



অধ্যায়-০৯: অন্তরীকরণ

Part-01: Limit

Question Type-01:

01. $f(x) = \sqrt{1-x}$ হলে, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = ?$

[Ans: d][JU'10-11]

- (a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) কোনটিই নয়

Question Type-02:

01. $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1-\sin x}{(\frac{\pi}{2}-x)^2} = ?$

[JU'18-19]

- (a) 2 (b) 0.5 (c) 1 (d) 0

সমাধান: (b); $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1-\sin x}{(\frac{\pi}{2}-x)^2} \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{-\cos x}{2(\frac{\pi}{2}-x)(-1)} \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{-\sin x}{2(-1)} = \frac{1}{2} = 0.5$ [L' Hospital]

02. $y = \cot x$ ফাংশনটি কোন বিন্দুতে বিচ্ছিন্ন?

[Ans: a][JU'17-18]

- (a)
- π
- (b)
- $\frac{\pi}{2}$
- (c)
- $\frac{2\pi}{3}$
- (d)
- $\frac{3\pi}{2}$

03. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$ এর মান কোনটি?

[KU'17-18]

- (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

সমাধান: (c); $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - 2}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x}{\cos x} = 2$ [L'Hospital Rule]

04. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4}$ এর মান কোনটি?

[Ans: b][JU'16-17]

- (a) 0 (b) 8 (c) অসংজ্ঞায়িত (d) কোনটিই নয়

05. $\lim_{y \rightarrow \pi/2} (1 - \sin y) / \left(\frac{\pi}{2} - y \right)^2 = ?$

[JU'11-12,14-15]

- (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 1/2

সমাধান: (d); $\lim_{y \rightarrow \pi/2} \frac{(1 - \sin y)}{\left(\frac{\pi}{2} - y \right)^2} = \lim_{y \rightarrow \pi/2} \frac{-\cos y}{2\left(\frac{\pi}{2} - y \right)(-1)} \left[\text{L. hospital's rule} \right] = \lim_{y \rightarrow \pi/2} \frac{\sin y}{2(-1)(-1)} \left[\text{L. hospital's rule} \right] = \frac{1}{2}$

Question Type-03:

01. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} (\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}) = ?$

[Agri. Gucho'20-21]

- (a) 0 (b) 1 (c)
- α
- (d) x

সমাধান: (b); $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x - (1-x)}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = 1$



02. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt{1-4x}}{x}$ এর মান হবে-

[RU'19-20]

- (a) $\frac{7}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{9}{2}$ (d) $-\frac{1}{2}$

সমাধান: (a); $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt{1-4x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+3x} - \sqrt{1-4x})(\sqrt{1+3x} + \sqrt{1-4x})}{x(\sqrt{1+3x} + \sqrt{1-4x})}$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+3x-1+4x}{x(\sqrt{1+3x} + \sqrt{1-4x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7}{\sqrt{1+3x} + \sqrt{1-4x}} = \frac{7}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = \frac{7}{2}$

03. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ এর মান কত?

[RU'09-10,16-17,JU'11-12,18-19]

- (a) 1 (b) 0 (c) -1 (d) কোনটিই নয়

সমাধান: (a); $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \left[\frac{0}{0} \text{ form} \right] \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+x} = 1$

04. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$ এর মান কত?

[Ans: c][BAU'18-19]

- (a) 0 (b) $\frac{1}{2}$ (c) 1 (d) α

05. $\lim_{x \rightarrow -4} \left(\frac{x+4}{x^2+2x-8} \right)$ এর মান কত?

[JnU'17-18]

- (a) 0 (b) $-\frac{1}{6}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) ∞

সমাধান: (b); $\lim_{x \rightarrow -4} \left(\frac{x+4}{x^2+2x-8} \right) = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{(x+4)}{(x+4)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow -4} \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{6}$

06. The value of $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x}}{\cos x}$ is-

[DU'16-17]

- (a) e (b) 1 (c) $\frac{1}{e}$ (d) 0

সমাধান: (a); $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\cos x}}{\cos x} = \frac{e^{\cos 0}}{\cos 0} = \frac{e^1}{1} = e$

07. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi - x}$ সমান কত?

[JnU'16-17]

- (a) π (b) ∞ (c) 1 (d) 0

সমাধান: (c); $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi - x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi - h)}{\pi - \pi + h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\sin h}{-h} = 1$ [Let, $x = \pi + h$ $\therefore x \rightarrow \pi \therefore h \rightarrow 0$]

08. $\lim_{x \rightarrow 0} (\sec x)^x = ?$

[JnU'13-14]

- (a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) অসংজ্ঞায়িত (Undefined)

সমাধান: (b); ধরি, $y = (\sec x)^x$ so, $\ln y = x \ln(\sec x)$

$\lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(\sec x) = 0$ so, $\ln y = 0 \therefore y = e^0 = 1$

09. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\log(2+2x+x^2)}{(x+1)^2}$ এর মান কত?

[Ans: c][CU'13-14]

- (a) 5 (b) 2 (c) 1 (d) $\frac{1}{2}$

সমাধান: (c); $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\log(2+2x+x^2)}{(x+1)^2} = \lim_{(x+1)^2 \rightarrow 0} \frac{\log(1+(x+1)^2)}{(x+1)^2} = 1$





Question Type-04:

[DU'19-20]

01. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x}}{-x}$ এর মান হলো-

- (a) 1 (b) ∞ (c) $-\infty$ (d) -1

সমাধান: (a); $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x}}{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{2}{x}}}{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{1+\frac{2}{x}}$

Here, limiting value may seem to be -1. But, in $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x}}{-x}$; $\sqrt{x^2+2x} > 0$

$x \rightarrow -\infty \Rightarrow x < 0 \Rightarrow -x > 0 \therefore \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x}}{-x} = 1$

02. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-4}{2+x-4x^2}$ এর মান কত?

[JU'18-19]

- (a) -2 (b) $-\frac{1}{4}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) 1

সমাধান: (b); $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-4}{2+x-4x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-\frac{4}{x^2}}{\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}-4} = -\frac{1}{4}$ [Shortcut: x^2 এর সহগের অনুপাত]

03. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{x} - 1\right)$ এর মান কত?

[Ans: b][JU'18-19]

- (a) 1 (b) -1 (c) 0 (d) 3

04. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2+3x+5}{3x^2+5x-6}$ এর মান-

[DU'17-18]

- (a) $\frac{3}{5}$ (b) $-\frac{5}{6}$ (c) $\frac{2}{3}$ (d) $-\frac{2}{3}$

সমাধান: (c); $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2+3x+5}{3x^2+5x-6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2+\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}}{3+\frac{5}{x}-\frac{6}{x^2}} = \frac{2}{3}$ কারণ $x \rightarrow -\infty$ হলে $\left(\frac{1}{x} \text{ এবং } \frac{1}{x^2} \rightarrow 0\right)$

05. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+3}$ = কত?

[Ans: b][JU'17-18]

- (a) $\frac{1}{e}$ (b) e (c) e^2 (d) 1

06. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+x-3}{3x^2-4x+1} = ?$

[CU'15-16]

- (a) 0 (b) $-\frac{1}{4}$ (c) -3 (d) $\frac{2}{3}$ (e) ∞

সমাধান: (d); $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+x-3}{3x^2-4x+1} = \frac{x^2}{x^2} \frac{2+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}{3-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{2}{3}$

07. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+6x}{2x^2+5} = ?$

[DU'14-15]

- (a) 0 (b) $3/2$ (c) $1/2$ (d) 1

সমাধান: (c); $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+6x}{2x^2+5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{6}{x}}{2+\frac{5}{x^2}} = \frac{1}{2}$



**Question Type-05:**

01. $\int \cos \frac{x}{2} dx = ?$

[CU'20-21]

- (a) $2 \cos \frac{x}{2}$ (b) $2 \sin \frac{x}{2}$ (c) $2 \sec \frac{x}{2}$ (d) $2 \operatorname{cosec} \frac{x}{2}$

সমাধান: (b); $\int \cos \frac{x}{2} dx = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{1}{2}} = 2 \sin \frac{x}{2}$

02. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = ?$

[JU'10-11]

- (a) 6 (b) 9 (c) 12 (d) 3

সমাধান: (a); $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} x + 3 \Rightarrow 3 + 3 \Rightarrow 6$

Question Type-06:

01. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^{\frac{5}{2}} - a^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} = ?$

[JU'18-19]

- (a) $5a^2$ (b) $4a^2$ (c) $3a^2$ (d) $2a^2$

সমাধান: (a); $\lim_{x \rightarrow a} \frac{(\sqrt{x})^5 - (\sqrt{a})^5}{\sqrt{x} - \sqrt{a}} = 5(\sqrt{a})^4 = 5a^2$

02. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-3x}}{x} = ?$

[JU'18-19]

- (a) $\frac{11}{2}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{5}{2}$ (d) $\frac{11}{32}$

সমাধান: (c); $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-3x}}{x} \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+2x}} \times 2 - \frac{1}{2\sqrt{1-3x}} \times (-3)}{1} = \frac{1 + \frac{3}{2}}{1} = \frac{5}{2}$

03. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x} = ?$

[JU'17-18]

- (a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $-\frac{1}{4}$ (d) $-\frac{1}{2}$

সমাধান: (d); $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{1}$ [L'Hospital rule] $= \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2\sqrt{1-x}} = -\frac{1}{2}$

04. $\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} \right\}$ এর মান কত?

[JU'14-15]

- (a) 0 (b) 1 (c) -1 (d) $\frac{1}{2}$

সমাধান: (b); $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x) - (1-x)}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \frac{2}{2} = 1$

Question Type-07:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{\frac{bx+c}{dx}} = e^{\frac{ac}{d}} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x+b} \right)^x = e^{a-b}$$

01. $y = \log_y x$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ এর মান কত?

[SUST'19-20]

- (a) $\frac{1}{x(1+\ln x)}$ (b) $\frac{1}{x(1+\ln y)}$ (c) $\frac{1}{x \ln y}$ (d) $\frac{1}{x \ln x}$ (e) $\frac{1}{y(1+\ln x)}$

সমাধান: (b); $y = \log_y x$

$$\therefore x = y^y \Rightarrow \ln x = y \ln y \Rightarrow \frac{1}{x} \times 1 = y \times \frac{1}{y} \times \frac{dy}{dx} + \ln y \times \frac{dy}{dx} \therefore \frac{1}{x} = \frac{dy}{dx} (1 + \ln y) \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x(1+\ln y)}$$





02. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{\frac{bx+c}{x}} =$ কত?

[RU'18-19]

- (a) ac (b) bc (c) e^{ac} (d) 0

সমাধান: (c); $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{\frac{bx+c}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{\frac{ac}{ax}} = e^{ac}$

03. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 5x)^{\frac{3x+2}{x}} =$ কত?

[RU'13-14,14-15]

- (a) e^{10} (b) e^8 (c) 10 (d) 8

সমাধান: (a); $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 5x)^{\frac{3x+2}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 5x)^{3 + \frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 5x)^3 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 5x)^{\frac{2}{x}}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 5x)^{\frac{10}{5x}} = \left[\lim_{5x \rightarrow 0} (1 + 5x)^{\frac{1}{5x}} \right]^{10} = e^{10}; \left[\lim_{5x \rightarrow 0} (1 + 5x)^{\frac{1}{5x}} = e \right]$

Question Type-08:

01. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$ এর মান কত?

[BAU'18-19]

- (a) $\ln e^2$ (b) $\ln a$ (c) $\ln a^x$ (d) $\ln x^3$

সমাধান: (b); $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}$; \div আকার বলে L'Hospital rule apply করে পাই, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \ln a}{1} = \ln a$

02. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} + 1 \right) \left(\frac{5x^2 - 1}{x^2} \right) = ?$

[JU'14-15]

- (a) 1 (b) 0 (c) 5 (d) 2

সমাধান: (c); $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{x} \times \frac{5x^2-1}{x^2} \right) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+x}{x} \times \frac{5x^2-1}{x^2} \right) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - x + 5x^2 - 1}{x^3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \left(5 + \frac{5}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right)}{x^3} = 5 + 0 = 5$

Question Type-09:

01. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 2x}$ এর মান হবে-

[DU'20-21]

- (a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{8}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) 1

সমাধান: (b); $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 2x}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 + \sin x}{2 \times 2 \sin 2x \cos 2x}$ [L' Hospital's rule]

$= \frac{1}{4} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \frac{2x}{\sin 2x} \times \frac{1}{2} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 2x} \right) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{8}$

02. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 7x - \cos 9x}{\cos 3x - \cos 5x} =$ কত?

[RU'20-21]

- (a) 1 (b) $\frac{1}{2}$ (c) 2 (d) 0

সমাধান: (c); $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 8x \sin x}{2 \sin 4x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 8x}{8x} \times \frac{4x}{\sin 4x} \times \frac{8}{4} = 2$

03. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 9x - \sin 7x}{\sin 7x - \sin 5x} = ?$

[JU'19-20]

- (a) 1 (b) -1 (c) 2 (d) -2

সমাধান: (a); $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 9x - \sin 7x}{\sin 7x - \sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos 8x \sin x}{2 \cos 6x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 8x}{\cos 6x} = 1$





04. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ এর মান হবে-

[RU'19-20]

- (a) 2 (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (c) $\frac{3}{2}$ (d) $\frac{1}{2}$

সমাধান: (d); $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

05. $y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ বক্ররেখার (0,2) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ কোনটি?

[SUST'19-20]

- (a) $y = 0$ (b) $x = 0$ (c) $x = 2$ (d) $y = 2$ (e) $x = y$

সমাধান: (d); $y^2 - 2x - 4y + 4 = 0 \Rightarrow 2y \times \frac{dy}{dx} - 2 - 4 \frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2}{2y-4} = m \therefore (0,2)$ বিন্দুতে $m = \frac{2}{4-4} = \frac{2}{0}$

\therefore অভিলম্বের ঢাল $= -\frac{0}{2} = 0 \therefore (y - 2) = 0(x - 0) \therefore y = 2$

06. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\tan^{-1}(3x)} = ?$

[DU'18-19]

- (a) 0 (b) $\frac{1}{3}$ (c) 1 (d) 3

সমাধান: (b); $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{x}}{\frac{\tan^{-1} 3x}{3x} \times 3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^{-1} 3x}{3x} \times 3} = \frac{1}{3}$

07. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sec(x+h) - \sec x}{h}$ এর মান কত?

[Ans: d][BAU'18-19]

- (a) $\sec^2 x$ (b) $\tan x$ (c) $\sec x \operatorname{cosec} x$ (d) $\sec x \tan x$

সমাধান: (d); $\frac{0}{0}$ form, তাই L'Hospital প্রয়োগ করে পাই,

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sec(x+h) - \sec x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sec(x+h) \tan(x+h)}{1} = \sec x \tan x$

08. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^\circ}{x} =$ কত?

[RU'17-18]

- (a) 1 (b) 0 (c) $\frac{\pi}{180}$ (d) $\frac{180}{\pi}$

সমাধান: (c); $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^\circ}{x} = \frac{\pi}{180} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\pi x}{180}}{\frac{\pi x}{180}} = \frac{\pi}{180}$

09. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 3x}{x^2}$ এর মান কত?

[CU'17-18]

- (a) 0 (b) $\frac{5}{2}$ (c) 5 (d) ∞

সমাধান: (b); $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 3x}{x^2}$ [\div আকার] $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin 2x + 3 \sin 3x}{2x}$ [\div আকার]

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4 \cos 2x + 9 \cos 3x}{2} = \frac{-4 + 9}{2} = \frac{5}{2}$





10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x - \sin x}{\sin 6x} = ?$

[DU'15-16]

- (a) $\frac{7}{6}$ (b) $-\frac{7}{6}$ (c) 1 (d) -1

সমাধান: (c); Using L - Hospital's law: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x - \sin x}{\sin 6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7 \cos 7x - \cos x}{6 \cos x 6x} = \frac{7-1}{6} = 1$

11. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x}$

[RU'15-16]

- (a) 1 (b) 0 (c) -1 (d) 2

সমাধান: (b); $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x}$ limit বসালে ÷ আসে, তাই L' Hospital's Rule প্রয়োগ করে $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{0 - \cos x}{-\sin x} = 0$

12. $\frac{d}{dx} \{x^3 \ln(x)\} = ?$

[RU'15-16]

- (a) $x + 2x \ln(x)$ (b) $x^2 + 2x \ln(x)$ (c) $x^3 + 2x^2 \ln(x)$ (d) $x^2 + 3x^2 \ln(x)$

সমাধান: (d); $\frac{d}{dx} \{x^3 \ln(x)\} = x^3 \cdot \frac{1}{x} + (\ln x) \cdot 3x^2 = x^2 + 3x^2 \ln(x)$

13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{7x}$ এর মান হবে-

[CU'15-16]

- (a) $\frac{7}{4}$ (b) 4 (c) 7 (d) 0 (e) $\frac{4}{7}$

সমাধান: (e); $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{7(4x)} \cdot (4) = \frac{4}{7}$

14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\cos x + \cos 2x)}{\sin x} = ?$

[DU'03-05, KU'13-14, RU'14-15]

- (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

সমাধান: (b); $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\cos x + \cos 2x)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x + \cos 2x)}{\left(\frac{\sin x}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \cos 2x) = 1 + 1 = 2$

15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x} = ?$

[JU'09-10, 10-11, DU'09-10, JnU'14-15]

- (a) 1 (b) -1 (c) 0 (d) 2

সমাধান: (c); $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x}{1}$ [হসপিটাল rule] = 0

বিকল্পঃ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} \left[\because \lim_{x \rightarrow 0} x = \lim_{x \rightarrow 0} \sin x \right] = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$

Written

01. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$ এর মান বের কর।

[JnU'18-19]

সমাধান: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 1\right)}{\sin^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{(1 - \cos^2 x) \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(1 + \cos x) \cos x} = \frac{1}{2}$



**Question Type-10:**01. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$ এর মান কত?

[JU'15-16]

- (a) $\frac{a}{b}$ (b) $\frac{b}{a}$ (c) ab (d) কোনটিই নয়

সমাধান: (a); $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin ax}{ax} \cdot ax}{\frac{\sin bx}{bx} \cdot bx} = \frac{a}{b}$

Question Type-11:01. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(2+h) - \ln 2}{h}$ এর মান কোনটি?

[CU'20-21]

- (a) \sqrt{e} (b) $\frac{1}{2}$ (c) e^2 (d) $\frac{1}{3}$

সমাধান: (b); $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(2+h) - \ln 2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(\frac{2+h}{2}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{h}{2}\right)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h}{2} - \frac{h^2}{8} + \frac{h^3}{24}}{h} = \frac{1}{2}$

Shortcut: L'Hospital rule অনুযায়ী, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{2+h}} = \frac{1}{2+0} = \frac{1}{2}$

02. $f(x) = \sin x$ হলে, $f^{11}(0)$ এর মান কত?

[SUST'19-20]

- (a) 1 (b) 0 (c) -1 (d) $\frac{1}{2}$ (e) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

সমাধান: (c); $f(x) = \sin x$; $f^{4n+1}(x) = \cos x$; $f^{4n+2}(x) = -\sin x$ [$n = 0, 1, 2, \dots$]
 $f^{4n+3}(x) = -\cos x$; $f^{4n}(x) = \sin x$ $\therefore f^{11}(0) = f^{4 \times 2 + 3}(0) = -\cos 0 = -1$

03. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = ?$

[Ans: d][JU'17-18]

- (a) $1/4$ (b) $1/3$ (c) $-1/2$ (d) $1/2$

04. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x}$ এর মান কোনটি?

[Ans: c][JU'16-17]

- (a) ∞ (b) 0 (c) 1 (d) অসঙ্গায়িত

05. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_e(1+x)}{x}$ এর মান কত?

[Ans: c][KU'16-17]

- (a) 0 (b) $-\frac{1}{2}$ (c) 1 (d) ∞

06. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = ?$

[DU'13-14][JU'14-15]

- (a) -7 (b) $-\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) 1

সমাধান: (b); $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{4 \left(\frac{x}{2}\right)^2} = -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = -\frac{1}{2}$

অথবা, Calculator এ Radian mode $\frac{\cos x - 1}{x^2}$ রাশিটির মান 0 খুব কাছাকাছি বসালে ও $-\frac{1}{2}$ চলে আসে।

07. $y = \sqrt{x}$ বক্ররেখার উপর কোন বিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষের সহিত 45° কোণ সৃষ্টি করে?

[RU'13-14]

- (a) $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ (b) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ (c) $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ (d) $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

সমাধান: (a); $y = \sqrt{x}$ Or, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Or, $\tan 45^\circ = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ Or, $x = \frac{1}{4} \therefore y = \frac{1}{2}$





Question Type-12:

01. যদি $f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$ হয়, তবে $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ এর মান কত?

[SUST'19-20]

- (a) -1 (b) -2 (c) 0 (d) 1 (e) 2

সমাধান: (c); $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

02. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2(\sin x + \cos^3 x)}{(x^2+1)(x-3)} = ?$

[RU'15-16]

- (a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

সমাধান: (a); $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2(\sin x + \cos^3 x)}{(x^2+1)(x-3)}$ এখন, $-1 \leq \sin x \leq 1$ এবং $-1 \leq \cos x \leq 1 \therefore -1 \leq \cos^3 x \leq 1$

$$\therefore -2 \leq \sin x + \cos^3 x \leq 2 \Rightarrow -2x^2 \leq x^2(\sin x + \cos^3 x) \leq 2x^2 \quad [x \rightarrow -\infty \text{ হলে, } x^2 > 0]$$

$$\Rightarrow \frac{-2x^2}{(x^2+1)} \leq \frac{x^2(\sin x + \cos^3 x)}{(x^2+1)} \leq \frac{2x^2}{(x^2+1)} \quad [x \rightarrow -\infty \text{ হলে, } (x^2+1) > 0]$$

$$\Rightarrow \frac{-2x^2}{(x^2+1)(x-3)} \geq \frac{x^2(\sin x + \cos^3 x)}{(x^2+1)(x-3)} \geq \frac{2x^2}{(x^2+1)(x-3)} \quad [x \rightarrow -\infty \text{ হলে, } (x-3) < 0]$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2}{(x^2+1)(x-3)} \leq \frac{x^2(\sin x + \cos^3 x)}{(x^2+1)(x-3)} \leq \frac{-2x^2}{(x^2+1)(x-3)}$$

$$\text{এখন, } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{(x^2+1)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)x\left(1-\frac{3}{x}\right)} = 0$$

$$\text{এবং } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2}{(x^2+1)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)x\left(1-\frac{3}{x}\right)} = 0$$

\therefore Sandwich Theorem অনুযায়ী বলা যায়, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2(\sin x + \cos^3 x)}{(x^2+1)(x-3)} = 0$

03. ক্যালকুলাস আবিষ্কারের পেছনে অবদান আছে কার?

[Ans: d][RU'13-14]

- (a) পীথাগোরাস (b) গাউস (c) জগদীশচন্দ্র বসু (d) নিউটন





Part-2: Differentiation

Question Type-01: Chain rule প্রয়োগ

Example: x এর সাপেক্ষে নিম্নের ফাংশনগুলির অন্তরজ নির্ণয় কর।

(a) $\cos \sqrt{x}$

(b) $\sin^2(\ln x)^2$

সমাধান: (a) $\frac{d}{dx}(\cos \sqrt{x}) = -\sin \sqrt{x} \cdot \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = -\sin \sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

(b) $\frac{d}{dx}\{\sin^2(\ln x)^2\} = 2 \sin(\ln x)^2 \cdot \frac{d}{dx}\{\sin(\ln x)^2\} \quad \left[\because \frac{d}{dx}(x^2) = 2x \right]$

$= 2 \sin(\ln x)^2 \cos(\ln x)^2 \frac{d}{dx}(\ln x)^2 \quad \left[\because \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \right]$

$= \sin 2(\ln x)^2 \cdot 2 \ln x \cdot \frac{d}{dx}(\ln x) \quad [\because 2 \sin x \cos x = \sin 2x] = \sin 2(\ln x)^2 \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2 \ln x}{x} \sin 2(\ln x)^2$

Example: x এর সাপেক্ষে $\sqrt{\sin \sqrt{x}}$ এর অন্তরীকরণ কর।

সমাধান: $\frac{d}{dx}(\sqrt{\sin \sqrt{x}}) = \frac{1}{2\sqrt{\sin \sqrt{x}}} \frac{d}{dx}(\sin \sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{\sin \sqrt{x}}} \cos \sqrt{x} \cdot \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{\cos \sqrt{x}}{2\sqrt{\sin \sqrt{x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{\cos \sqrt{x}}{4\sqrt{x}\sqrt{\sin \sqrt{x}}}$

Related Questions:

01. $\frac{d}{dx}(\cos^2(\ln x)) = ?$

[DU'20-21]

(a) $-\frac{\sin(2 \ln x)}{2}$

(b) $-\frac{2 \cos(\ln x)}{x}$

(c) $-\frac{\sin(2 \ln x)}{x}$

(d) $-2x \cos(\ln x) \sin(\ln x)$

সমাধান: (c); $\frac{d}{dx}(\cos^2(\ln x)) = 2 \cos(\ln x) (-\sin(\ln x)) \frac{1}{x} = -\frac{2 \sin(\ln x) \cos(\ln x)}{x} = -\frac{\sin(2 \ln x)}{x}$

02. $y = \tan^{-1} \frac{1+x}{1-x}$ হলে, $\frac{dy}{dx} =$ কত?

[Agri. Gucho'20-21]

(a) $\frac{1}{1-x^2}$

(b) $\frac{1}{1+x}$

(c) $\frac{x}{1+x^2}$

(d) $\frac{1}{1+x^2}$

সমাধান: (d); $y = \tan^{-1} \frac{1+x}{1-x} = \tan^{-1} 1 + \tan^{-1} x = \frac{\pi}{4} + \tan^{-1} x \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$

03. $\frac{d}{dx}(\cos \sqrt{x})$ এর মান কোনটি?

[Ans: b][JU'19-20]

(a) $-\sin \sqrt{x}$

(b) $-\frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

(c) $-\frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

(d) $\frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

04. $y = \tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ এর মান কোনটি?

[Ans: d][JU'19-20]

(a) $\frac{2}{1-x^2}$

(b) $\frac{2}{\sqrt{1+x^2}}$

(c) $\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$

(d) $\frac{2}{1+x^2}$

সমাধান: (d); $y = \tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2} = 2 \tan^{-1} x \therefore \frac{dy}{dx} = 2 \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2}$

05. যদি $y = e^{-9x}$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx}$ এর মান কোনটি?

[Ans: b][JU'19-20]

(a) $-\frac{1}{9}e^{-9x}$

(b) $-9e^{-9x}$

(c) $\frac{1}{9}e^{-9x}$

(d) $9e^{-9x}$

06. $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} \frac{1+x}{1-x})$ এর মান কোনটি?

[JU'19-20]

(a) $1 + x^2$

(b) $\frac{1}{1+x^2}$

(c) $-\frac{1}{1+x^2}$

(d) $\sqrt{1-x^2}$

সমাধান: (b); $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} \frac{1+x}{1-x}) = \frac{1}{1+(\frac{1+x}{1-x})^2} \times \frac{(1-x) \times 1 - (1+x)(-1)}{(1-x)^2}$

$= \frac{(1-x)^2}{(1-x)^2 + (1+x)^2} \times \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{2}{2+2x^2} = \frac{1}{1+x^2}$





07. x এর প্রেক্ষিতে $\frac{d}{dx} \left(\tan^{-1} \frac{x}{5} \right) = ?$

[JU'19-20]

- (a) $\frac{1}{25+x^2}$ (b) $\frac{5}{25-x^2}$ (c) $\frac{5}{25+x}$ (d) $\frac{5}{25+x^2}$

সমাধান: (d); $\frac{d}{dx} \left(\tan^{-1} \frac{x}{5} \right) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{5}\right)^2} \times \frac{1}{5} = \frac{1 \times 25}{25+x^2} \times \frac{1}{5} = \frac{5}{25+x^2}$

08. $y = \frac{\ln x}{x}$ হলে $\frac{dy}{dx} = ?$

[RU'19-20]

- (a) $\frac{1-\ln x}{x^2}$ (b) $\frac{x-\ln x}{x^2}$ (c) $-\frac{\ln x}{x^2}$ (d) $\frac{1-\ln x}{x}$

সমাধান: (a); $y = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x \times \frac{1}{x} - \ln x \times 1}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$

09. x এর সাপেক্ষে $\tan^{-1}(e^x)$ এর অন্তরজ কত?

[KU'19-20]

- (a) $\frac{e^x}{1+e^{2x}}$ (b) $\frac{e^x}{1-e^{2x}}$ (c) $\frac{1+e^{2x}}{e^x}$ (d) $\frac{1-e^{2x}}{e^x}$

সমাধান: (a); $\frac{d}{dx} \{ \tan^{-1}(e^x) \} = \frac{1}{1+e^{2x}} \times e^x = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$

10. $y = \tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2}$ হলে $\frac{dy}{dx} = ?$

[JU'18-19]

- (a) $\frac{2x}{1-x^2}$ (b) $\frac{2}{1-x^2}$ (c) $\frac{2x}{1+x}$ (d) $\frac{2}{1+x^2}$

সমাধান: (d); $y = \tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2} = 2 \tan^{-1} x$; $y_1 = \frac{2}{1+x^2}$

11. $\frac{d}{dx} (2x-5)^3 = ?$

[JU'18-19]

- (a) 8 (b) 38 (c) 48 (d) 58

সমাধান: (no ans.); $\frac{d}{dx} (2x-5)^3 = 3(2x-5)^2 \cdot 2 = 6(2x-5)^2$

12. $\frac{d}{dx} (\sin^{-1}(x^2))$ এর মান কোনটি?

[Ans: c][JU'18-19]

- (a) $\frac{2x^2}{\sqrt{1-x^4}}$ (b) $\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$ (c) $\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$ (d) $\frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$

13. x এর সাপেক্ষে $\ln(e^x + e^{-x})$ এর অন্তরজ কত?

[Ans: d][JU'18-19]

- (a) $\frac{1}{e^x+e^{-x}}$ (b) $\frac{e^{2x}}{e^x+e^{-x}}$ (c) $\frac{e^{-x}-e^x}{e^x+e^{-x}}$ (d) $\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

14. যদি $y = \frac{\ln x}{x}$ হয় তবে $x^3 y_2 - 2xy$ এর মান কোনটি?

[RU'17-18]

- (a) -3 (b) -2 (c) -1 (d) 0

সমাধান: (a); $y = \frac{\ln x}{x}$; $y_1 = \frac{x \cdot \frac{1}{x} - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$

$y_2 = \frac{x^2 \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) - (1-\ln x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{-3+2\ln x}{x^3} \therefore x^3 y_2 - 2xy = -3$

15. $y = \ln x$ হলে $\frac{dx}{dy} =$ কত?

[CU'17-18]

- (a) e^y (b) e^x (c) x (d) $\frac{1}{y}$

সমাধান: (c); $y = \ln x \Rightarrow 1 = \frac{1}{x} \frac{dx}{dy} \therefore \frac{dx}{dy} = x$





16. যদি $y = \sin^{-1}(\sin x)$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx}$ হবে- [DU'16-17]

- (a) $\sin x$ (b) $\cos x$ (c) x (d) 1

সমাধান: (d); $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \{\sin^{-1}(\sin x)\} = \frac{d}{dx}(x) = 1$

17. $y = \ln(\ln x)$ হলে $\frac{dy}{dx}$ এর মান কত? [JU'16-17]

- (a) $\frac{1}{\ln x}$ (b) $\frac{1}{x \ln x}$ (c) $\frac{x}{\ln x}$ (d) কোনটিই নয়

সমাধান: (b); $y = \ln(\ln x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x \ln x}$

18. $y = e^{5-2x}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ এর মান কত? [Ans: c][JU'16-17]

- (a) e^{5-2x} (b) $2e^{5-2x}$ (c) $-2e^{5-2x}$ (d) $(5-2x)e^{5-2x}$

19. $y = 3 \log_a x - 5e^x$ হলে $\frac{dy}{dx}$ এর মান কত? [JU'16-17]

- (a) $\frac{3}{x} - 5e^x$ (b) $\frac{3}{x} \log_a e - 5e^x$ (c) $\frac{3}{x} \log_a x - 5e^x$ (d) কোনটিই নয়

সমাধান: (b); $y = 3 \log_a x - 5e^x = 3 \log_a e \cdot \ln x - 5e^x \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3}{x} \cdot \log_a e - 5e^x$

20. $y = \tan^{-1} \frac{4x}{1-4x^2}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ সমান কত? [JnU'16-17]

- (a) $\frac{4}{1+4x^2}$ (b) $\frac{-4}{1-4x^2}$ (c) $\frac{4}{1-4x^2}$ (d) $\frac{1}{4x^2-1}$

সমাধান: (a); $y = \tan^{-1} \frac{4x}{1-4x^2} = \tan^{-1} \frac{2 \cdot 2x}{1-(2x)^2} = 2 \tan^{-1} 2x \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2 \cdot 2}{1+2x^2} = \frac{4}{1+4x^2}$

21. $y = x \log_a x$ হলে $\frac{dy}{dx} = ?$ [CU'16-17]

- (a) $\log_a x + \log_a e$ (b) $+\log_e a$ (c) $\log_a x + 1$ (d) $\log_a x$ (e) 1

সমাধান: (a); $y \log_a e \times \log_e x = \log_a e \cdot x \ln x \therefore \frac{dy}{dx} = \log_a e \times \left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right) = \log_a x + \log_a e$

22. $\frac{d}{dx} \left[\log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right] = ?$ [Ans: c][CU'16-17]

- (a) $\sec \frac{x}{2}$ (b) $2 \sec x$ (c) $\sec x$ (d) $\sec x \tan x$ (e) $\frac{1}{2} \sec \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right)$

সমাধান: (c); $\frac{d}{dx} \left[\log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right] = \frac{\sec^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right)}{2 \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right)} = \frac{1}{\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right)} = \frac{1}{2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right)} = \frac{1}{\sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right)} = \frac{1}{\cos x} = \sec x$

23. $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1 + \sin 2x}}$ হলে $\frac{dy}{dx} = ?$ [DU'15-16]

- (a) $2 \sin 2x$ (b) 0 (c) 1 (d) $\cos 2x$

সমাধান: (b); $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{1 + \sin 2x}} = \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x}} = 1 \therefore \frac{dy}{dx} = 0$

24. $\frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{1+2x} \right\}$ এর মান কত? [JU'15-16]

- (a) $\frac{2}{(1+2x)^2}$ (b) $\frac{-2}{(1+2x)^2}$ (c) $\frac{2}{(1+2x)^4}$ (d) $\frac{-2}{(1+2x)^{-2}}$

সমাধান: (b); $\frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{1+2x} \right\} = (-1) \frac{2}{(1+2x)^2} = \frac{-2}{(1+2x)^2}$

25. $\sqrt{e^{\sqrt{x}}}$ এর অন্তরক সহগ (derivative) কত? [JnU'15-16]

- (a) $\frac{-\sqrt{e^{\sqrt{x}}}}{4\sqrt{x}}$ (b) $\frac{\sqrt{e^{\sqrt{x}}}}{4\sqrt{x}}$ (c) $\frac{\sqrt{e^{\sqrt{x}}}}{2\sqrt{x}}$ (d) $\frac{e^{\sqrt{x}}}{4\sqrt{x} \cdot \sqrt{e^{\sqrt{x}}}}$

সমাধান: (b, d); $\frac{d}{dx} \left(\sqrt{e^{\sqrt{x}}} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{e^{\sqrt{x}}}} \cdot e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{e^{\sqrt{x}}}}{4\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{4\sqrt{x} \sqrt{e^{\sqrt{x}}}}$



26. $\frac{d}{dy} \left(\frac{1+y+y^2}{y} \right) =$ কত? [JU'14-15]

- (a) $\left(1 - \frac{1}{y^2}\right)$ (b) $\left(1 - \frac{1}{y}\right)$ (c) $\left(1 + \frac{1}{y^2}\right)$ (d) $\left(1 + \frac{1}{y}\right)$

সমাধান: (a); $\frac{d}{dy} \left(\frac{1+y+y^2}{y} \right) = \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{y} + 1 + y \right) = -\frac{1}{y^2} + 0 + 1 = 1 - \frac{1}{y^2}$

27. $y = \log_x a$ হলে, $\frac{dy}{dx} =$ কত? [Ans: d][RU'10-11, JnU'14-15]

- (a) $\frac{\log a}{x(\log x)^2}$ (b) $\frac{\ln a}{x(\ln x)^2}$ (c) $\frac{\log a}{x(\log x)^2}$ (d) $-\frac{\ln a}{x(\ln x)^2}$

সমাধান: (d); $Y = \log_x a = \log_e a \times \log_x e = \ln a \times \frac{1}{\ln x} \therefore \frac{dy}{dx} = \ln a \times \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\ln x} \right) = -\frac{1}{(\ln x)^2} \times \frac{1}{x} \times \ln a = -\frac{\ln a}{x(\ln x)^2}$

28. x কে পরিবর্তনশীল ধরে $\log(x - \sqrt{x^2 - 1})$ এর অন্তরক সহগ কোনটি? [KU'14-15]

- (a) $\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ (b) $\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ (d) $\frac{-1}{\sqrt{x^2+1}}$

সমাধান: (b); $\frac{d}{dx} \left(\log(x - \sqrt{x^2 - 1}) \right) = \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}} \times \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}} \times 2x \right) = \frac{1}{x - \sqrt{x^2 - 1}} \times \frac{\sqrt{x^2 - 1} - x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

29. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}}}$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ এর মান কত? [JnU'13-14]

- (a) $\frac{1}{2y-1}$ (b) $\frac{x}{1-2y}$ (c) $\frac{x}{2y-1}$ (d) $\frac{y}{1-2y}$

সমাধান: (a); $y = \sqrt{x + y}$ Or, $y^2 = x + y$ Or, $y^2 - y = x$

এখন x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে পাই, $(2y-1) \frac{dy}{dx} = 1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y-1}$

30. $g(y) = e^{-y} + x \cos y + \sin t$ এর y সাপেক্ষে অন্তরক সহগ হচ্ছে-। [CU'13-14]

- (a) $-e^{-y} + \cos y - x \sin y$ (b) $\cos y$ (c) $-x \sin y + \cos t$ (d) $-e^{-y} - x \sin y$

সমাধান: (d); $\frac{dg(y)}{dy} = \frac{d}{dy} (e^{-y} + x \cos y + \sin t) = -e^{-y} - x \sin y + 0$

31. $\frac{d}{dx} \{e^{2 \log x + 1}\} =$ কত? [CU'13-14]

- (a) $2 \log x e^{2 \log x}$ (b) $2xe$ (c) $ee^{2 \log x}$ (d) $\frac{1}{x} e^{2 \log x + 1}$

সমাধান: (b); $e^{2 \log x + 1} = e^{\log x^2} \cdot e = x^2 \cdot e$; $\frac{d}{dx} (x^2 \cdot e) = 2xe$

Written

01. $\tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2}$ এর সাপেক্ষে $\cos^{-1} \frac{1-x^2}{1+x^2}$ এর অন্তরজ নির্ণয় কর। [RU'19-20]

সমাধান: $\tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2} = 2 \tan^{-1} x = a$ (Let)

$\cos^{-1} \frac{1-x^2}{1+x^2} = 2 \tan^{-1} x = b$ (Let) = a $\therefore \frac{db}{da} = \frac{da}{da} = 1$

02. $y = x^2 + \frac{2}{x}$ হলে $\frac{d^2y}{dx^2}$ নির্ণয় কর। [RU'19-20]

সমাধান: $y = x^2 + \frac{2}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x - \frac{2}{x^2} \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 2 + \frac{2}{x^3} \cdot 2 \therefore \frac{d^2y}{dx^2} = 2 + \frac{4}{x^3}$ (Ans.)





Question Type-02: দুইটি ফাংশনের গুণফলের অন্তরজ

ফাংশনের গুণফলের অন্তরজ $\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$

x এর সাপেক্ষে নিম্নের ফাংশনগুলির অন্তরজ নির্ণয় কর:

(a) $y = 3\sqrt{x} \cos x - 7$

(b) $y = (\log_a x)(\log_e x)$

(c) $y = (\log_a x)(\ln x)(\log x)$

সমাধান: (a) $y = 3\sqrt{x} \cos x - 7 = 3x^{\frac{1}{2}} \cos x - 7$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3 \left[x^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x \frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{2}}) - 0 \right] = 3 \left[x^{\frac{1}{2}}(-\sin x) + \cos x \cdot \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} \right]$$

$$= 3 \left[-\sqrt{x} \sin x + \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \cos x \right] = 3 \left[-\sqrt{x} \sin x + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos x \right]$$

(b) $y = (\log_a x)(\log_e x) \therefore \frac{dy}{dx} = \log_a x \frac{d}{dx}(\log_e x) + \log_e x \frac{d}{dx}(\log_a x) = \log_a x \cdot \frac{1}{x} + \log_e x \cdot \frac{1}{x} \log_a e$
 $= \frac{1}{x}(\log_a x + \log_a e \cdot \log_e x)$ (Ans.)

(c) $y = (\log_a x)(\ln x)(\log x)$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = (\ln x)(\log x) \frac{d}{dx}(\log_a x) + (\log_a x)(\log x) \frac{d}{dx}(\ln x) + (\log_a x)(\ln x) \frac{d}{dx}(\log x)$$

$$= (\ln x)(\log x) \frac{1}{x}(\log_a e) + (\log_a x)(\log x) \frac{1}{x} + (\log_a x)(\ln x) \frac{1}{x}(\log_{10} e)$$

$$= \frac{1}{x} [(\ln x)(\log x)(\log_a e) + (\log_a x)(\log x) + (\log_a x)(\ln x)(\log_{10} e)]$$
 (Ans.)

Related Questions:

01. $y = x^3 \ln x$ হলে $\frac{d^4 y}{dx^4}$ এর মান কত? [BAU'18-19]

(a) $x^2(1 + 3 \ln x)$ (b) $x(5 + 6 \ln x)$ (c) $11 + 6 \ln x$ (d) $\frac{6}{x}$

সমাধান: (d); $y = x^3 \ln x \Rightarrow y_1 = 3x^2 \ln x + x^2 \Rightarrow y_2 = 6x \ln x + 5x \Rightarrow y_3 = 6 \ln x + 11 \Rightarrow y_4 = \frac{6}{x}$

02. $y = \ln \cos x^\circ$ হলে, $\frac{dy}{dx} =$ কত? [RU'17-18]

(a) $-\tan x^\circ$ (b) $-\tan x^\circ$ (c) $\frac{\pi}{180} \tan x^\circ$ (d) $-\frac{\pi}{180} \tan x^\circ$

সমাধান: (d); $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos x^\circ} \times (-\sin x^\circ) \times \frac{\pi}{180} = \frac{-\pi \tan x^\circ}{180}$

03. $y = e^{1+\log x}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ এর মান কত? [RU'17-18]

(a) $e^{1+\log x}$ (b) $\frac{1}{x} e^{1+\log x}$ (c) $\frac{1}{ex}(1 + \log x)$ (d) e

সমাধান: (d); $y = e^{1+\log x} = e \cdot e^{\log x} = e \cdot x \therefore \frac{dy}{dx} = e$

[এখানে, $\log x$ দ্বারা $\ln x$ (natural logarithm) বোঝানো হয়েছে]





04. $y = \frac{1}{6}x^3 \log x$ হলে, $\frac{d^4 y}{dx^4}$ এর মান কত?

[KU'17-18]

- (a) 1 (b) $\frac{6}{x}$ (c) $\frac{1}{x}$ (d) $\log x$

সমাধান: (c); $y = \frac{1}{6}x^3 \log x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{6}x^3 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{6} \cdot 3x^2 \cdot \log x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}x^2 \log x$
 $\Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}x + x \log x \Rightarrow \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + x \cdot \frac{1}{x} + \log x \Rightarrow \frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{1}{x}$

05. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\tan(x-3)}{x-3} = ?$

[CU'16-17]

- (a) 0 (b) ∞ (c) 1 (d) 3 (e) কোনটিই নয়

সমাধান: (c); $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\tan(x-3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sec^2(x-3)}{1} = 1$

06. যদি $y = x\sqrt{x^2 + a^2}$ হয় তবে $\frac{dy}{dx} = ?$

[CU'14-15]

- (a) $\frac{x^2+2a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}$ (b) $\frac{2x^2+a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}$ (c) $\frac{2x^2+2a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}$ (d) $\frac{2x^2+a^2}{2\sqrt{x^2+a^2}}$

সমাধান: (b); $y = x\sqrt{x^2 + a^2}$, $y_1 = \sqrt{x^2 + a^2} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x^2+a^2}} \times 2x = \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{x^2+a^2+x^2}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{2x^2+a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}$

Question Type-03: দুইটি ফাংশনের ভাগফলের অন্তরজ

ফাংশনের ভাগফলের অন্তরজ: $\frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$

Example: x এর সাপেক্ষে নিম্নের ফাংশনগুলির অন্তরজ নির্ণয় কর: (a) $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ (b) $\frac{e^x+\ln x}{\log_a x}$

সমাধান: (a) মনে করি, $y = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(\sqrt{x}-1) \frac{d}{dx}(\sqrt{x}+1) - (\sqrt{x}+1) \frac{d}{dx}(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)^2} = \frac{(\sqrt{x}-1) \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 0 \right) - (\sqrt{x}+1) \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - 0 \right)}{(\sqrt{x}-1)^2}$ [$\because \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$]

$= \frac{\frac{1}{2} \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2} \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}-1)^2} = \frac{-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}$ (Ans.)

(b) মনে করি, $y = \frac{e^x+\ln x}{\log_a x}$ $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(\log_a x) \frac{d}{dx}(e^x+\ln x) - (e^x+\ln x) \frac{d}{dx}(\log_a x)}{(\log_a x)^2}$

$\Rightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{e^x+\ln x}{\log_a x} \right) = \frac{(\log_a x) \left(e^x + \frac{1}{x} \right) - (e^x+\ln x) \frac{1}{x} \log_a e}{(\log_a x)^2}$ (Ans.)



**Related Questions:**

01. $y = (1+x)/(1-x)$ হলে $\frac{dy}{dx}$ এর মান- [DU'18-19]

- (a) $-2/(x-1)^2$ (b) $2/(1-x^2)$ (c) $2/(1-x)^2$ (d) $2x/(1-x)^2$

সমাধান: (c); $y = \frac{1+x}{1-x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(1-x) \cdot 1 - (1+x)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}$

02. $\frac{\log x}{x}$ এর অন্তরক সহগ কত? [Ans: c][CU'05-06,09-10, 11-12, 12-13,18-19]

- (a) $1-\log x$ (b) $\frac{1+\log x}{x}$ (c) $\frac{1-\log x}{x^2}$ (d) $\frac{1-\log x}{x}$ (e) $\frac{1+\log x}{x^2}$

সমাধান: (c); $y = \frac{\log x}{x}; \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \log x}{x^2} = \frac{1-\log x}{x^2}$

03. $y = \tan^{-1} \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$ হলে $\frac{dy}{dx} =$ কত? [RU'17-18]

- (a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) 1

সমাধান: (b); $y = \tan^{-1} \tan \frac{x}{2} = \frac{x}{2} \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$

Question Type-04: বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনের অন্তরক

$$\frac{d}{dx} \{\sin^{-1} x\} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \frac{d}{dx} \{\cos^{-1} x\} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \frac{d}{dx} \{\cot^{-1} x\} = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx} \{\tan^{-1} x\} = \frac{1}{1+x^2} \quad \frac{d}{dx} \{\sec^{-1} x\} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \quad \frac{d}{dx} \{\operatorname{cosec}^{-1} x\} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

Related Questions:

01. $\frac{d}{dx} [\cot^{-1}(e^x)] =$ কত? [JU'14-15]

- (a) $\frac{e^x}{1+e^x}$ (b) $\frac{e^x}{1+e^{2x}}$ (c) $-\frac{e^x}{1+e^{2x}}$ (d) $\frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$

সমাধান: (c); $\frac{d}{dx} (\cot^{-1}(e^x)) = \frac{-1}{1+(e^x)^2} \times e^x = -\frac{e^x}{1+e^{2x}}$

Question Type-05:

বিপরীত বৃত্তীয় ফাংশনের প্রতিস্থাপন পদ্ধতিঃ

(i) $\sqrt{a^2 - x^2}$ থাকলে, $x = a \sin \theta$ অথবা, $a \cos \theta$

(ii) $\sqrt{a^2 + x^2}$ থাকলে, $x = a \tan \theta$ অথবা, $a \cot \theta$

(iii) $\sqrt{x^2 - a^2}$ থাকলে, $x = a \sec \theta$ অথবা, $a \operatorname{cosec} \theta$ ধরতে হয়।

অথবা, সরাসরি নিম্নোক্ত সূত্রাবলী ব্যবহার করবে। অতঃপর অন্তরক নির্ণয় করবে।

(i) $2 \sin^{-1} x = \sin^{-1} (2x\sqrt{1-x^2})$

(ii) $2 \cos^{-1} x = \cos^{-1} (2x^2 - 1)$

(iii) $2 \tan^{-1} x = \sin^{-1} \frac{2x}{1+x^2}$

(iv) $2 \tan^{-1} x = \cos^{-1} \frac{1-x^2}{1+x^2}$

(v) $2 \tan^{-1} x = \tan^{-1} \frac{2x}{1-x^2}$

(vi) $3 \sin^{-1} x = \sin^{-1} (3x - 4x^3)$

(vii) $3 \cos^{-1} x = \cos^{-1} (4x^3 - 3x)$

(viii) $3 \tan^{-1} x = \tan^{-1} \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$



Example-01: $y = \sin^{-1}(3x - 4x^3)$ এর $\frac{dy}{dx} = ?$

সমাধান: $y = \sin^{-1}(3x - 4x^3) \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(3\sin^{-1} x) = \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$ Ans.

Example-02: $\tan^{-1} \frac{4\sqrt{x}}{1-4x}$ এর অন্তরক সহগ কত?

সমাধান: ধরি, $y = \tan^{-1} \frac{4\sqrt{x}}{1-4x} = \tan^{-1} \frac{2 \cdot 2\sqrt{x}}{1-(2\sqrt{x})^2} = 2 \tan^{-1}(2\sqrt{x})$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 2 \frac{d}{dx} \tan^{-1}(2\sqrt{x}) = 2 \cdot \frac{1}{1+(2\sqrt{x})^2} \cdot \frac{d}{dx}(2\sqrt{x}) = \frac{2}{1+4x} \cdot \frac{2}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}(1+4x)}$ (Ans.)

Related Questions:

01. $\frac{d}{dx} \left\{ \tan^{-1} \left(\frac{x^3}{e^x} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{e^x}{x^3} \right) \right\}$ এর মান কত?

[BAU'18-19]

- (a) 0 (b) 1 (c) $3x^2 e^x$ (d) $\frac{x^6}{e^x}$

সমাধান: (a); $\frac{d}{dx} \left\{ \tan^{-1} \left(\frac{x^3}{e^x} \right) + \cot^{-1} \left(\frac{x^3}{e^x} \right) \right\} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0$

02. যদি $y = \tan^{-1} \left(\frac{a \cos x - b \sin x}{b \cos x + a \sin x} \right)$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx}$ এর মান নির্ণয় কর।

[CU'12-13]

- (a) $\frac{1}{1+\frac{a^2}{b^2}} - 1$ (b) 1 (c) -1 (d) None

সমাধান: (c); $y = \tan^{-1} \left(\frac{a/b - b \tan x}{1 + a/b \cdot \tan x} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{a}{b} \right) - x$; $\frac{dy}{dx} = -1$

Question Type-06: চলকের ঘাত চলক থাকলে অন্তরজ

ফাংশন এর ক্ষেত্রে নিম্নোক্ত সূত্রটি সরাসরি ব্যবহার করা যায়।

$y = u^v$ (u & v both are functions of x) হলে, $\frac{dy}{dx} = u^v \left[\frac{v}{u} \cdot \frac{du}{dx} + \ln u \frac{dv}{dx} \right]$

Example: $y = x^x$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$

সমাধান: $y = x^x \therefore \frac{dy}{dx} = x^x \left[x \frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x \frac{d}{dx}(x) \right] = x^x \left(x \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot 1 \right) = x^x (1 + \ln x)$ Ans.



**Related Questions:**

01. $y = x^x$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$

[RU'20-21]

(a) x^{x-1}

(b) $x \cdot x^{x-1}$

(c) $x \ln x$

(d) $x^x(1 + \ln x)$

সমাধান: (d); $y = x^x \Rightarrow \ln y = x \ln x \Rightarrow \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \ln x + 1 \therefore \frac{dy}{dx} = x^x(\ln x + 1)$

02. $\frac{d}{dx}(x^{x^x})$ এর মান কত?

[KU'13-14]

(a) $x^{x^x} \left[\frac{1}{x} + (1 + \ln x) \ln x \right]$

(b) $x^x \left[\frac{1}{x} + (1 + \ln x) \ln x \right]$

(c) $x^{x^x} x^x \left[\frac{1}{x} + (1 + \ln x) \ln x \right]$

(d) $x^x x^{x-1} \left[\frac{1}{x} + (1 + \ln x) \ln x \right]$

সমাধান: (c); ধরি, $y = x^{x^x}$ বা, $\ln y = x^x \ln x$ বা, $\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \left\{ x^x \cdot \frac{1}{x} + \ln x \frac{d}{dx}(x^x) \right\}$

ধরি, $z = x^x$ বা, $\ln z = x \ln x$ বা, $\frac{1}{z} \frac{dz}{dx} = \ln x + 1$ বা, $\frac{dz}{dx} = x^x(1 + \ln x)$

বা, $\frac{dy}{dx} = x^{x^x} \left[x^x \frac{1}{x} + x^x \ln x(1 + \ln x) \right] = x^{x^x} \cdot x^x \left[\frac{1}{x} + \ln x(1 + \ln x) \right]$

Question Type-07: অব্যক্ত ফাংশনের অন্তরজ

Implicit Function এর অন্তরক সহগ নির্ণয়ের ক্ষেত্রে নিম্নোক্ত সূত্র প্রয়োগ করলে সুবিধা হবে-

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{x \text{ এর সাপেক্ষে ফাংশনটি অন্তরক (y ধ্রুবক)}}{y \text{ এর সাপেক্ষে ফাংশনটি অন্তরক (x ধ্রুবক)}}$$

Example-01: $x + y^2 = xy^2$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$

সমাধান: $x + y^2 - xy^2 = 0 \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1+0-y^2 \cdot 1}{0 \cdot 2y - x \cdot 2y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 1}{2y(1-x)}$ Ans.

Example-02: যদি $x^2 - 2xy + 2y^2 = 1$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx} = ?$

সমাধান: $\frac{dy}{dx} = \frac{2x - 2y \cdot 1 + 0 - 0}{-2x \cdot 1 + 4y - 0} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2(x-y)}{-(x-2y)} = \frac{x-y}{x-2y}$ Ans.

Example-03: $x^3 + 3axy + y^3 - a^3 = 0$ এবং $\frac{dy}{dx} = ?$

সমাধান: $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 3ay \cdot 1 + 0 - 0}{0 + 3ax \cdot 1 + 3y^2 - 0} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 3ay}{3ax + 3y^2} = \frac{x^2 + ay}{ax + y^2}$ Ans.



**Related Questions:**

01. যদি $e^{xy+1} = 5$ হয়, তবে $\frac{dy}{dx}$ এর মান কত?

[Agri. Gucho'20-21]

- (a) $\frac{\ln 5}{xy}$ (b) $\frac{-\ln 5}{xy}$ (c) $\frac{-y}{x}$ (d) $\frac{\ln 5}{x}$

সমাধান: (c); $e^{xy+1} = 5$; $xy + 1 = \ln 5 \Rightarrow xy = \ln 5 - 1 \therefore x \frac{dy}{dx} + y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$

02. $e^{3xy+5} = 10$ হলে $\frac{dy}{dx} = ?$

[RU'20-21]

- (a) $\frac{x}{y}$ (b) $\frac{y}{x}$ (c) $-\frac{y}{x}$ (d) $-\frac{x}{y}$

সমাধান: (c); $3xy + 5 = \ln 10 \Rightarrow 3(y + x \frac{dy}{dx}) = 0 \therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$

03. $y = x^y$ হলে, $(1 - y \log x) \frac{dy}{dx} =$ কত?

[RU'18-19]

- (a) $x^{2y} - 1$ (b) x^{2y-1} (c) $x^{y-\frac{1}{2}}$ (d) $x^{2(y-1)}$

সমাধান: (b); $\ln y = y \ln x \Rightarrow \frac{y_1}{y} = \frac{y}{x} + y_1 \ln x \Rightarrow y_1(1 - y \ln x) = \frac{y^2}{x} = x^{2y-1}$

04. $y = \cot^{-1} \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$ হলে $\frac{dy}{dx}$ এর মান কত?

[BAU'18-19]

- (a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) 1 (d) $\frac{1}{2} \sec^2 \frac{x}{2}$

সমাধান: (b); $\cot^{-1} \sqrt{\frac{2\cos^2 x/2}{2\sin^2 x/2}} = \frac{x}{2} \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}$

05. $e^{xy+1} = 5$ হলে (if) $\frac{dy}{dx} = ?$

[DU'14-15]

- (a) $\frac{\ln 5}{xy}$ (b) $\frac{\ln 5}{-x^2}$ (c) $-\frac{y}{x}$ (d) $\frac{\ln 5}{y}$

সমাধান: (c); $e^{xy+1} = 5 \Rightarrow xy + 1 = \ln(5) \Rightarrow xy = \ln(5) - 1 \therefore x \frac{dy}{dx} + y = 0 \therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ [Showed]

06. যদি $x^2 + 3xy + 5y^2 = 1$ হয়, তাহলে $\frac{dy}{dx}$ সমান হবে-

[DU'12-13, JU'14-15]

- (a) $-\frac{2x+3y}{3x+10y}$ (b) $\frac{2x+3y}{3x+10y}$ (c) $\frac{2x-3y}{3x+10y}$ (d) $\frac{2x+3y}{3x-10y}$

সমাধান: (a); $x^2 + 3xy + 5y^2 = 1 \Rightarrow 2x + 3y + 3x \frac{dy}{dx} + 10y \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2x+3y}{3x+10y}$





Written

01. দেখাও যে, $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ বক্ররেখার যে কোন বিন্দুতে অংকিত স্পর্শক দ্বারা অক্ষদ্বয় হতে কর্তিতাংশের যোগফল একটি ধ্রুবক।

সমাধান: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{dy}{dx} = 0$ [x এর সাপেক্ষে অন্তরীকরণ করে] $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{y}{x}}$ [JnU'18-19]

বক্ররেখার (x_1, y_1) বিন্দুগামী স্পর্শকের সমীকরণ, $y - y_1 = -\sqrt{\frac{y_1}{x_1}} (x - x_1)$

y অক্ষে $x = 0$, তাই, $y - y_1 = -\sqrt{\frac{y_1}{x_1}} (-x_1)$; $y = y_1 + \sqrt{x_1 y_1}$ (i)

অনুরূপভাবে, x অক্ষে $y = 0$, তাই, $x = x_1 + \sqrt{x_1 y_1}$ (ii)

\therefore কর্তিতাংশের যোগফল $= x + y = x_1 + y_1 + 2\sqrt{x_1 y_1}$ [(i) ও (ii) হতে]

$= (\sqrt{x_1} + \sqrt{y_1})^2 = (\sqrt{a})^2 = a = \text{ধ্রুবক (প্রমাণিত)}$

02. $x^y + y^x = a^b$ হলে $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কর।

[JnU'18-19]

সমাধান: $x^y + y^x = a^b \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{f_x}{f_y} = -\frac{yx^{y-1} + y^x \ln y}{x^y \ln x + xy^{x-1}} = -\frac{y(yx^y + xy^x \ln y)}{x(yx^y \ln x + xy^x)}$ (Ans.)

Question Type-08: পরামিতিক সমীকরণের অন্তরজ

Parametric Function-এর ক্ষেত্রে প্রথমে x ও y ফাংশনকে parameter-এর সাহায্যে অন্তরীকরণ করতে হয় এবং পরে $\frac{dy}{dx}$

বের করতে হয়।

Example-01: $x = at^2$ এবং $y = 2at$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$

সমাধান: $x = at^2 \therefore \frac{dx}{dt} = 2at$ এবং $y = 2at \therefore \frac{dy}{dt} = 2a$ $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2a}{2at} = \frac{1}{t}$ Ans.

Example-02 $\tan y = \frac{2t}{1-t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$

সমাধান: $y = \tan^{-1} \frac{2t}{1-t^2} = 2 \tan^{-1} t$ (i) এবং $x = \sin^{-1} \frac{2t}{1+t^2} = 2 \tan^{-1} t$ (ii)

এখন, (i)-কে (ii) দ্বারা ভাগ করে পাই, $\frac{y}{x} = 1$ বা, $y = x \therefore \frac{dy}{dx} = 1$ Ans.

Example-03: $y = a \sin \theta$, $x = a \cos \theta$ হলে, $(-1, 1)$ বিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = ?$

সমাধান: $\frac{dy}{d\theta} = a \cos \theta$ এবং $\frac{dx}{d\theta} = -a \sin \theta \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{a \cos \theta}{-a \sin \theta} = -\frac{x}{y}$

$\therefore (-1, 1)$ বিন্দুতে: $\frac{dy}{dx} = -\frac{(-1)}{1} = 1$ Ans.



**Related Questions:**

01. যদি $\tan y = \frac{2t}{1-t^2}$ এবং $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ হয়, তাহলে $\frac{dy}{dx} = ?$

[JU'17-18]

- (a) $2 \tan^{-1} t$ (b) $2 \sin^{-1} t$ (c) $2 \cos^{-1} t$ (d) $2 \cot^{-1} t$

সমাধান: (সঠিক উত্তর নেই); $y = \tan^{-1} \frac{2t}{1-t^2}$; $y = \tan^{-1} \frac{2 \tan \theta}{1-\tan^2 \theta}$ [$t = \tan \theta$]

$$= \tan^{-1} \tan 2\theta = 2\theta = 2 \tan^{-1} t; \frac{dy}{dt} = 2 \frac{1}{1+t^2}$$

$$x = \sin^{-1} \frac{2t}{1+t^2}; x = \sin^{-1} \frac{2 \tan \theta}{1+\tan^2 \theta} [t = \tan \theta]$$

$$= \sin^{-1} \sin 2\theta = 2\theta = 2 \tan^{-1} t; \frac{dx}{dt} = 2 \frac{1}{1+t^2} \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = 1$$

02. $x + y = a^2$ হলে, $\frac{dy}{dx}$ এবং $\frac{dx}{dy}$ এর মান যথাক্রমে—

[CU'16-17]

- (a) 0, 0 (b) 0, 2a (c) 2a, 0 (d) -1, -1

সমাধান: (d); $x + y = a^2$; $1 + \frac{dy}{dx} = 0 \therefore \frac{dy}{dx} = -1 \therefore \frac{dx}{dy} = \frac{1}{-1} = -1$

03. $x = f(\theta) = r \cos \theta$ এবং $y = g(\theta) = r \sin \theta$ হলে $\frac{dy}{dx}$ এবং $\frac{dx}{dy}$ এর মান যথাক্রমে—

[CU'16-17]

- (a) $-\cot \theta, -\tan \theta$ (b) $\tan \theta, \cot \theta$ (c) $-\tan \theta, -\cot \theta$ (d) $-\cot \theta, \tan \theta$
(e) $\cot \theta, -\tan \theta$

সমাধান: (a); $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{r \cos \theta}{-r \sin \theta} = -\cot \theta \therefore \frac{dx}{dy} = -\tan \theta$

04. $\tan y = \frac{2t}{1-t^2}$ এবং $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ হলে, $\frac{dy}{dx} = ?$

[RU'14-15]

- (a) 2 (b) 1 (c) 0 (d) $\sqrt{2}$

সমাধান: (b); $\tan y = \frac{2t}{1-t^2} \Rightarrow y = \tan^{-1} \frac{2t}{1-t^2} = 2 \tan^{-1} t$

Again, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \Rightarrow x = 2 \tan^{-1} t$ [$\therefore x = y$]

Now, $\frac{dy}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1$

05. $\tan y = \frac{2t}{1-t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ হলে $\frac{dy}{dx} =$ কত?

[Ans: d][KU'09-10,14-15]

- (a) $2 \tan^{-1} t$ (b) $2 \sin^{-1} t$ (c) $\sin^{-1} \frac{2t}{1+t^2}$ (d) 1

সমাধান: (d); $\tan y = \frac{2t}{1-t^2} = \tan(2 \tan^{-1} t) \Rightarrow y = 2 \tan^{-1} t$

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} = \sin(2 \tan^{-1} t) \Rightarrow x = 2 \tan^{-1} t \therefore x = y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1$





Question Type-09: স্পর্শক ও অভিলম্ব সম্পর্কিত

$y = f(x)$ বক্ররেখার (x_1, y_1) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক x -অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে ϕ কোণ উৎপন্ন করে, তবে

$f'(x_1) = \tan \phi =$ বক্ররেখাটির (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকটির ঢাল।

অতএব, $y = f(x)$ বক্ররেখার (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ, $y - y_1 = f'(x_1)(x - x_1)$

স্পর্শকের সমীকরণকে $y - y_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)} (x - x_1)$ আকারেও লিখা যায়,

যেখানে $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}$, (x_1, y_1) বিন্দুতে $\frac{dy}{dx}$ এর মান।

অভিলম্ব (Normal):

স্পর্শক অনুযায়ী এবং স্পর্শ বিন্দুতে স্পর্শকের উপর লম্ব সরলরেখাটিকে ঐ বিন্দুতে $y = f(x)$ বক্ররেখার অভিলম্ব বলা হয়।

$\therefore (x_1, y_1)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ, $y - y_1 = \frac{1}{f'(x_1)} (x - x_1)$

অভিলম্বের সমীকরণকে $y - y_1 = -\left(\frac{dx}{dy}\right)_{(x_1, y_1)} (x - x_1)$ আকারেও লিখা যায়।

দ্রষ্টব্য: (i) স্পর্শকটি স্থানাঙ্কের অক্ষদ্বয়ের সাথে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করলে, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x, y)} = \tan(\pm 45^\circ) = \pm 1$

(ii) স্পর্শকটি x -অক্ষের সমান্তরাল হলে, $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x, y)} = \tan 0^\circ = 0$

(iii) স্পর্শকটি x -অক্ষের উপর লম্ব হলে, $\left(\frac{dx}{dy}\right)_{(x_1, y_1)} = \cot 90^\circ = 0$

Related Questions:

01. যদি $y = kx(2x + \sqrt{3})$ বক্ররেখার মূলবিন্দুতে স্পর্শকটি x -অক্ষের সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে তাহলে k -এর মান হবে- [DU'20-21]

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\sqrt{3}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (d) $\frac{1}{2}$

সমাধান: (a); $y = kx(2x + \sqrt{3}) = 2kx^2 + \sqrt{3}kx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 4kx + \sqrt{3}k$

মূলবিন্দুতে, $\frac{dy}{dx} = 4k \times 0 + \sqrt{3}k = \sqrt{3}k \therefore \frac{dy}{dx} = \sqrt{3}k = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow k = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3}$

02. $y = (x - 2)(x - 3) - x + 7$ বক্ররেখাটির কোন বিন্দুতে ঢাল 4? [GST'20-21]

(a) (2, 3) (b) (2, 7) (c) (3, 7) (d) (5, 8)

সমাধান: (d); $y = (x - 2)(x - 3) - x + 7 = x^2 - 5x + 6 - x + 7$

$= x^2 - 6x + 13 \Rightarrow y' = 2x - 6 = 4 \Rightarrow 2x = 6 + 4 \Rightarrow x = 5$

$\therefore y = (5 - 2)(5 - 3) - 5 + 7 = 8 \therefore$ বিন্দুটি (5, 8)।

03. x এর কোন মানের জন্য $y = x + \frac{1}{x}$ এর ঢাল শূন্য হবে? [Agri. Gucho'20-21]

(a) 1 (b) 0 (c) ± 1 (d) $\pm \frac{1}{2}$

সমাধান: (c); $y = x + \frac{1}{x}; \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2} \therefore 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \therefore x = \pm 1$

04. $y = 4x^2 + 3x - 5$ বক্ররেখার (1, 2) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের ঢাল কত? [JU'20-21]

(a) 3 (b) 2 (c) 11 (d) 5

সমাধান: (c); $y = 4x^2 + 3x - 5 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 8x + 3$

$\therefore \frac{dy}{dx} |_{(1,2)} = 8 \times 1 + 3 = 11$





05. $x = y$ সরলরেখাটি $xy^2 = 4(4 - x)$ বক্ররেখাটির যে বিন্দুতে মিলিত হয়, বক্ররেখাটির সেই বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ কত? [RU'20-21]

- (a) $y + x - 4 = 0$ (b) $y + x + 4 = 0$ (c) $y - x - 4 = 0$ (d) $x - y - 4 = 0$

সমাধান: (a); $x^3 = 16 - 4x$ দেখেই বোঝা যায় $x = 2$

$$2^3 = 16 - 4 \times 2 \therefore y = 2; y^2 + 2xy y_1 = -4 \Rightarrow y_1 = \frac{-4 - y^2}{2xy} = \frac{-4 - 4}{2 \times 2 \times 2} = -1 \rightarrow \text{ঢাল।}$$

$$\therefore \frac{y-2}{x-2} = -1 \Rightarrow y - 2 = -x + 2 \therefore x + y - 4 = 0$$

06. $y^2 = 4x$ বক্ররেখা $(2, 2\sqrt{2})$ বিন্দুতে স্পর্শকের ঢাল কোনটি? [Agri. Gucho'19-20]

- (a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (c) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (d) $2\sqrt{2}$

সমাধান: (b); $y^2 = 4x \Rightarrow 2y \frac{dy}{dx} = 4 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2}{y} \therefore \left[\frac{dy}{dx} \right]_{(2, 2\sqrt{2})} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

07. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$ এর মান হবে- [CU'18-19]

- (a) $\frac{1}{2}$ (b) 1 (c) $-\frac{1}{2}$ (d) 0

সমাধান: (d); $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1}$ (L'Hospital's rule) = 0

08. $(0, 1)$ বিন্দুতে $y = e^x$ বক্ররেখার স্পর্শকের সমীকরণ কোনটি? [CU'18-19]

- (a) $y = x + 1$ (b) $y = 2x + e^x$ (c) $x = e + 1$ (d) $y = -x + 1$

সমাধান: (a); $\frac{dy}{dx} = e^x \therefore \left[\frac{dy}{dx} \right]_{(0,1)} = 1 \therefore$ স্পর্শক: $y - 1 = 1(x - 0) = y = x + 1$

09. $\frac{dy}{dx} = 0$ সমীকরণটির সমাধান- [Ans: a][RU'17-18]

- (a) x অক্ষের সমান্তরাল একটি সরলরেখা (b) y অক্ষের সমান্তরাল একটি সরলরেখা
(c) একটি বৃত্ত নির্দেশ করে (d) সমাধান নেই

10. a এর মান কত হলে, $y = ax(1 + x)$ বক্ররেখার মূল বিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষের সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে?

- (a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (c) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (d) $\sqrt{3}$ [KU'17-18]

সমাধান: (b); $y = ax + ax^2 \Rightarrow y_1 = a + 2ax = a(1 + 2x) = \tan 30^\circ \therefore a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ [\because মূলবিন্দুতে $x = 0$]

11. x এর কোন মানের জন্য $y = x + \frac{1}{x}$ বক্ররেখাটির ঢাল শূন্য হবে? [DU'16-17]

- (a) $x = \pm 2$ (b) 1 (c) ± 1 (d) $\pm \frac{3}{2}$

সমাধান: (c); $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left(x + \frac{1}{x} \right) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

12. $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 9$ বক্র রেখার কোন বিন্দুতে স্পর্শক X -অক্ষের সমান্তরাল? [CU'16-17]

- (a) $(0, 0)$ (b) $(2, 2)$ (c) $(2, -1)$ (d) $(3, 0)$

সমাধান: (c); $y_1 = 3x^2 - 12x + 12 = 0 \therefore x = 2$ $x = 2$ হলে $y = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 - 9 = -1$



13. k -এর কোন মানের জন্য $y = kx(1 - x)$ বক্ররেখার মূলবিন্দুতে স্পর্শকটি x -অক্ষের সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করে?

- (a) $\sqrt{3}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) 1 [DU'15-16]

সমাধান: (b); $y = kx(1 - x) = k(x - x^2) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = k(1 - 2x)$

\therefore মূলবিন্দুতে $\frac{dy}{dx} = k(1 - 0) = k \therefore k = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

14. $x = 0$ বিন্দুতে $y = x + e^x$ এর লেখচিত্রে স্পর্শকের সমীকরণ হবে- [DU'14-15]

- (a) $y = x$ (b) $y = x + 1$ (c) $y = 2x + 1$ (d) $y = 2x$

সমাধান: (c); $y = x + e^x \therefore \frac{dy}{dx} = 1 + e^x$; $x = 0, m = 1 + e = 2$; $y - 1 = 2(x - 0) \therefore y = 2x + 1$

Question Type- 10: সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান বিদ্যমান থাকার প্রয়োজনীয় শর্ত

$f(x)$ ফাংশনের সন্ধিবিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক x -অক্ষের সমান্তরাল। $x = c$ সন্ধিবিন্দুতে, $f'(c) = \tan 0^\circ = 0$

অতএব, যদি $x = c$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের সর্বোচ্চ অথবা সর্বনিম্ন মান থাকে এবং $f'(c)$ এর মান বিদ্যমান থাকে তবে $f'(c) = 0$

9.18.3 : সর্বোচ্চ ও সর্বনিম্ন মান নির্ণয়

$x = c$ বিন্দুতে $f(x)$ ফাংশনের সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মান থাকলে, $f'(c) = 0$.

(a) $f''(c) < 0$ হলে, $x = c$ বিন্দুতে $f(x)$ এর মান অর্থাৎ $f(c)$ সর্বোচ্চ মান।

(b) $f''(c) > 0$ হলে, $x = c$ বিন্দুতে $f(x)$ এর মান অর্থাৎ $f(c)$ সর্বনিম্ন মান।

Related Questions:

01. $f(x) = x + \frac{1}{x}, x > 0$ ফাংশনের চরম বিন্দু কোনটি? [GST'20-21]

- (a) $(1, -1)$ (b) $(-1, \frac{-3}{2})$ (c) $(1, 2)$ (d) $(2, \frac{5}{2})$

সমাধান: (c); $f(x) = x + \frac{1}{x}, x > 0 \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow \frac{1}{x^2} = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1 (x > 0)$

\therefore চরম বিন্দুতে $f(x) = 1 + \frac{1}{1} = 2 \therefore$ চরম বিন্দু $(1, 2)$ ।

02. $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ সীমার মধ্যে $y = 1 + 2 \sin x + 2 \cos^2 x$ এর মান x এর কোন মানদ্বয়ের জন্য গরিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ হবে?

- (a) $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}$ (d) $0, \frac{\pi}{2}$ [RU'19-20]

সমাধান: (c); $y_1 = 2 \cos x + 4 \cos x(-\sin x) \Rightarrow 0 = 2 \cos x - 4 \cos x \sin x \Rightarrow \cos x(2 \sin x - 1) = 0$

$\therefore \cos x = 0 \therefore x = \frac{\pi}{2}$ অথবা, or, $\sin x = \frac{1}{2} \therefore x = \frac{\pi}{6} \therefore x = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6} \right\}$

03. একটি গোলাকার বলের আয়তনের বৃদ্ধির হার তার ব্যাসার্ধ r এর বৃদ্ধির হারের কত গুণ? [RU'19-20]

- (a) 4 (b) $2\pi r$ (c) $4\pi r^2$ (d) $\frac{4}{3}\pi r^2$

সমাধান: (c); $v = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 \times \frac{dr}{dt}$



04. $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ফাংশনটির গুরুমান লঘুমান অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হলে গুরুমানটি কত?

[KU'19-20]

- (a) -2 (b) -1 (c) 1 (d) 2

সমাধান: (a); $y = x + \frac{1}{x} \therefore y_1 = 1 - \frac{1}{x^2} \therefore 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \therefore x = \pm 1$

এখানে, $y_2 = \frac{2}{x^3}$; $x = 1$ হলে $y_2 = 2 > 0$; অর্থাৎ লঘুমান পাব।

$x = -1$ হলে $y_2 = -2 < 0$; অর্থাৎ গুরুমান পাব। $\therefore y = -1 + \frac{1}{(-1)} = -2 \therefore$ গুরুমান = -2

05. $y = x + \frac{1}{x}$ এর সর্বনিম্ন মান কোনটি?

[Agri. Guccho'19-20]

- (a) -1 (b) -2 (c) 2 (d) 0

সমাধান: (c); $y = x + \frac{1}{x}$; $y_1 = 1 - \frac{1}{x^2}$; $y_2 = \frac{2}{x^3}$

সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মানের জন্য $y_1 = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \therefore x = \pm 1$

$x = 1$ হলে $y_2 = \frac{2}{1} = 2 > 0$

$\therefore x = 1$ এর জন্য $y = x + \frac{1}{x}$ এর সর্বনিম্ন মান পাওয়া যাবে

\therefore সর্বনিম্ন মান = $1 + \frac{1}{1} = 2$

06. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ হলে $f(x)$ এর গরিষ্ঠ মান কোনটি?

[Agri. Guccho'19-20]

- (a) 6 (b) 12 (c) 5 (d) 0

সমাধান: (c); $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$; $f'(x) = 3x^2 - 6x$; $f''(x) = 6x - 6$

সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন মানের জন্য $f'(x) = 0$; $3x^2 - 6x = 0$; $3x(x - 2) = 0$; $x = 0, 2$

$x = 0$ হলে $f'(x) = 6 \times 0 - 6 = -6 < 0$

$\therefore x = 0$ এর জন্য $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$ এর গরিষ্ঠ মান পাওয়া যাবে।

\therefore গরিষ্ঠ মান $f(0) = 5$

07. x এর কোন মানের জন্য $f(x) = \int_0^x \frac{t-3}{t^2+7} dt$ ন্যূনতম হবে?

[RU'18-19]

- (a) $-\sqrt{7}$ (b) -3 (c) $\sqrt{7}$ (d) 3

সমাধান: (d); $\frac{d}{dt} f(x) = \frac{x-3}{x^2+7} = 0 \therefore x = 3$

08. $y = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 5$ হলে লঘিষ্ঠ মান-

[DU'17-18]

- (a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 8

সমাধান: (b); $y = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 5$

$y' = 4x^3 - 12x^2 + 8x = 0$ $\left| \begin{array}{l} y'' = 12x^2 - 24x + 8 \\ y''(0) = 8 > 0 \end{array} \right.$

$\Rightarrow x(4x^2 - 12x + 8) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ এবং $4x^2 - 12x + 8 = 0$

$\therefore y = 0$ এর জন্য লঘিষ্ঠ মান রয়েছে $\therefore f(0) = 0^4 - 4 \cdot 0^3 + 4 \cdot 0^2 + 5 = 5$

09. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2}$ এর মান = ?

[RU'17-18]

- (a) $\frac{1}{4}$ (b) 2 (c) $\frac{1}{2}$ (d) 4

সমাধান: (c); $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cosh}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2\left(\frac{h}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2}\right)^2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$ $\left[h = \frac{\pi}{2} - x \right]$



10. $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ফাংশনের গুরুমান কত?

[RU'17-18]

- (a) 2 (b) 1 (c) -2 (d) -1

সমাধান: (c); $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ এখন $f'(x) = 0$ হলে, $x = \pm 1$

এখন, $f(1) = 2$ ও $f(-1) = -2 \therefore$ গুরুমান = -2

11. $f(x)$ একটি ফাংশন। যদি $x = c$ বিন্দুতে $f'(c) = 0$ এবং $f''(c) > 0$ হয় তবে নিচের কোনটি সত্য?

- (a) ফাংশনটির আপেক্ষিক লঘুমান আছে (b) ফাংশনটির আপেক্ষিক গুরুমান আছে [Ans: a][RU'15-16]
(c) ফাংশনটির নিম্নলিখিত বিন্দু আছে (d) ফাংশনটির আনতি বিন্দু আছে

12. $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 36x$ এর গুরুমান ও লঘুমান যথাক্রমে নিচের কোনটি?

[RU'15-16]

- (a) 20 ও -128 (b) -3 ও -128 (c) 17 ও -108 (d) -30 ও -128

সমাধান: (c); $f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 36x \therefore f'(x) = 6x^2 - 42x + 36 \therefore f'(x) = 12x - 42$

গুরুমানের বা লঘুমানের জন্য $f'(x) = 0 \therefore 6x^2 - 42x + 36 = 0$

সুতরাং, $x = 6$ অথবা, $x = 1$, এখন, $f'(6) = 30 > 0$ এবং $f'(1) = -30 < 0$

$\therefore f(1) = 17$ যা গুরুমান এবং $f(6) = -108$ যা লঘুমান।

13. $y = x(3-x^2)$ এবং $\frac{dy}{dx} = 0$ হলে x এর মান কত?

[JU'14-15]

- (a) 1 (b) -1 (c) ± 1 (d) 0

সমাধান: (c); $y = 3x - x^3; Y_1 = 3 - 3x^2 = 0 \Rightarrow 3 = 3x^2; x^2 = 1 \therefore x = \pm 1$

14. $y = 2x^2 + e^{\sin x}$ হলে, $\frac{dy}{dx} \Big|_0 = ?$

[RU'14-15]

- (a) $4x$ (b) 1 (c) $\cos x e^{\sin x}$ (d) 0

সমাধান: (b); $y = 2x^2 + e^{\sin x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} \Big|_0 = 4x + e^{\sin x} \cdot \cos x = 1$

15. $x + \frac{1}{x}$ এর লঘুমান ও গুরুমান নিম্নের কোন সম্পর্কটিকে সিদ্ধ করে?

[CU'14-15]

- (a) লঘুমান = গুরুমান (b) গুরুমান > লঘুমান (c) গুরুমান < লঘুমান (d) কোনটিই নয়

সমাধান: (c); $y = x + \frac{1}{x} \quad y_1 = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x^2} = 0$

$\therefore y_1 = 1 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 = 1$

$\therefore y_2 = \frac{2}{x^3} \Rightarrow x = \pm 1$

$x = +1$ হলে, $x = -1$ হলে

$y_2 = \frac{2}{1} = 2 > 0 \quad y_2 = \frac{2}{-1} = -2 < 0$

$\therefore x = 1$ -এ y -এর লঘুমান বিদ্যমান $\therefore x = -1$ এ y -এর গুরুমান বিদ্যমান

y -এর লঘুমান = $1 + \frac{1}{1} = 2 \therefore y$ -এর গুরুমান = $-1 + \frac{1}{-1} = -2$

16. $f(x) = 1 + \sqrt{\sin^2(x) + 1}$ ফাংশনের সর্বোচ্চ মান হবে

[Ans: d][CU'07-08, RU'14-15]

- (a) 2 (b) 3 (c) 1 (d) 2.41

17. $x(12-2x)^2$ এর বৃহত্তম মান কত হবে?

[RU'12-13, JnU'09-10, 14-15]

- (a) 120 (b) 128 (c) 228 (d) -128

সমাধান: (b); $f(x) = x(12-2x)^2, f'(x) = 144 - 96x + 12x^2$ So, $12x^2 - 96x + 144 = 0$

বা, $x^2 - 8x + 12 = 0$ বা, $x = 6, 2, f''(x) = -96 + 24x$ for $x = 2; f''(x) < 0 \therefore f(x) = 128$





Written

01. c -এর মান কত হলে, $y = cx(1+x)$ বক্ররেখা এবং x -অক্ষের ছেদবিন্দুতে অঙ্কিত বক্ররেখার স্পর্শক (Tangent) x -অক্ষের সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করবে? [JnU'19-20]

সমাধান: x -অক্ষের ছেদবিন্দুতে $y = 0 \therefore 0 = cx(1+x) \therefore cx = 0$ or, $1+x = 0 \therefore x = 0$ or, $x = -1$

আবার, $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(cx + cx^2) = c + 2cx$

x -অক্ষের সাথে স্পর্শক 30° কোণ উৎপন্ন করলে ঢাল, $m = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \frac{1}{\sqrt{3}} = c + 2c \times 0 \therefore c = \frac{1}{\sqrt{3}}$ [$x = 0$ হলে]

আবার, $\frac{1}{\sqrt{3}} = c + 2c \times (-1) = -c \therefore c = -\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \therefore c = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$

02. $4e^{2x} + 9e^{-2x}$ ফাংশনের সর্বনিম্ন মান (minimum value) নির্ণয় কর। [KU'18-19, JnU'18-19]

সমাধান: $y = 4e^{2x} + 9e^{-2x}$

$y_1 = 8e^{2x} - 18e^{-2x} = 0 \Rightarrow e^{2x} = \frac{9}{4} \therefore e^{4x} = \frac{3}{2}; y_2 = 16e^{2x} + 36e^{-2x}$

$e^{2x} = \frac{3}{2}$ হলে, $y_2 = 16 \times \frac{3}{2} + 36 \times \frac{2}{3} = 48 > 0$

\therefore সর্বনিম্ন মান $= 4 \times \frac{3}{2} + 9 \times \frac{2}{3} = 12$

Question Type-11: পর্যায়ক্রমিক অন্তরীকরণ

প্রয়োজনীয় ফাংশনের n তম অন্তরক:

(i) $y = x^n$ হলে $y_n = n!$ এবং $y_{n+1} = y_{n+2} = \dots = 0$

(ii) $y = (ax+b)^m$ হলে $y_n = \frac{m!}{(m-n)!} a^n (ax+b)^{m-n}; m > n$ এবং $m, n \in \mathbb{N}$

Special Case

(i) $m = n$ হলে $y_n = n! a^n$

(ii) $m < n$ হলে $y_n = 0$

(iii) $y = e^{ax}$ হলে $y_n = a^n e^{ax}$

(iv) $y = a^x$ হলে $y_n = (\ln a)^n a^x$

(v) $y = \sin ax$ হলে $y_n = a^n \sin\left(\frac{n\pi}{2} + ax\right)$

(vi) $y = \cos ax$ হলে $y_n = a^n \cos\left(\frac{n\pi}{2} + ax\right)$

(vii) $y = \ln(ax+b)$ হলে $y_n = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)! a^n}{(ax+b)^n}$

(viii) $y = \frac{1}{ax+b}$ হলে $y_n = \frac{(-1)^n n! a^n}{(ax+b)^{n+1}}$

Note: উপরোক্ত n -তম অন্তরসমূহ মুখস্ত রাখবে।



**Related Questions:**

01. $\frac{d}{dx} \left\{ \frac{x^2}{x^2-4} \right\}$ এর মান কত?

[KU'16-17]

(a) $\frac{-8x}{(x^2-4)^2}$

(b) $-\frac{8x}{(x^2+4)^2}$

(c) $\frac{4x}{(x^2-8)^2}$

(d) $\frac{4x}{(x^2+8)^2}$

সমাধান: (a); $\frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{x^2-4} \right) = \frac{d}{dx} \left(1 + \frac{4}{x^2-4} \right) = \frac{-4 \times 2x}{(x^2-4)^2}$

02. $y = pe^{mx} + qe^{-mx}$ হলে $y_2 - m^2y = ?$

[CU'16-17]

(a) y

(b) y^2

(c) 1

(d) 0

সমাধান: (d); $y = pe^{mx} + qe^{-mx} \therefore y_1 = m(pe^{mx} - qe^{-mx})$

$y_2 = m^2(pe^{mx} + qe^{-mx}) = m^2y \therefore y_2 - m^2y = 0$

03. $\frac{dy}{dx} = f(x) = e^{ax+b}$ হলে $y = ?$

[CU'16-17]

(a) ae^{ax+b}

(b) $\frac{1}{a} e^{ax+b}$

(c) $\frac{1}{b} e^{ax+b}$

(d) $\frac{1}{a} e^{ax+b} + k$

সমাধান: (d); $\frac{dy}{dx} = e^{ax+b} \therefore y = \int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + k$

04. যদি $y = x^3 \ln x$ হয় তবে $\frac{d^4y}{dx^4} = ?$

[Ans: c][RU'09-10, JU'14-15]

(a) $\frac{4}{x}$

(b) $\frac{1}{x}$

(c) $\frac{6}{x}$

(d) $\frac{6}{x^2}$

সমাধান: (c); $y = x^3 \ln x \therefore y_1 = 3x^2 \ln x + x^2$; $y_2 = 6x \ln x + 3x + 2x = 6x \ln x + 5x$

$y_3 = 6 \ln x + 6 + 5 = 6 \ln x + 11$; $y_4 = \frac{6}{x}$

05. $y = (x-1)^3$ হলে y_4 এর মান?

[Ans: a][RU'09-10, JU'14-15]

(a) 0

(b) 6

(c) 3

(d) -6

06. $y = x^2 \log x$ হলে y_4 এর কোনটি সত্য?

[RU'10-11, JU'14-15]

(a) 6

(b) $\frac{6}{x}$

(c) $\frac{x}{6}$

(d) $\frac{4}{x}$

সমাধান: (No correct answer); $y = x^2 \log x$, $y_1 = 2x \log x + x$, $y_2 = 2 \log x + 3$, $y_3 = \frac{2}{x}$, $y_4 = -\frac{2}{x^2}$

07. $y = (2x-1)^3$ হলে, $y_3 =$ কত?

[JU'14-15]

(a) 24

(b) 42

(c) 48

(d) 18

সমাধান: (c); $y = (2x-1)^3$; $y_1 = 3(2x-1)^2 \times 2 = 6(2x-1)^2$

$y_2 = 12 \times 2(2x-1) = 24(2x-1)$; $y_3 = 24 \times 2 = 48$

08. $y = (2x-5)^3$ হলে $y_n =$ কত?

[CU'10-11, 14-15]

(a) 24

(b) 48

(c) 0

(d) অনির্ণেয়

সমাধান: (d); $y = (2x-5)^3$, $y_1 = 3(2x-5)^2 \cdot 2 = 6(2x-5)^2$, $y_2 = 6 \cdot 2(2x-5) \cdot 2 = 24(2x-5)$

$y_3 = 24(2x-5) \cdot 2 = 48$, $y_4 = 0 \therefore y_n = \begin{cases} 6(2x-5)^2 & \text{if } n=1 \\ 24(2x-5) & \text{if } n=2 \\ 48 & \text{if } n=3 \\ 0 & \text{if } n > 3 \end{cases}$





09. If $x^n + y^n = a^n$ then $\frac{dy}{dx} = ?$

[DU'13-14]

- (a) $\left(\frac{x}{y}\right)^n$ (b) $\left(-\frac{x}{y}\right)^n$ (c) $-\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1}$ (d) $\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1}$

সমাধান: (c); $x^n + y^n = a^n \Rightarrow nx^{n-1} + ny^{n-1} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{nx^{n-1}}{ny^{n-1}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1}$

10. $y = \ln(1+x)$ হলে $\frac{d^2y}{dx^2} = ?$

[JU'09-10]

- (a) $\frac{1}{1+x^2}$ (b) $\frac{1}{1+x}$ (c) $\frac{-1}{(1+x)^2}$ (d) $-(1+x)^2$

সমাধান: (c); $y = \ln(1+x), \frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1+x)} = (1+x)^{-1}; \frac{d^2y}{dx^2} = -1(1+x)^{-2} = -\frac{1}{(1+x)^2}$

11. $y = \frac{1}{x}$ হলে y_n এর মান কত?

[Ans: d][CU'07-08]

- (a) $\frac{n!}{x^n}$ (b) $\frac{(n-1)!}{x^{n-1}}$ (c) $\frac{1}{x}$ (d) $\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$

Question Type-12: অন্তরকের সাহায্যে বাস্তব সমস্যা সমাধান

01. 12.5 cm ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট একটি গোলকের আয়তন, 4 cm ব্যাসার্ধ ও 16 cm উচ্চতা বিশিষ্ট কয়টি সিলিন্ডারের আয়তনের সমান? [BAU'18-19]

- (a) 7 (b) 8 (c) 9 (d) 10

সমাধান: (d); $n\pi \times 4^2 \times 16 = \frac{4}{3}\pi \times (12.5)^3 \Rightarrow n = 10.1725 \approx 10$ টি

02. একটি গাড়ি স্থিতিবস্থা হতে সমত্বরণে চলা শুরু করে 5 সেকেন্ডে 180 মিটার/ সেকেন্ড গতিবেগ প্রাপ্ত হল। গাড়িটির ত্বরণ কত?

- (a) 32 m/s² (b) 36 m/s² (c) 30 m/s² (d) 45 m/s² (e) 40 m/s²

সমাধান: (b); $V = V_0 + at \Rightarrow 180 = 0 + a \times 5 \therefore a = 36\text{ms}^{-2}$ [CU'15-16]

03. a এর মান কত হলে $y = ax(1-x)$ বক্ররেখার মূলবিন্দুতে স্পর্শকটি x অক্ষের সহিত 60° কোণ উৎপন্ন করে?

- (a) $\sqrt{3}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) 1 (d) -1

সমাধান: (a); $y = ax(1-x) = y = ax - ax^2; y_1 = a - 2ax$ [DU'05-07, RU'08-09, KU'14-15]

Now, $\tan 60^\circ = \sqrt{3}; \sqrt{3} = a(1-2x);$ মূলবিন্দুতে, $x = 0 \therefore \sqrt{3} = a(1-0) = a \therefore a = \sqrt{3}$

04. x এর কোন মানের জন্য $y = x + \frac{1}{x}$ বক্ররেখাটির ঢাল শূন্য হবে?

[DU'13-14, CU'02-10, DU'13-14]

- (a) $\pm \frac{3}{2}$ (b) ± 2 (c) 1 (d) ± 1

সমাধান: (d); $y = x + \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2};$ ঢাল শূন্য বলে $1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \therefore x = \pm 1$

05. $y = \frac{1}{x}$ হলে, $y_{98} =$ কত?

[RU'13-14]

- (a) $-\frac{99!}{x^{99}}$ (b) $-\frac{98!}{x^{99}}$ (c) $\frac{98!}{x^{99}}$ (d) $\frac{99!}{x^{100}}$

সমাধান: (c); $y = \frac{1}{x}; y_1 = -\frac{1}{x^2}; y_2 = \frac{1.2}{x^3} \therefore y_n = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}; y_{98} = \frac{(-1)^{98} 98!}{x^{99}} = \frac{98!}{x^{99}}$





06. যদি একটি বৃত্তের ক্ষেত্রফল সম্বন্ধে বাড়ে, তবে তার পরিসীমা- [KU'13-14]
 (a) ব্যাসার্ধের ব্যস্তানুপাতে বাড়ে (b) ব্যাসার্ধের সমানুপাতে বাড়ে (c) ব্যাসের সমানুপাতে বাড়ে (d) ব্যাসের ব্যস্তানুপাতে বাড়ে
 সমাধান: (a); ধরি, বৃত্তের ক্ষেত্রফল $A = \pi r^2$, পরিসীমা $= 2\pi r = p$

এখন, $\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$ [অন্তরীকরণ করে] প্রশ্নানুসারে $\frac{dA}{dt} = \text{ধ্রুবক} = k \therefore 2\pi \frac{dr}{dt} = \frac{k}{r}; \frac{dp}{dt} = \frac{k}{r}$

07. ধাতুর তৈরী একটি বৃত্ত আকৃতির থালার ব্যাসার্ধ, তাপ প্রয়োগের ফলে প্রতি সেকেন্ডে 0.25cm বাড়ে। যখন থালাটির ব্যাসার্ধ 7cm তখন তার তলের বৃদ্ধির হার প্রতি সেকেন্ডে কত বর্গ সেন্টিমিটার? [KU'12-13]
 (a) 10.99 (b) 12.99 (c) 3.25 (d) কোনটিই নয়

সমাধান: (a); $A = \pi r^2; \frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt} = 2\pi \times 7 \times 0.25 = 10.99 \text{cm}^2/\text{sec}$

Written

01. কোনো সরলরেখা একটি কণা এমনভাবে চলছে যেন তা $s = 15t + 1.5t^2$ শর্তানুসারে t সেকেন্ডে s সে.মি. দূরত্ব অতিক্রম করে।
 অন্তরীকরণের (Differentiation) ধারণা ব্যবহার করে 2 সেকেন্ড শেষে কণাটির বেগ নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, কণাটির ত্বরণ (Acceleration) একটি ধ্রুব (Constant) রাশি। [JnU'19-20]

সমাধান: $\frac{ds}{dt} = 15 + 3t \Rightarrow v = 3t + 15 \therefore 2s$ পর বেগ, $v = (3 \times 2 + 15) = 21 \text{ms}^{-1}$
 ত্বরণ, $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(3t + 15) = 3 \text{ms}^{-2}$ যা ধ্রুবক।

Question Type-13:

01. $p(x) = a + 1$ হলে $p'(a)$ এবং $p'(1)$ এর মান যথাক্রমে কত? [Ans: c][CU'16-17]
 (a) $a + 1, 0$ (b) $0, a$ (c) $0, 0$ (d) $a + 1, a + 1$ (e) $0, 1$
02. $\log_e(1+x) = ?$ [Ans: d][JnU'12-13]
 (a) $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$ (b) $x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \dots$ (c) $1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$ (d) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$

Question Type-14: ফাংশনের সাপেক্ষে ফাংশনের অন্তরক নির্ণয় সংক্রান্ত

Example-01: x^2 এর সাপেক্ষে $\sin x$ এর অন্তরক নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, $u = x^2$ এবং $v = \sin x$ এখন, $\frac{dv}{du} = \frac{\frac{dv}{dx}}{\frac{du}{dx}} = \frac{\cos x}{2x}$ (Ans.)

Example-02: $\ln x$ এর সাপেক্ষে $\tan x$ এর অন্তরক নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, $u = \ln x$ এবং $v = \tan x$ এখন, $\frac{dv}{du} = \frac{\frac{dv}{dx}}{\frac{du}{dx}} = \frac{\sec^2 x}{\frac{1}{x}} = x \sec^2 x$ (Ans.)

Related Questions:

01. $\frac{d}{d \cos x}(\sin x) = ?$ [GST'20-21]
 (a) $\cot x$ (b) $-\cot x$ (c) $\sec^2 x$ (d) $\text{cosec}^2 x$

সমাধান: (b); $\frac{d}{d \cos x}(\sin x) = \frac{\frac{d}{dx}(\sin x)}{\frac{d}{dx}(\cos x)} = \frac{\cos x}{-\sin x} = -\cot x$

02. x এর সাপেক্ষে $\tan^{-1} \frac{3x-x^3}{1-3x^2}$ এর অন্তরক কত? [KU'16-17]
 (a) $\frac{3}{1+x^2}$ (b) $-\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (d) $\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$
 সমাধান: (a); $\tan^{-1} \frac{3x-x^3}{1-3x^2} = 3 \tan^{-1} x \therefore$ অন্তরক সহগ $= \frac{3}{1+x^2}$ আর ডোমেইনে তা অন্তর্ভুক্ত আছে এরূপ অপশন $\frac{3}{1+x^2}$

