অধ্যায়-০৩: জটিল সংখ্যা

Question Type-01: জটিল সংখ্যার সাধারণ আলোচনা সংক্রান্ত

- $x + iy$ এর অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা $x - iy$
- দুটি অনুবন্ধী জটিল সংখ্যার যোগফল ও গুণফল বাস্তব সংখ্যা হয়।
- দুটি অনুবন্ধী জটিল সংখ্যার বিয়োগফল জটিল সংখ্যা হয়।
- যেকোন সংখ্যাকে i^n দ্বারা গুণ করলে সংখ্যাটি ঘড়ির কাঁটার বিপরীতে $n\frac{\pi}{2}$ কোণে ঘুরে যায়।
- $-\pi < \theta \leq \pi$ এই মানের মধ্যে answer কে মুখ্যমান বলা হয়।

Example: দুটি অনুবন্ধী জটিল সংখ্যার সমষ্টি ও গুণফল উভয়ই- **[Ans: b]**

(a) অবাস্তব সংখ্যা (b) বাস্তব সংখ্যা (c) জটিল সংখ্যা (d) কোনটিই নয়

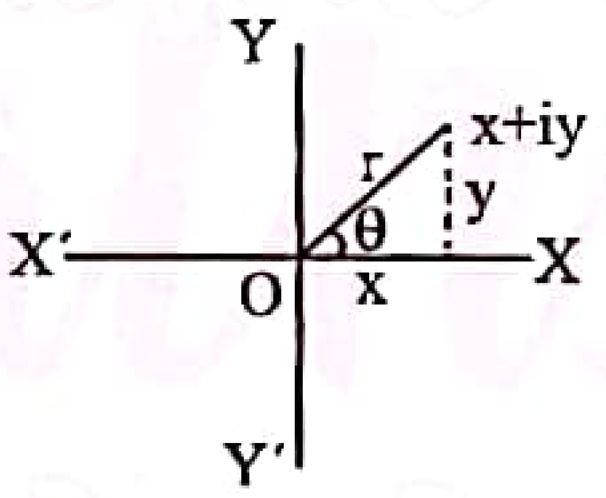
Related Questions:

01. $\sqrt[4]{1}$ এর মান কত? **[Ans: a][RU'17-18]**

(a) $i, -i, 1, -1$ (b) $i, -i, 2, -2$ (c) $i, -i, 3, -3$ (d) $1, -1, -2, 2$

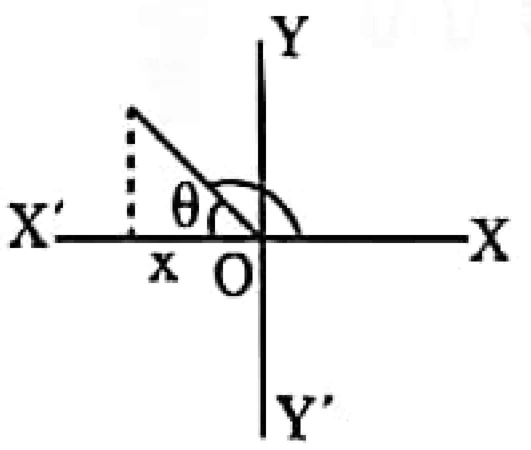
Question Type-02: জটিল সংখ্যার মডুলাস, আর্গুমেন্ট ও পোলার আকৃতি

$x + iy$ জটিল সংখ্যার,

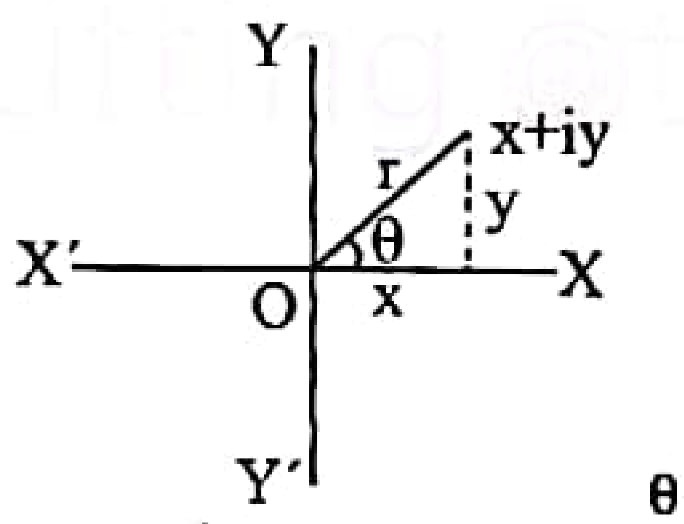


মডুলাস, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

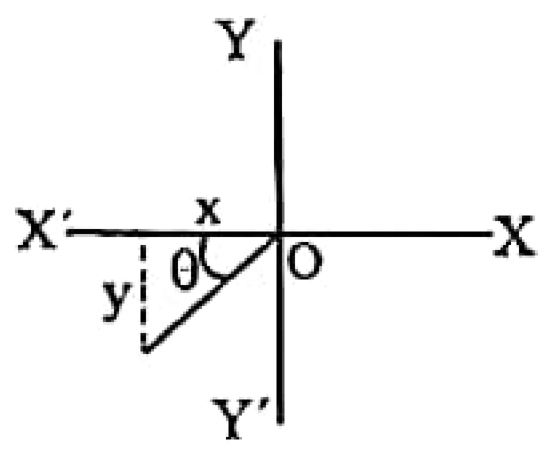
আর্গুমেন্ট θ হলে,



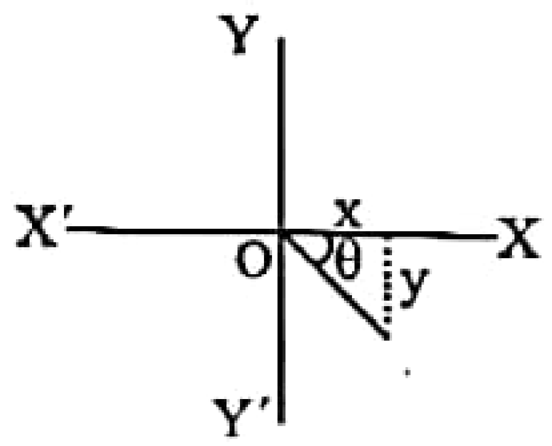
$\theta = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$



$\theta = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$



$\boxed{\theta = -\pi + \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|}$



$\boxed{\theta = -\tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|}$

Related Questions:

01. $\frac{i-2i^{-1}}{1-i^{-1}}$ এর মডুলাস ও আর্গুমেন্ট কত হবে? **[RU'20-21]**

(a) $\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3\pi}{4}$ (c) $\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{-\pi}{4}$ (d) $\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3\pi}{8}$

সমাধান: (a); $\frac{i-\frac{2}{i}}{1-\frac{1}{i}} = \frac{-1-2}{i-1} = \frac{-3}{2}(-1-i) = \frac{3}{2}(1+i)$ ∴ আর্গুমেন্ট $= \tan^{-1}\frac{3/2}{3/2} = \frac{\pi}{4}$

02. $\frac{1+i}{1-i}$ এর পরম মান হলো- **[DU'19-20]**

(a) 0 (b) 1 (c) $\sqrt{2}$ (d) i

সমাধানঃ (b); $\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i-1}{2} = i$

∴ $\frac{1+i}{1-i}$ এর পরম মান $= \text{mod}(i) = \sqrt{0^2+1^2} = 1$

03. $z = 8 + 3i$ হলে $z + \bar{z}$ এর মান কত? **[Ans: c][JU'19-20]**

(a) 8 (b) 12 (c) 16 (d) 20

সমাধানঃ (c); $\bar{z} = 8 - 3i$ ∴ $z + \bar{z} = 2 \times 8 = 16$

04. $a + ib = 4 - i$ হলে $a^2 - b^2$ এর মান কত? **[JU'19-20]**

(a) 11 (b) 12 (c) 13 (d) 15

সমাধানঃ (d); $a = 4\,; b = -1\,; a^2 - b^2 = 16 - 1 = 15$

05. $-2i$ জটিল সংখ্যাটির আর্গুমেন্ট হবে- **[Ans: b][RU'19-20]**

(a) 90° (b) 270° (c) 120° (d) 300°

06. $z = (-4+3i)/i$ এর কাল্পনিক অংশ- **[DU'18-19]**

(a) 3 (b) 4 (c) −4 (d) −3

সমাধানঃ (b); $z = \frac{-4+3i}{i} = -\frac{4}{i} + 3 = -\frac{4i}{i^2} + 3 = -\frac{4i}{-1} + 3 = 4i + 3$ ∴ কাল্পনিক অংশ = 4।

07. $-1 + i$ এর আর্গুমেন্ট কোনটি? **[Ans: b][JU'14-15,18-19]**

(a) $\frac{\pi}{4}$ (b) $\frac{3\pi}{4}$ (c) $\frac{5\pi}{4}$ (d) $\frac{7\pi}{4}$

08. যদি $z_1 = 1 + i$ এবং $z_2 = 1 - i$ হয় তাহলে $z_1 z_2$ এর মান হবে- **[CU'18-19]**

(a) জটিল সংখ্যা (b) বাস্তব সংখ্যা (c) অবাস্তব সংখ্যা (d) কাল্পনিক সংখ্যা

সমাধানঃ (b); $z_1 z_2 = (1+i)(1-i) = 1 - i^2 = 1 + 1 = 2$ অর্থাৎ Real number

09. যদি $z_1 = 1 - i,\ z_2 = \sqrt{3} + i$ হয়, তবে $\frac{z_2}{z_1}$ এর নতি- **[DU'17-18]**

(a) $\frac{5\pi}{12}$ (b) $\frac{\pi}{6}$ (c) $-\frac{\pi}{4}$ (d) $-\frac{5\pi}{12}$

সমাধানঃ (a); $\frac{z_2}{z_1} = \frac{\sqrt{3}+i}{1-i}$ ∴ $\frac{z_2}{z_1}$ এর নতি $= (z_2$ এর নতি$) - (z_1$ এর নতি$)$

$= \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \tan^{-1}(-1) = \frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}$

10. $z_1 = 1 + i$ এবং $z_2 = 2 + i$ হলে, $z_1 z_2$ এর মডুলাস– [RU'17-18]

(a) $\tan^{-1} 2$ (b) $2\sqrt{5}$ (c) $5\sqrt{2}$ (d) $\sqrt{10}$

সমাধান: (d); $\text{mod}(z_1 z_2) = \sqrt{2} \times \sqrt{5} = \sqrt{10}$

11. $1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1+i}}$ এর মডুলাস ও আর্গুমেন্ট কোনটি? [KU'17-18]

(a) $1, 0$ (b) $1, \frac{\pi}{2}$ (c) $1, \pi$ (d) $1, \frac{3\pi}{2}$

সমাধান: (b); $1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1+i}} = 1 - \frac{1}{\frac{i}{1+i}} = 1 - \frac{1+i}{1} = \frac{-1}{1} = \frac{-i}{i^2} = i$

$\therefore$ মডুলাস $= \sqrt{0^2 + (1)^2} = 1$ এবং আর্গুমেন্ট, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{0}\right) = \frac{\pi}{2}$

12. $z_1 = 2 + i$ এবং $z_2 = 3 + i$ হলে $z_1 z_2$ এর মডুলাস কত? [JU'16-17]

(a) 6 (b) $5\sqrt{2}$ (c) 7 (d) $5\sqrt{3}$

সমাধান: (b); $|2 + i|\ |3 + i| = \sqrt{5} . \sqrt{10} = 5\sqrt{2}$

13. $1 - \sqrt{3}i$ জটিল সংখ্যার মডুলাস ও আর্গুমেন্ট কোনটি? [CU'16-17]

(a) $-\sqrt{3}, 60°$ (b) $2, 60°$ (c) $2, 160°$ (d) $-\frac{1}{\sqrt{3}}, 120°$

সমাধান: (No correct answer); মডুলাস ও আর্গুমেন্ট যথাক্রমে 2 এবং $-60°$।

14. $3 - 5i$ এর মডুলাস কত? [KU'16-17]

(a) $\sqrt{28}$ (b) $\sqrt{34}$ (c) $\sqrt{37}$ (d) $\sqrt{42}$

সমাধান: (b); $|3 - 5i| = \sqrt{9 + 25}$

15. $z = 1 - \frac{i}{1 - \frac{1}{1+i}}$ জটিল সংখ্যাটির মডুলাস ও আর্গুমেন্ট- [DU'15-16]

(a) 1,0 (b) $1, \frac{\pi}{2}$ (c) $1, \pi$ (d) $1, \frac{3\pi}{2}$

সমাধান: (d); $z = 1 - \frac{i}{1 - \frac{1}{1+i}} = 1 - \frac{i}{\frac{1+i-1}{1+i}} = 1 - \frac{i+i^2}{i} = 1 - \frac{i^2+i^3}{i^2} = 1 - \frac{-1-i}{-1} = 1 - 1 - i = -i$

$\therefore$ মডুলাস $= 1$, আর্গুমেন্ট $= \frac{3\pi}{2}$

16. $-i$ এর আর্গুমেন্ট কত? [JU'15-16]

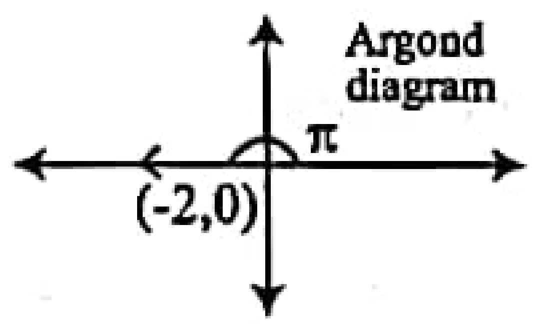
(a) 0 (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $-\infty$ (d) $\frac{3\pi}{2}$

সমাধান: (d); $-i = 0 - i$ $\therefore$ নির্ণেয় আর্গুমেন্ট $= -\frac{\pi}{2}$ বা, $\frac{3\pi}{2}$

17. $\frac{i - i^{-1}}{i + 2i^{-1}}$ এর মান এবং নতি হবে যথাক্রমে- [DU'14-15]

(a) (0,0) (b) $-2i, \frac{-\pi}{2}$ (c) $2i, \frac{\pi}{2}$ (d) $2, \pi$

সমাধান: (d); $\frac{i - i^{-1}}{i + 2i^{-1}} = \frac{i^2 - 1}{i^2 + 2} = -\frac{-1-1}{-1+2} = -2 + 0 \cdot i$ $\therefore r = \sqrt{(-2)^2} = 2;$ $\theta = \pi$



18. $\sqrt{3}-i$ এর মডুলাস কত? [JU'14-15]

(a) $\sqrt{2}$　　(b) 2　　(c) 1　　(d) 4

সমাধান: (b); Using Calculator; **Or,** $\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-1)^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$

19. $z_1=2+i$ এবং $z_2=3+i$ হলে z_1z_2 এর মডুলাস- [DU'13-14]

(a) 6　　(b) $5\sqrt{2}$　　(c) 7　　(d) $5\sqrt{3}$

সমাধান: **(b);** $z_1=2+i\,; z_2=3+i;\ z_1z_2=(2+i)\times(3+i)=5+5i\ \therefore \text{modulus } z_1z_2=\sqrt{5^2+5^2}=5\sqrt{2}$

20. $4+3i$ জটিল সংখ্যাটির মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর। [JU'12-13,KU'13-14]

(a) $\left(5,\ \tan^{-1}\frac{3}{4}\right)$　　(b) $\left(5,\ \tan^{-1}\frac{4}{3}\right)$　　(c) $\left(5,\ \tan^{-1}\frac{-3}{4}\right)$　　(d) None

সমাধান: **(a);** $|4+3i|=\sqrt{4^2+3^2}=5$; $\arg(4+3i)=\tan^{-1}\frac{3}{4}$.

Written

01. $-1-i$ জটিল সংখ্যাটির মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর। [RU'19-20]

সমাধান: $Z=-1-i\ \therefore$ মডুলাস $=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

$\therefore$ আর্গুমেন্ট $=-\pi+\tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right)=-\pi+\frac{\pi}{4}=-\frac{3\pi}{4}$ (Ans.)

Question Type-03: বর্গমূল সংক্রান্ত

Step-1 i যেখানে থাকবে সেখানে 2 নিয়ে আসতে হবে।

Step-1 2 এর সাথে যা থাকবে সেটাকে দুটি উৎপাদকের গুণফল আকারে এমনভাবে প্রকাশ করতে হবে যেন তাদের বর্গের সমষ্টি বাস্তব অংশ হয়।

Example-1: $7-24i$ এর বর্গমূল কত?

সমাধান: $7-24i=7-2.12i=7-2.3i.4=4^2-2.4.3i+(3i)^2=(4-3i)^2\ \therefore\sqrt{7-24i}=\pm(4-3i)$

Example-2: $17-20\sqrt{-2}$ এর বর্গমূল কত?

সমাধান: $17-20\sqrt{-2}=17-20\sqrt{2}\,i=17-2\times10\sqrt{2}\,i=17-2\times5\times2\sqrt{2}\,i$

$=5^2-2\times5\times2\sqrt{2}\,i+(2\sqrt{2}\,i)^2=(5-2\sqrt{2}\,i)^2\ \therefore\sqrt{17-20\sqrt{-2}}=\pm(5-2\sqrt{2}\,i)$.

Example-3: $\frac{5+12i}{3-4i}$ এর বর্গমূল কোনটি?

সমাধান: $\frac{5+12i}{3-4i}=\frac{(5+12i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}=\frac{56i-33}{9+16}=\frac{4^2+2.4.7i+(7i)^2}{25}=\frac{(4+7i)^2}{5^2}=\left(\frac{4}{5}+\frac{7}{5}i\right)^2\ \therefore\sqrt{\frac{5+12i}{3-4i}}=\pm\left(\frac{4}{5}+\frac{7}{5}i\right)$

M.C.Q করার জন্য কয়েকটি বর্গমূল মনে রাখতে পার,

$\sqrt{2i} = \pm(1+i)$ $\quad\quad \therefore \sqrt{i} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$

$\sqrt{-2i} = \pm(1-i)$ $\quad\quad \therefore \sqrt{-i} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$

$\sqrt{\pm 2i} = \pm(1 \pm i)$

$\sqrt{i} + \sqrt{-i} = \pm\sqrt{2}$

Related Questions:

01. $\sqrt{p+4i} = q+i$ হলে $p-q$ এর মান কত? **[GST'20-21]**

(a) 0 √(b) 1 (c) 3 (d) 5

সমাধান: (b); $\sqrt{p+4i} = q+i \Rightarrow p+4i = (q+i)^2 = q^2+i^2+2qi \Rightarrow p+4i = q^2-1+i2q$

এখন, $2q = 4 \Rightarrow q = 2$; $p = q^2-1 = 2^2-1 = 3 \therefore p-q = 3-2 = 1$

02. $\sqrt{2+8\sqrt{5}i} = ?$ **[JU'19-20]**

(a) $\pm(\sqrt{10}+\sqrt{8}i)$ (b) $\pm(\sqrt{8}+\sqrt{10}i)$ (c) $\pm(\sqrt{10}+\sqrt{2}i)$ (d) $\pm(\sqrt{10}+\sqrt{4}i)$

সমাধানঃ (a); Square করে Option check.

03. $-2i$ জটিল সংখ্যাটির বর্গমূল কত? **[KU'19-20]**

(a) $\pm(1-i)$ (b) $\pm(2-i)$ (c) $\pm(1+i)$ (d) $\pm(2+i)$

সমাধানঃ (a); $-2i = 1-1-2i = 1-2i+i^2 = (1)^2-2\times1\times i+i^2 = (1-i)^2$

$\therefore$ বর্গমূল $= \pm(1-i)$

04. $-2i$ এর বর্গমূল কত? **[RU'07-08,JU'14-15,JnU'17-18]**

(a) $\pm(2-i)$ (b) $\pm(1-i)$ (c) $\pm(1+i)$ (d) $\pm(1-2i)$

সমাধান: (b); $-2i = 1^2+21(-i)+(-i)^2 = (1-i)^2 \therefore \sqrt{-2i} = \pm(1-i)$

05. i –এর বর্গমূল কোনটি? **[RU'14-15]**

(a) $\pm\frac{\sqrt{2}}{1-i}$ (b) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$ (c) $\pm\frac{\sqrt{2}}{1+i}$ (d) $\pm\sqrt{2}(1-i)$

সমাধান: (a); $\frac{(1+0)^2}{2} = \frac{1+2i-1}{2} = \frac{2i}{2} = i \therefore i = \frac{(1+i)^2}{2} \Rightarrow \sqrt{i} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2}{1-i} = \pm\frac{\sqrt{2}}{1-i}$

06. $\sqrt{i}+\sqrt{-i}$ এর মান কত? **[CU'07-08,RU'10-11,11-12,JnU'11-12,14-15]**

(a) 2 (b) 1 (c) 0 (d) $\sqrt{2}$

সমাধান: (d); $\sqrt{i} = \sqrt{\frac{2i}{2}} = \sqrt{\frac{(1+i)^2}{2}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$; $\sqrt{i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$ $\therefore \sqrt{i}+\sqrt{-i} = \frac{1+i+1-i}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

Question Type-4: ঘনমূল সংক্রান্ত

- $\sqrt[3]{1} = x \Rightarrow x^3 - 1 = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2+x+1) = 0$ $\quad \therefore x = 1, \underbrace{\boxed{\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}}}_{\omega}, \underbrace{\boxed{\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}}}_{\omega^2}$
- $1 + \omega + \omega^2 = 0$

Example-1: $\sqrt[3]{i}$ এর মান কত?

সমাধান: $\sqrt[3]{i} = x \Rightarrow x^3 = i = (-i)^3 \Rightarrow \left(\frac{x}{-i}\right) = \sqrt[3]{i} = 1, \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ $\quad \therefore x = -i, \frac{i\pm\sqrt{3}}{2}$

Related Questions:

01. ω যদি এককের একটি জটিল ঘনমূল হয়, তবে $(1-\omega)^2(1-\omega^2)^2 = ?$ **[JU'19-20]**

(a) 1　　(b) 3　　(c) ω^3　　(d) 9

সমাধানঃ **(d);** $(1+\omega^2-2\omega)(1+\omega^4-2\omega^2) = (-3\omega)(-3\omega^2) = 9$ [$\because 1+\omega+\omega^2 = 0$ এবং $\omega^3 = 1$]

02. $x = \sqrt[3]{1}$ সমীকরণের মূল তিনটির গুণফল কত? **[RU'19-20]**

(a) -1　　(b) 0　　(c) 1　　(d) কোনটিই নয়

সমাধানঃ **(c);** $x = \sqrt[3]{1}$ সমীকরণের তিনটি মূল $1, \omega, \omega^2$ $\therefore 1 \times \omega \times \omega^2 = \omega^3 = 1$

03. এককের একটি কাল্পনিক ঘনমূল ω হলে $1+\omega^2+\omega^4+\cdots+\omega^{16}$ এর মান হবে- **[RU'19-20]**

(a) 0　　(b) 1　　(c) -1　　(d) ω^2

সমাধানঃ **(a);** $1+\omega^2+\omega^4+\cdots+\omega^{16} = \omega^0+\omega^2+\omega^4+\cdots+\omega^{16}$

ঘাতগুলো সমান্তর ধারা গঠন করে। তাহলে $16 = 0 + (n-1)\times 2$ $\therefore n = 9$

$\therefore$ মোট পদ 9 টি। প্রতি 3 টি পদের যোগফল '0'। $\therefore$ ধারার যোগফল শূন্য।

04. এককের একটি কাল্পনিক ঘনমূল ω হলে $1+\omega^2+\omega^4+\cdots+\omega^{16}$ এর মান হবে- **[RU'19-20]**

(a) 0　　(b) 1　　(c) -1　　(d) ω^2

সমাধানঃ **(a);** $= 1+\omega^2+\omega^4+\omega^6+\omega^8+\omega^{10}+\omega^{12}+\omega^{14}+\omega^{16}$

$= 1+\omega^2+\omega+1+\omega^2+\omega+1+\omega^2+\omega = 0+0+0 = 0$ $[1+\omega+\omega^2 = 0]$

05. i –এর ঘনমূলগুলির দুইটির মান $\frac{1}{2}(i\pm\sqrt{3})$ হলে অপরটির মান- **[CU'14-15]**

(a) i　　(b) 1　　(c) $-i$　　(d) -1

সমাধান: **(c);** $(-i)^3 = (-i)\times(-i)\times(-i) = (-1)^2\times(i)^2\times(-i) = 1\times(-1)\times(-i) = -i$

Question Type-5: চতুর্মূল সংক্রান্ত

$\sqrt[4]{-n^2} = \sqrt[4]{(ni)^2} = \sqrt{\pm ni} = \sqrt{\frac{n}{2}(\pm 2i)} = \sqrt{\frac{n}{2}(1\pm i)^2}$ $\quad \therefore \sqrt[4]{-n^2} = \pm\sqrt{\frac{n}{2}}(1\pm i)$

Related Questions:

01. $\sqrt[4]{-64}$ এর মান কত? **[RU'06-07,CU'11-12]**

(a) $2i(1\pm i)$ (b) $\pm2(1\pm i)$ (c) $i^4(1\pm i^2)$ (d) $i\pm8$

সমাধান: (b); $\sqrt[4]{-64}=\sqrt{\pm 8i}=\pm 2\sqrt{2}\left(\frac{1\pm i}{\sqrt{2}}\right)=\pm2(1\pm i)$

Question Type-6: ৬ষ্ঠমূল সংক্রান্ত

$\sqrt[6]{-n^3}=\pm\sqrt{n}i, \pm\sqrt{n}i\omega, \pm\sqrt{n}i\omega^2$; $\sqrt[6]{-n^2}=\pm\sqrt[3]{n}i, \pm\sqrt[3]{n}i\omega, \pm\sqrt[3]{n}i\omega^2$.

Example: $\sqrt[6]{-64}$ এর মান কত?

সমাধানঃ $\sqrt[6]{-64}=x\Rightarrow x^6=-64=64i^2\Rightarrow x^3=\pm8i=(\pm2i)^3\Rightarrow\left(\frac{x}{\pm2i}\right)^3=1\Rightarrow\frac{x}{\pm2i}=\sqrt[3]{1}=1,\omega,\omega^2$

$\therefore x=\pm2i,\pm2i\omega,\pm2i\omega^2$

Question Type-7: মান নির্ণয় সংক্রান্ত

$i^2=-1,\ i^3=-i,\ i^4=1$

* $i^n+i^{n+1}+i^{n+2}+i^{n+3}=0$
* $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2},\ \omega^2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$
* $\omega^3=1,\ \omega=\frac{1}{\omega^2},\ \omega^2=\frac{1}{\omega}$
* $1+\omega+\omega^2=0$

Example-01: $x=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{3}i)$ হলে x^{18} এর মান কত?

সমাধান: $x=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{3}i)=\omega\ \therefore x^{18}=\omega^{18}$

ω এর Power কে 3 দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ যা থাকে তা ব্যবহার করে মান নির্ণয় করলে একই Ans. হয়।

$\omega^{18}=\omega^0=1\ \therefore x=1.$

Example-02: i কাল্পণিক সংখ্যা হলে i^{51} এর মান কত?

সমাধান: i এর Power কে 4 দ্বারা ভাগ করে ভাগশেষ যা থাকে তা ব্যবহার করে মান নির্ণয় করলে মান একই হয়।

$i^{51}=i^{4\times12+3}=i^3=-i$

Example-03: $\sqrt{(4+6i\sqrt{5})}+\sqrt{(4-6i\sqrt{5})}$ এর মান কত?

সমাধান: $\sqrt{4+6i\sqrt{5}}+\sqrt{4-6i\sqrt{5}}=\sqrt{(3+\sqrt{5}i)^2}+\sqrt{(3-\sqrt{5}i)^2}=3+\sqrt{5}i+3-\sqrt{5}i=6$

Example-04: $a=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ হয় তবে a^6 এর মান কত?

সমাধান: $a=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\Rightarrow a^2=\frac{1+2i+i^2}{2}=i\Rightarrow a^6=i^3=-i$

Or, $a=\frac{1+i}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}i=e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$; $a^6=\left(e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right)^6=e^{i\left(\frac{3\pi}{2}\right)}=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i$

Example-05: $\sqrt{-3+\sqrt{-3+\sqrt{-3+\cdots}}}=?$

সমাধান: $\sqrt{-3+\sqrt{-3+\sqrt{-3+\cdots}}}=x\Rightarrow-3+\sqrt{-3+\sqrt{-3+\cdots}}=x^2$

$\Rightarrow-3+x=x^2\Rightarrow x^2-x+3=0\ \therefore x=\frac{1\pm\sqrt{1-4\times1\times3}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{-11}}{2}$

Related Questions:

01. যদি $i^2 = -1$ হয়, $i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{23}$ এর মান কত? [Agri. Guccho'20-21]

(a) -1 (b) i (c) $-i$ (d) 1

সমাধান: (a); $i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{23} = \underbrace{1 + i + i^2 + i^3 + \cdots + i^{23}}_{\text{এর মান}=0} - 1 = -1$

02. $i^2 = -1$ হলে, $\frac{i^{-1}-i}{2i^{-1}+i}$ এর মান কত? [Agri. Guccho'20-21]

(a) $-2i$ (b) $2i$ (c) -2 (d) 2

সমাধান: (d); $\frac{i^{-1}-i}{2i^{-1}+i} = \frac{\frac{1}{i}-i}{2\frac{1}{i}+i} = \frac{1-i^2}{2+i^2} = \frac{1+1}{2-1} = 2$

03. $x = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$ এবং $y = \frac{1}{2}(-1-\sqrt{-3})$ হলে $x^2 + xy + y^2$ এর মান- [DU'18-19]

(a) 0 (b) 2 (c) $1+\sqrt{3}$ (d) 1

সমাধান: (a); $x = \omega,\ y = \omega^2\ \therefore x^2 + xy + y^2 = \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = \omega^2 + 1 + \omega = 0$

04. i^{4n+3} এর মান কোনটি? [Ans: b][JU'18-19]

(a) -1 (b) $-i$ (c) 1 (d) i

05. If $\frac{1}{a+i} = \frac{i}{a-i}$, then the value of a is– [DU'16-17]

(a) 1 (b) $\frac{i}{2}$ (c) -1 (d) $-\frac{i}{2}$

সমাধান: (c); $\frac{1}{a+i} = \frac{i}{a-i} \Rightarrow a - i = ia + i^2 \Rightarrow a - i = -1 + ai$, বাস্তব অংশের সহগ সমীকৃত করে, $a = -1$

06. এককের একটি কাল্পনিক ঘনমূল ω হলে $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^8)$ এর মান- [RU'06-07,DU'15-16]

(a) 18 (b) 6 (c) -9 (d) 9

সমাধান: (d); $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^8) = (1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega)(1-\omega^2)$

$= \{(1-\omega)(1-\omega^2)\}^2 = (1-\omega-\omega^2+\omega^3)^2 = (1+1+1)^2 = 9$

Question Type-8: শর্তাধীনে মান নির্ণয় ও প্রমাণ

$z = x + iy,\quad \bar{z} = x - iy,\quad (\bar{z})^n = (\overline{z^n})$

Example-01: $\sqrt[3]{a+ib} = x + iy$ হয় তাহলে $\sqrt[3]{a+ib} = ?$

$\sqrt[3]{a+ib}$

$= \sqrt[3]{x^3 - 3xy^2 - i(3x^2y - y^3)}$

$= \sqrt[3]{x^3 - 3x^2iy + 3xi^2y^2 - i^3y^3}$

$= \sqrt[3]{(x-iy)^3}$

$= x - iy$

$\sqrt[3]{a+ib} = x + iy$

$\Rightarrow a + ib = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$

$a = x^3 - 3xy^2$

$b = 3x^2y - y^3$

Or, $\sqrt[3]{a+ib} = x + iy \Rightarrow \overline{\sqrt[3]{a+ib}} = \overline{x+iy} \Rightarrow \sqrt[3]{\overline{a+ib}} = \overline{x+iy}\ \therefore \sqrt[3]{a-ib} = x - iy$

Example-02: $x = -1 + i\sqrt{2}$ হলে $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 9$ এর মান কত?

সমাধান: $x = -1 + i\sqrt{2} \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = -2 \Rightarrow x^2 + 2x + 3 = 0$

$\therefore x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 9 = x^2(x^2 + 2x + 3) + 2(x^2 + 2x + 3) - (x^2 + 2x + 3) + 12 = 12$

Example-03: $x = 3 + 2i$ এবং $y = 3 - 2i$ হলে $x^2 + xy + y^2 = ?$

সমাধান: $x^2 + xy + y^2 = (3 + 2i)^2 + (3 + 2i)(3 - 2i) + (3 - 2i)^2$

$= 9 + 12i - 4 + 9 + 4 + 9 - 12i - 4 = 23$

Example-04: $\frac{1-ix}{1+ix} = a - ib$ এবং x, a, b বাস্তব হলে কোনটি সঠিক?

(a) $a^2 + b^2 = 1$ (b) $a^2 - b^2 = 1$ (c) $a^2 + b^2 = -1$ (d) $a^2 + b^2 = 0$

সমাধান: $\frac{1-ix}{1+ix} = a - ib \Rightarrow \left|\frac{1-ix}{1+ix}\right| = |a - ib| \Rightarrow \frac{\sqrt{1^2+(-x)^2}}{\sqrt{1^2+x^2}} = \sqrt{a^2 + (-b)^2} \Rightarrow 1 = \sqrt{a^2 + b^2} \therefore a^2 + b^2 = 1$

Related Questions:

01. যদি $\frac{2+3i}{2-i} = A + iB$ এবং A ও B বাস্তব সংখ্যা হয় তাহলে B এর মান কত? **[Agri. Guccho'19-20]**

(a) $\frac{3}{5}$ (b) $\frac{4}{5}$ (c) $\frac{7}{5}$ (d) $\frac{8}{5}$

সমাধান: (d); $\frac{2+3i}{2-i} = A + iB \Rightarrow \frac{(2+3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = A + iB$

$\Rightarrow \frac{4+6i+2i+3i^2}{2^2-i^2} = A + iB \Rightarrow \frac{4+8i-3}{4+1} = A + iB \Rightarrow \frac{1}{5} + \frac{8}{5}i = A + iB \therefore B = \frac{8}{5}$

02. $1 + x^2C^2 = 0$ হলে C এর মান কত? **[CU'16-17]**

(a) $ix, \frac{i}{x}$ (b) $\pm\frac{1}{x}$ (c) $\pm\frac{i}{x}$ (d) $\pm ix$

সমাধান: (c); $C^2 = \frac{-1}{x^2}\left(\frac{i}{x}\right)^2 \therefore C = \pm\frac{i}{x}$

03. $\begin{pmatrix} 1+2i & 0 \\ 0 & 1-2i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ হলে x ও y এর মান কত? **[CU'16-17]**

(a) $x = y = 0$ (b) $x \neq 0, \frac{1}{5}(1 + i2)$ (c) $x \neq 0, \frac{1}{5}(1 - i2)$ (d) $x = 0, y = \frac{(1+i2}{5}$

সমাধান: (d); $\begin{bmatrix} 1+2i & 0 \\ 0 & 1-2i \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1-2i & 0 \\ 0 & 1+2i \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} x \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1-2i & 0 \\ 0 & 1+2i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 0 \\ 1+2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{(1+2i)}{5} \end{bmatrix} \therefore x = 0, \ y = \frac{1+2i}{5}$

04. যদি $C^2 = 5 + 12i$ হয় তবে C এর মান কত? **[CU'15-16]**

(a) $\pm 4i$ (b) $\pm(1 - 2i)$ (c) $7i$ (d) $\pm(3 + 2i)$

সমাধান: (d); $C^2 = 5 + 12i = 3^2 + 2.3.2i + (2i)^2 \Rightarrow C^2 = (3 + 2i)^2 \therefore C = \pm(3 + 2i)$

05. $x=-1+i\sqrt{2}$ হলে $x^4+4x^3+6x^2+4x=?$ [RU'15-16]

(a) 3 (b) 5 (c) 7 (d) 1

সমাধান: (a); এখন, $x^4+4x^3+6x^2+4x = x^2(x^2+2x+3)+2x(x^2+2x+3)-(x^2+2x+3)+3$

$= x^2\times0+2x\times0-0+3=3;\ x=-1+i\sqrt{2}\Rightarrow x+1=i\sqrt{2} \Rightarrow x^2+2x+1=-2\Rightarrow x^2+2x+3=0$

06. $\frac{1-ix}{1+ix}=a-ib$ এবং x, a ও b বাস্তব হলে, নিচের কোনটি সঠিক? [RU'15-16]

(a) $a^2+b^2=1$ (b) $a^2-b^2=1$ (c) $a^2+b^2=-1$ (d) $a^2+b^2=0$

সমাধান: (a) ; $\frac{1-ix}{1+ix}=a-ib\Rightarrow \left|\frac{1+ix}{1-ix}\right|=|a-ib|\Rightarrow \frac{|1+ix|}{|1-ix|}=|a-ib|$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{1^2+1^2}}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{a^2+b^2}\ \therefore a^2+b^2=1$

07. $3a+i(b-5)=9-5bi$ হলে a ও b এর মান যথাক্রমে কত? [JU'14-15]

(a) (3,5) (b) (5/6,3) (c) (3,5/6) (d) (2,5,6)

সমাধান: (c); $3a+i\,(b-5)=9-5bi$; বাস্তব অংশ হতে, $3a=9\ \therefore a=3$

অবাস্তব অংশ হতে, $b-5=-25 \Rightarrow 6b=5\ \therefore b=\frac{5}{6}$

08. $\sqrt[3]{x+iy}=p+iq$ হলে কোনটি সত্য? [RU'14-15]

(a) $4(p^2+q^2)=\frac{x}{p}+\frac{y}{q}$ (b) $4(p^2-q^2)=\frac{x}{p}+\frac{y}{q}$ (c) $4(p^2-q^2)=\frac{x}{p}-\frac{y}{q}$ (d) $4(p^2+q^2)=\frac{x}{p^2}+\frac{y}{q^2}$

সমাধান: (b); $\sqrt[3]{x+iy}=p+iq \Rightarrow x+iy=p^3+3p^2.iq-3pq^2-iq^3$

$\Rightarrow x+iy=(p^3-3pq^2)+i(3p^2q-q^3)\ \ \therefore x=p^3-3pq^2$

$y=3p^2q-q^3\ \Rightarrow \frac{x}{p}=p^2-3q^2 \ldots\ldots (i) \Rightarrow \frac{y}{q}=3p^2-q^2 \ldots\ldots (ii)$

(i) ও (ii) যোগ করে, $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=4(p^2-q^2)$

Question Type-9: জটিল সংখ্যাভিত্তিক সঞ্চারপথ সংক্রান্ত

$z=x+iy$

$|z|=\sqrt{x^2+y^2}\rightarrow(0,0)$ বিন্দু হতে (x,y) বিন্দুর দূরত্ব।

$|z-3|=|x+iy-3|=\sqrt{(x-3)^2+y^2}\rightarrow(3,0)$ বিন্দু হতে (x,y) বিন্দুর দূরত্ব।

- $\frac{|z+a|}{|z+b|}=k$; $k=1$ হলে সরলরেখার সমীকরণ ; $k\neq1$ হলে বৃত্তের সমীকরণ
- $sp+s'p=2a$, $ss'<2a$ হলে উপবৃত্ত , $ss'>2a$ হলে অধিবৃত্ত , $ss'=2a$ হলে সরলরেখা
- $|z-2|=3$: circle
- $|z-2|=0$: point circle
- $|z-2|=|z-3|$: strightline
- $|z+2|+|z-2|=8$: ellipse
- $||z+2|-|z-2||=3$: hyperabola

Related Questions:

01. যদি $z = x + iy$ হয়, তবে $|2z - 1| = |z - 2|$ দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চারপথের সমীকরণ হবে কোনটি? [KU'19-20]

(a) অধিবৃত্ত (b) উপবৃত্ত (c) এককবৃত্ত (d) পরাবৃত্ত

সমাধান: **(c)**; $z = x + iy$; $|2z - 1| = |z - 2| \Rightarrow |2(x + iy) - 1| = |x + iy - 2|$

$\Rightarrow \sqrt{(2x-1)^2 + (2y)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2} \Rightarrow 4x^2 + 1 - 4x + 4y^2 = x^2 + 4 + y^2 - 4x$

$\Rightarrow 3x^2 + 3y^2 = 3 \therefore x^2 + y^2 = 1$ ∴ সমীকরণটি একক বৃত্তের, কারণ ব্যাসার্ধ 1 একক।

অথবা, কোন জটিল সংখ্যা $z = x + iy$ এর জন্য $|az + k_1| = |bz + k_2|$ সর্বদা বৃত্ত নির্দেশ করে।

02. যদি $z = x + iy$ হয়, তবে $|z + i| = |\bar{z} + 2|$ দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চার পথের নাম কি হবে? [KU'18-19]

(a) সরলরেখা (b) বৃত্ত (c) উপবৃত্ত (d) অধিবৃত্ত

সমাধান: **(a)**; $|z + i| = |\bar{z} + 2| \Rightarrow \sqrt{x^2 + (y+1)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + y^2}$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2y + 1 = x^2 + 4x + 4 + y^2 \Rightarrow 4x - 2y + 3 = 0$ যা সরলরেখার সঞ্চারপথ নির্দেশ করে।

03. $z = x + iy$ হলে $|z - 5| + |z + 5| = 16$ নির্দেশ করে– [DU'16-17]

(a) Circle (b) Parabola (c) Hyperbola (d) Ellipse

সমাধান: (d); $|z - 5| + |z + 5| = 16$ একটি বক্ররেখা যার প্রতিটি বিন্দুর $(-5,0)$ ও $(5,0)$ বিন্দু থেকে দূরত্বের যোগফল 16। কাজেই এটি একটি উপবৃত্ত যার উপকেন্দ্রদ্বয় $(\pm 5,0)$ ও বৃহদাক্ষের দৈর্ঘ্য 16 একক।

04. $\sqrt{-16} \times \sqrt{-1} =$ কোনটি? [JU'16-17]

(a) 4 (b) -4 (c) ± 4 (d) 4i

সমাধান: (b); $\sqrt{-16} \times \sqrt{-1} = 4i \times i = -4$

05. $z_1 = a + ib$ হলে z এর কোন মানের জন্য $z_1 z = 1$ হবে? [CU'16-17]

(a) $\frac{1}{a^2+b^2}(a + ib)$ (b) $\frac{1}{|a+ib|^2}(a - ib)$ (c) $\frac{1}{|a+ib|}(a - ib)$ (d) $\frac{a}{a^2+b^2} \pm \frac{b}{a^2+b^2}$

সমাধান: (b); $Z_1 Z = 1$; $Z = \frac{1}{Z_1} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{1}{|a+ib|^2}(a - ib)$

06. যদি $z = x + iy$ হয় তাহলে $z\bar{z} = 1$ সমীকরণটি হবে- [CU'06-07,RU'09-10,16-17]

(a) বৃত্ত (b) সরলরেখা (c) বিন্দু বৃত্ত (d) পরাবৃত্ত

সমাধান: **(a)**; $Z\bar{Z} = x^2 + y^2 = 1$ একটি বৃত্তের সমীকরণ।

07. $z = x + iy$ হলে, $|z - 8| + |z + 8| = 20$ দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চারপথটি কি হবে? [RU'13-14]

(a) বৃত্ত (b) উপবৃত্ত (c) পরাবৃত্ত (d) সরলরেখা

সমাধান: **(b)**; $z = x + iy$

$|x + iy - 8| + |x + iy + 8| = 20$ Or, $\sqrt{(x-8)^2 + y^2} + \sqrt{\left((x+8)^2 + y^2\right)} = 20$

Or, $(x-8)^2 + y^2 = 400 - 40\sqrt{\left((x+8)^2 + y^2\right)} + \left((x+8)^2 + y^2\right)$

Or, $-32x = 400 - 40\sqrt{\left((x+8)^2 + y^2\right)}$ Or, $-4x = 50 - 5\sqrt{\left((x+8)^2 + y^2\right)}$

Or, $4x + 50 = 5\sqrt{\left((x+8)^2 + y^2\right)}$ Or, $(4x + 50)^2 = 25(x + 8)^2 + 25y^2$

Or, $16x^2 + 400x + 2500 = 25x^2 + 400x + 1600 + 25y^2$

Or, $9x^2 + 25y^2 = 900$ Or, $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ যা একটি উপবৃত্তের সমীকরণ।