ

$$f \circ g = f \circ g(x) = f(g(x)) \quad f \circ f = f \circ f(x) = f(f(x)) \quad g \circ f = g \circ f(x) = g(f(x)) \quad g \circ g = g \circ g(x) = g(g(x))$$

Example: যদি $f(x) = x^2 - 2|x|$ এবং $g(x) = x^2 + 1$ হয়, তবে $g(f(-2))$ এর মান-

$$\text{Sol: } f(-2) = (-2)^2 - 2|-2| = 4 - 4 = 0$$

$$\therefore g(f(-2)) = g(0) = 0 + 1 = 1 \quad (\text{Ans.})$$

Example: $F: A \rightarrow B$, $f(x) = \log(1+x)$ এবং $g: B \rightarrow C$, $g(x) = e^x$ হলে $(g \circ f)(x) = ?$

$$\text{Sol: } (g \circ f)(x) = g(\log(1+x)) = e^{\log(1+x)} = 1+x \quad (\text{Ans.})$$

Related Questions:

01. $f(x) = x^2 + 3|x|$ এবং $g(x) = 1 - x^2$ হলে, $f\{g(-\sqrt{2})\} =$ কত?

[JU'14-15]

- (a) 4 (b) 18 (c) -4 (d) 14

$$\text{Sol}^n: (a); f(x) = x^2 + 3|x|; g(x) = 1 - x^2$$

$$f\{g(-\sqrt{2})\} = (1 - (-\sqrt{2})^2) = f(1-2) = f(-1) = (-1)^2 + 3|-1| = 1 + 3 = 4$$

02. যদি $f(x) = (x-2)(1-x)$ হয়, তবে $f(f(3))$ এর মান

[DU'13-14]

- (a) 9 (b) -12 (c) 12 (d) 8

$$\text{Sol}^n: (b); f(3) = (3-2)(1-3) = -2; f(f(3)) = f(-2) = \{(-2)-2\} \{1-(-2)\} = -12$$

03. $f(x) = 3x^3 + 3$ এবং $g(x) = \sqrt[3]{\frac{x-2}{3}}$ হলে $(f \circ g)(3)$ এর মান-

[DU'11-12]

- (a) -4 (b) 2 (c) 3 (d) 4

$$\text{Sol}^n: (d); (f \circ g)(3) = f(g(3)) = f\left(\sqrt[3]{\frac{3-2}{3}}\right) = f\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\right) = 3\left(\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)^3 + 3 = 3 \times \frac{1}{3} + 3 = 4$$

04. $f(x) = \sin x, g(x) = x^2$ হলে $f\left(g\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)\right)$ এর মান-

- (a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) 1

Solⁿ: (a); $g\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}; f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

05. $f(x) = x^2 + 4$ এবং $g(x) = 2x - 1$ হলে $g(f(x))$ এর মান-

- (a) $2x^2 + 7$ (b) $7x^2 + 2$ (c) $x^2 + 2x - 1$ (d) $x^2 - 2x + 3$

Solⁿ: (a); $g(f(x)) = g(x^2 + 4) = 2(x^2 + 4) - 1 = 2x^2 + 7$

07. $f(x) = x^2 - 2|x|$ এবং $g(x) = x^2 - 9$ হলে $g(f(-3))$ এর মান-

- (a) 0 (b) 1 (c) $\frac{1}{2}$ (d) -1

08. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ এবং $g(x) = x + 1$ হলে $(g \circ f)(1) =$ কত?

- (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 4

09. বাস্তব সংখ্যা সেট \mathbb{R} এর উপর বর্ণিত f এবং g দুটি ফাংশন যথাক্রমে $f(x) = x^2 + 2x - 3$ এবং $g(x) = 3x - 4$, তাহলে $(f \circ g)(0)$ এর মান কত?

- (a) 1 (b) 5 (c) 0 (d) 13

Solⁿ: (b); $g(0) = 3 \cdot 0 - 4 = -4$

$(f \circ g)(0) = f(-4) = (-4)^2 + 2 \cdot (-4) - 3 = 16 - 8 - 3 = 5$

10. $f(x) = x^2 + 3x + 1$ এবং $g(x) = 2x - 3$ হলে $(f \circ g)(x)$ এর মান কত?

- (a) $4x^2 + 6x + 1$ (b) $4x^2 - 6x + 1$ (c) $6x^2 - 4x + 1$ (d) $6x^2 + 4x - 1$

Solⁿ: (b); $(f \circ g)(x) = f(2x - 3) = (2x - 3)^2 + 3(2x - 3) + 1 = 4x^2 + 9 - 2 \cdot 2x \cdot 3 + 6x - 9 + 1 = 4x^2 + 9 - 12x + 6x - 8 = 4x^2 - 6x + 1$

11. $f(x) = (x - 2)(8 - x)$ হলে, $f\{f(3)\}$ এর মান কত?

- (a) -7 (b) 5 (c) 9 (d) -5

12. যদি $f(x) = \frac{1}{x}$ হয় তবে $f(f(x))$ এর মান হবে-

- (a) $\frac{1}{x^2}$ (b) $\frac{1}{x}$ (c) x (d) $\frac{2}{x^2}$ (e) x^2

13. $f(x) = 2x - 5$ এবং $g(x) = x^2 + 6$ হলে, $(g \circ f)(2)$ এর মান কত?

- (a) 3 (b) 5 (c) 7 (d) 9

Solⁿ: (c); $f(2) = 2 \times 2 - 5 = -1 \therefore (g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(-1) = (-1)^2 + 6 = 7$

14. $f(x) = \sin x$ এবং $g(x) = x^2$ হলে $(f \circ g)\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$ এর মান হবে-

- (a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $\sqrt{2}$

Solⁿ: (a); $(f \circ g)\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) = f\left\{g\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)\right\} = f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

15. $f(x) = 3x + 2$ এবং $g(x) = x^2 + 4$ হলে $(f \circ g)(-4)$ এর মান কোনটি?

- (a) 104 (b) 20 (c) 62 (d) কোনটিই নয়

16. $f(x) = 3x - 1$ এবং $g(x) = 2x + 3$ হলে $(g \circ f)(2)$ এর মান কোনটি?

- (a) 20 (b) 5 (c) 7 (d) 13

Solⁿ: (d); $f(2) = 5; g \circ f(2) = g(5) = 13$

17. $g(x) = 100$ এবং $h(x) = 10$ হলে $g(h(x))$ এবং $h(g(x))$ এর মান যথাক্রমে কত?

- (a) 10,100 (b) 100,1000 (c) 100, 10 (d) 1000,10

[Ans: c][CU'16-17]

18. $f(x) = 2x + 1$ ফাংশনটি—

- (a) 1-1 এবং অননু (b) শুধু 1-1 (c) শুধুই অননু
(d) 1-1 এবং অননু কোনটিই নয় (e) সঙ্গায়িত নয়

(e) 10, 1000

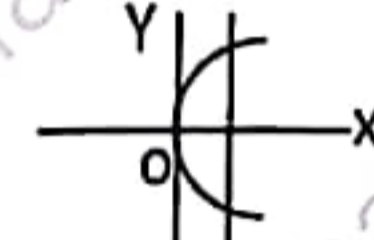
[Ans: a][CU'16-17]

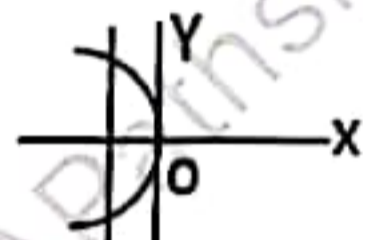
Question Type-6: গ্রাফ থেকে ফাংশন চেনার উপায়

Parallel Line Test: প্রদত্ত গ্রাফের উপর দিয়ে অধীন চলকের Parallel এ অংকিত একটি সরলরেখা গ্রাফটিকে একটিমাত্র বিন্দুতে ছেদ করলে সেটি ফাংশন হবে। উল্লেখ্য যে,

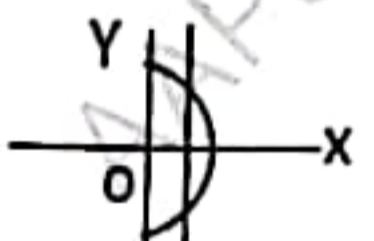
01. y, x - এর ফাংশন হলে y অক্ষ অধীন অক্ষ।
02. x, y - এর ফাংশন হলে x অক্ষ অধীন অক্ষ।
03. কোন কথা উল্লেখ না থাকলে সাধারণত y, x - এর ফাংশন।

লক্ষ্য করোঃ

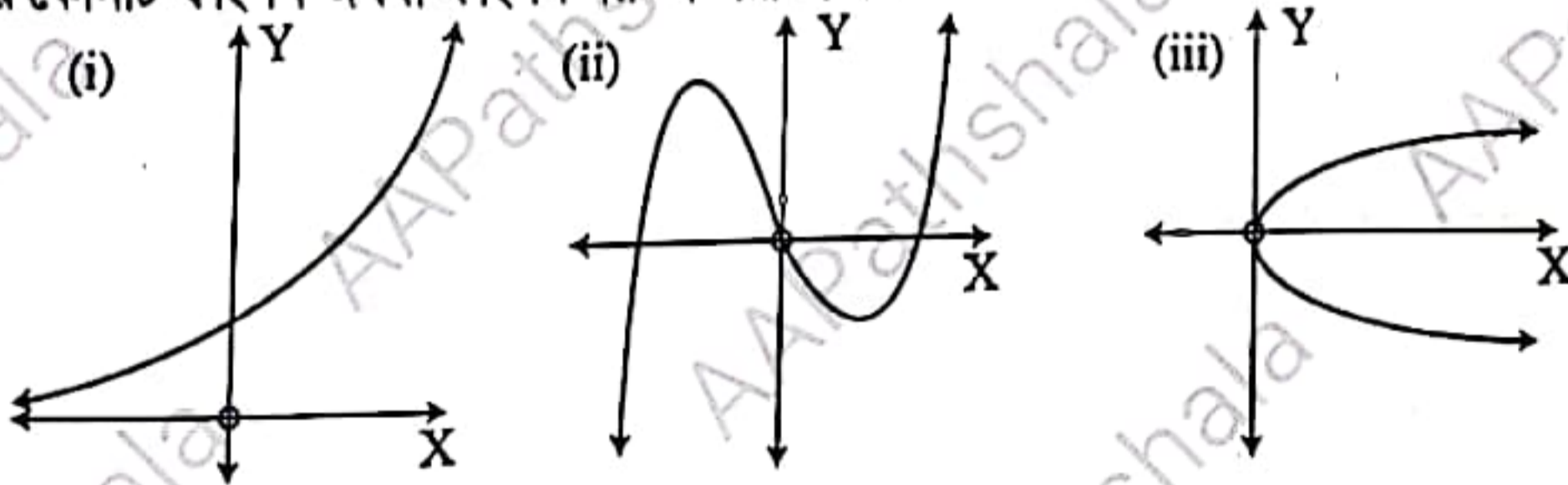
(a)  এটি ফাংশন নয় কারণ y অক্ষের Parallel line গ্রাফটিকে একাধিক বিন্দুতে ছেদ করেছে।

(b)  এটি ফাংশন নয় কারণ y অক্ষের Parallel line গ্রাফটিকে একাধিক বিন্দুতে ছেদ করেছে।

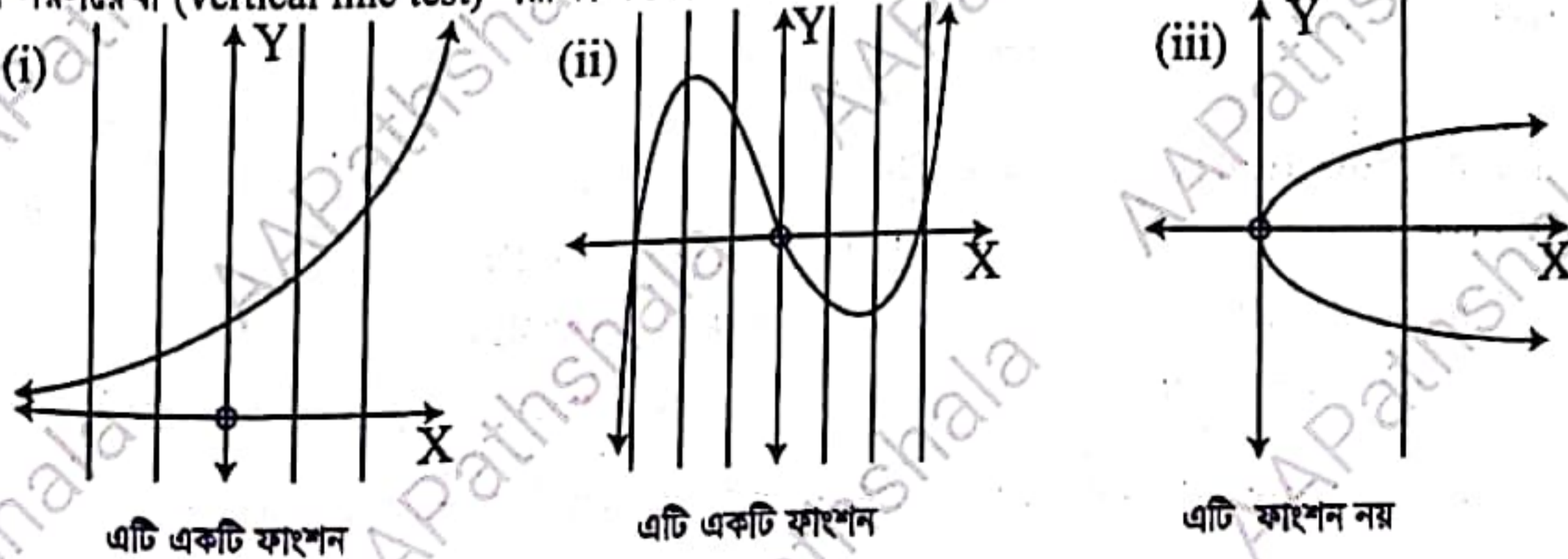
(c)  এটি ফাংশন কারণ y অক্ষের Parallel line গ্রাফটিকে একটিমাত্র বিন্দুতে ছেদ করেছে।

(d)  এটি ফাংশন নয় কারণ y অক্ষের Parallel line গ্রাফটিকে একাধিক বিন্দুতে ছেদ করেছে।

Example: নিচের কোনটি ফাংশন অথবা ফাংশন নয় তা পরীক্ষা কর।



Solⁿ: উল্লম্ব সরলরেখা (vertical line test) পরীক্ষা করে।



বৃত্ত নিয়ে কিছু কথাঃ

আমরা জানি, $x^2+y^2=1$ সমীকরণটি একটি বৃত্ত নির্দেশ করে যার কেন্দ্র মূলবিন্দু এবং যার ব্যাসার্ধ 1.

এখানে, y -কে x -এর মাধ্যমে প্রকাশ করলে পাই $y = \pm\sqrt{1-x^2}$. $P(x, y)$ বিন্দুটি বৃত্তের y -অক্ষের উপরের অংশে অবস্থিত হলে y -এর মান ধনাত্মক হবে, y -অক্ষের নিচের অংশে অবস্থিত হলে y -এর মান ঋণাত্মক হবে। সুতরাং এই দুই অংশের জন্য দুইটি পৃথক সমীকরণ যথা, $y = \sqrt{1-x^2}$

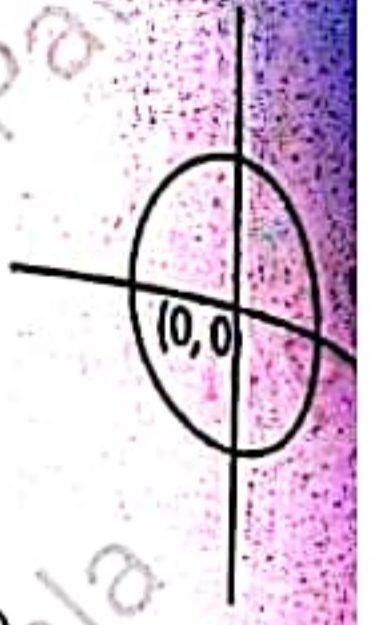
এবং $y = -\sqrt{1-x^2}$ দ্বারা বৃত্তটি বর্ণিত হবে। y -অক্ষের উপরে অবস্থিত বিন্দুর জন্য উভয় সমীকরণই প্রযোজ্য।

অতএব, $x^2+y^2=1$ সমীকরণটি দুইটি পৃথক ফাংশন সংজ্ঞায়িত করে; উভয়ের ডোমেন বন্ধ ব্যবধি (closed interval)

$[-1, 1] = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1\}$. প্রথম ফাংশন $y = \sqrt{1-x^2}$ এর রেঞ্জ বন্ধ ব্যবধি $[0, 1] = \{y \in \mathbb{R} : 0 \leq y \leq 1\}$

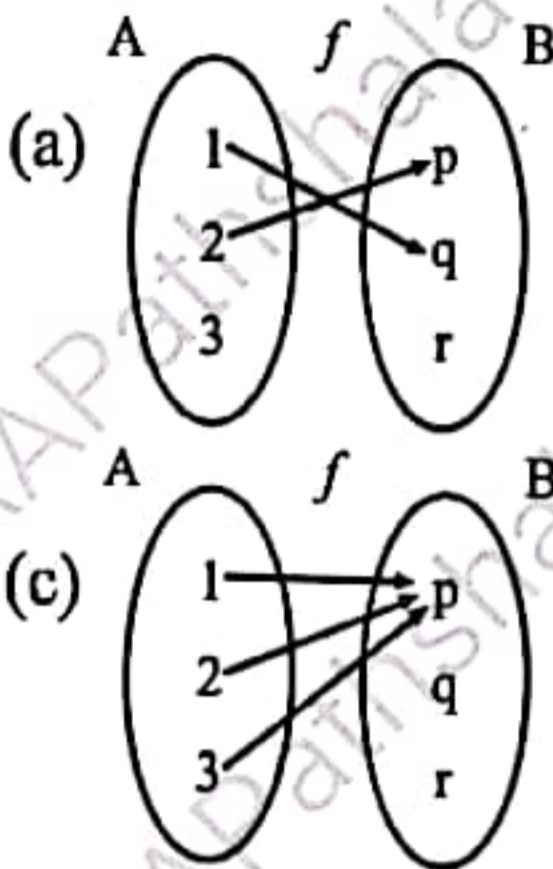
দ্বিতীয় ফাংশন $y = -\sqrt{1-x^2}$ এর রেঞ্জ বন্ধ ব্যবধি। $[-1, 0] = \{y \in \mathbb{R} : -1 \leq y \leq 0\}$.

দ্রষ্টব্যঃ $F = \{(x, y) : x^2+y^2=1\}$ একটি অবয় কিস্তি, ফাংশন নয়। কেননা, $(1, 1)$ এবং $(1, -1)$ ক্রমজোড় দুইটি \mathbb{R} এর উপাদান কিস্তি তাদের প্রথম পদ অভিন্ন হলেও দ্বিতীয় পদ এক নয়।



Related Questions:

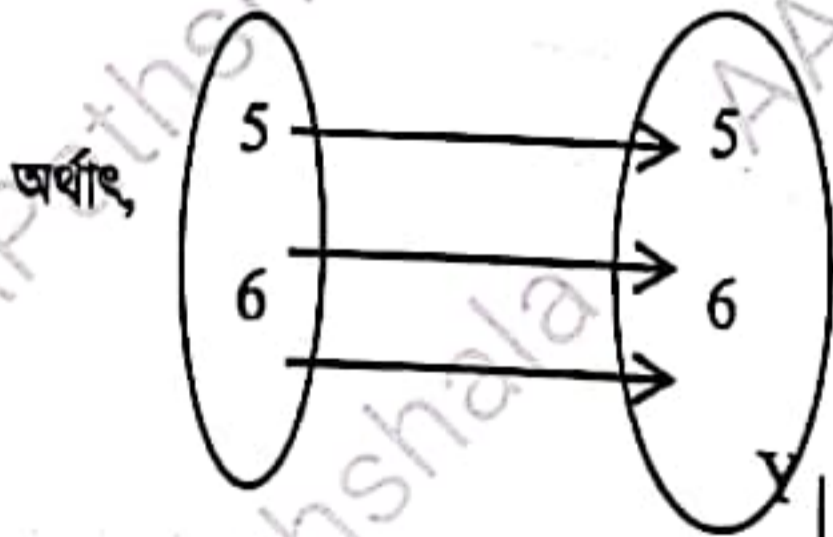
01. নিচের কোন চিত্রটি ফাংশন?



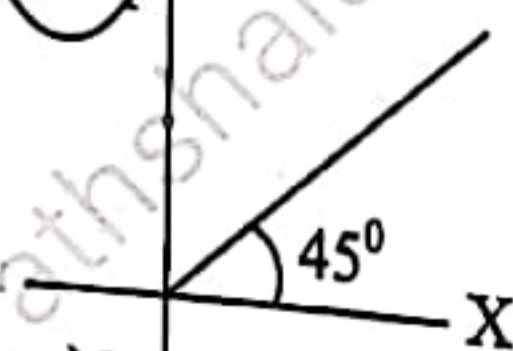
Solⁿ: (c); a এর ডোমেন (সেট A) এর সদস্য 3 অব্যবহৃত; b এর ডোমেন (সেট A) এর সদস্য 2 অব্যবহৃত এবং 3 দুইবার ব্যবহৃত; c এর ডোমেন (সেট A) এর সদস্য 3 দুইবার ব্যবহৃত; এসবগুলোই ফাংশনের শর্ত ভঙ্গ করে।

Question Type-6: অভেদ ফাংশন (Identity Function)

A সেটের প্রতিটি উপাদানের প্রতিচ্ছবি যদি একই উপাদান হয়, তাহলে তাকে অভেদ ফাংশন বলে। যেমন- $f: A \rightarrow B$ কে $f(x) = x$ এর সংজ্ঞায়িত করা হলে, $f(5) = 5, f(6) = 6, f(1) = 1$



অভেদ ফাংশনের গ্রাফঃ

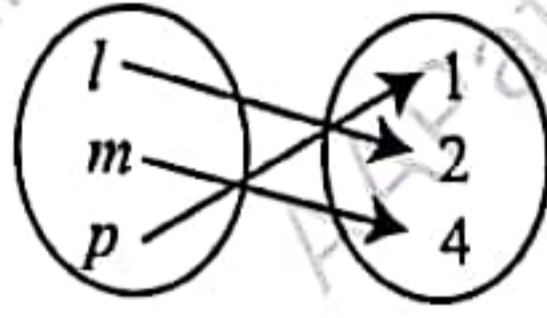


- ◆ **যুগ্ম ফাংশন (Even Function)ঃ** $f(-x) = f(x)$ হলে তাকে যুগ্ম ফাংশন বলে।
যেমন- $f(x) = \cos x + x^2$ হলে, $f(-x) = \cos(-x) + (-x)^2 = \cos x + x^2 = f(x)$
- ◆ **অযুগ্ম ফাংশন (Odd Function)ঃ** $f(-x) = -f(x)$ হলে তাকে অযুগ্ম ফাংশন বলে।
যেমন- $f(x) = x^3 + \sin x$ হলে, $f(-x) = (-x)^3 + \sin(-x) = -(x^3 + \sin x) = -f(x)$
- ◆ **ধ্রুব ফাংশনঃ** $f(x) = k$ আকৃতির যেকোন ফাংশন কে ধ্রুব ফাংশন বলে যেখানে k যেকোন ধ্রুবসংখ্যা।

প্রতিসঙ্গ ফাংশন (Bijective):

যে ফাংশন এক-এক এবং সার্বিক তাকে প্রতিসঙ্গ ফাংশন বলে।

ধরি, একটি ফাংশন $f: \{l, m, p\} \rightarrow \{1, 2, 4\}$ যেন $f(l) = 1, f(m) = 2, f(p) = 4$ ফাংশনটি এক-এক কারণ এর ভিন্ন উপাদানের জন্য ভিন্ন মান আছে। আবার ফাংশনটি সার্বিক কারণ f এর মাধ্যমে দ্বিতীয় সেটের প্রতিটি উপাদান প্রথম সেটের উপাদানের প্রতিচ্ছবি।



ব্যক্ত ফাংশন (Explicit Function):

যে ফাংশনকে সরাসরি স্বাধীন চলকের মাধ্যমে প্রকাশ করা হয় অর্থাৎ কোনটি স্বাধীন চলক এবং কোনটি অধীন চলক তা সম্পূর্ণরূপে প্রকাশ করা যায় তাকে ব্যক্ত ফাংশন বলে।

যেমন : $y = x^2, y = x^2 - 2x - 2, y = \frac{7x-5}{4}$ ইত্যাদি ব্যক্ত ফাংশন।

অব্যক্ত ফাংশন (Implicit Function):

যে ফাংশনকে সরাসরি স্বাধীন চলকের মাধ্যমে প্রকাশ করা যায় না অর্থাৎ কোনটি স্বাধীন চলক এবং কোনটি অধীন চলক তা স্পষ্টভাবে প্রকাশ করা যায় না, তাকে অব্যক্ত ফাংশন বলে।

যেমন : $x^2 + xy + y^2 = 3, x^3 + xy + y^3 = 0, a^x + b^y - 7ab = 0$ ইত্যাদি অব্যক্ত ফাংশন।

Question Type-8: বিবিধ

01. $f(x)$ ফাংশনের $x = c$ বিন্দুতে $f(x)$ -এর গরিষ্ঠ মান হলে নিম্নের কোন শর্তটি সঠিক?

- (a) $f(c) < f(c + h)$ (b) $f(c) + f(c + h) > 0$
 (c) $f(c) - f(c + h) > 0$ (d) $f(c) - f(c + h) < 0$

Solⁿ: (c); $f(c) > f(c + h) \Rightarrow f(c) - f(c + h) > 0$

[Ans: c][CU'14-15]

02. $(x + y, 1)$ এবং $(3, x - y)$ ক্রমজোড় দুইটি সমান হলে, x ও y এর মান কত?

- (a) (2,1) (b) (0,2) (c) (1,2) (d) (2,2)

Solⁿ: (a); $x + y = 3$

$$\begin{array}{r} x - y = 1 \\ (+) 2x = 4 \end{array}$$

$\therefore x = 2 \therefore y = \frac{3-2}{2} = 1; (x, y) = (2, 1)$

[JU'14-15]

03. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ এবং $B = \{2, 3, 5, 6, 7\}$ হলে, $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = ?$

- (a) $\{1, 4, 6, 7\}$ (b) $\{1, 3, 6, 7\}$ (c) $\{2, 4, 6, 7\}$ (d) $\{1, 3, 4, 6\}$

Solⁿ: (a); $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{2, 3, 5, 6, 7\}; A/B = \{1, 4\}; B/A = \{6, 7\} \therefore (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{1, 4, 6, 7\}$

04. যদি $A = \{x \mid x + 4 = 4\}$ এবং $B = \{x \mid x^2 = 16 \text{ এবং } 2x = 6\}$ হয়, তবে $A - B$ এর মান কত? [JnU'13-14]

- (a) ϕ (b) $\{0\}$ (c) $\{4\}$ (d) $\{3\}$

Solⁿ: (b); $A = \{0\}; B = \{0\} \therefore A - B = \{0\}$

05. যদি $A = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ এবং $B = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$, $f: A \rightarrow B$ $f(x) = \frac{x-3}{2x+1}$ হয়, $f^{-1}(x)$ এর মান কত? [Ans: a][RU'08-09]

- (a) $\frac{x+3}{1-2x}$ (b) $\frac{x-3}{2x+1}$ (c) $\frac{2x+1}{x-3}$ (d) $\frac{1}{2x+1}$

Solⁿ: (a); $y = \frac{x-3}{2x+1} \Rightarrow 2xy + y = x - 3 \Rightarrow y + 3 = x(1 - 2y) \Rightarrow x = \frac{y+3}{1-2y} = f^{-1}(y) \therefore f^{-1}(x) = \frac{x+3}{1-2x}$

[CU'16-17]

06. X ও Y শান্ত সেট (non-empty) ঘরের কোন সাধারণ সদস্য না থাকলে $X - Y \cap Y$ কত?

- (a) x (b) \emptyset (c) y (d) (\emptyset) (e) $x - y$

Solⁿ: (b); $X \cap Y = \emptyset \therefore X - Y = X(x - Y) \cap Y = X \cap Y = \emptyset$

[Ans: a][CU'16-17]

07. যদি $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ হয় এবং $f(x) = x^2 + 9$ দ্বারা সজ্জায়িত করা হয় তাহলে $f^{-1}(0) =$ কত?

- (a) \emptyset (b) $3i$ (c) $-3i$ (d) 3