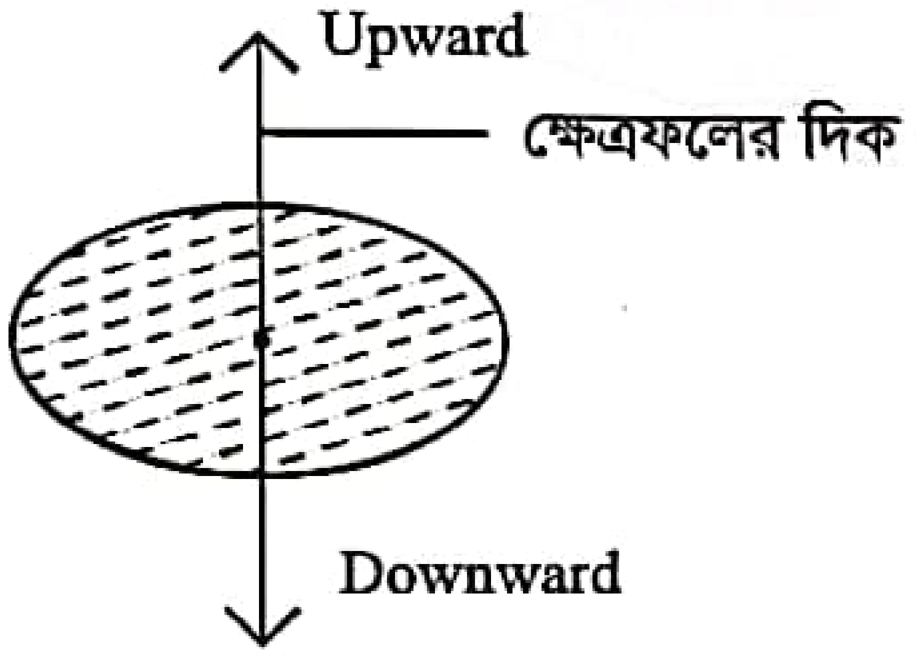
অধ্যায়-০২: ভেক্টর

Question Type–01: ভেক্টর রাশি, স্কেলার রাশি, বিভিন্ন সংজ্ঞা ও ভেক্টরের বাস্তব অস্তিত্ব

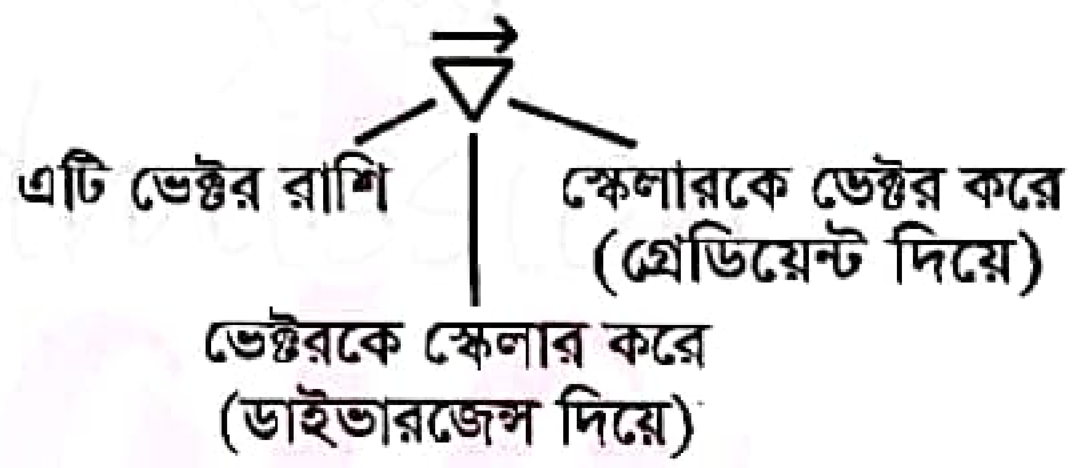
Case–01 ভেক্টর হল একটি অপারেটর যার দ্বারা দিক নির্দেশিত হয় এবং ভেক্টর রাশি = মান + দিক
স্কেলার রাশি = শুধুমাত্র মান [তবে স্কেলার রাশির ধনাত্মক ও ঋণাত্মক মান আছে। যেমন- ধনাত্মক কাজ]

স্কেলার রাশি	ভেক্টর রাশি
দূরত্ব, দ্রুতি, কাজ, শক্তি, ক্ষমতা, ভর, জড়তার ভ্রামক, সময়, তাপ, তাপমাত্রা, পীড়ন, চাপ, রোধ, বিদ্যুৎ প্রবাহ, বিভব, কম্পাঙ্ক, শিশিরাঙ্ক, আপেক্ষিক তাপ, আপেক্ষিক দৈর্ঘ্য।	সরণ, বেগ, ত্বরণ, বল, ভরবেগ, টর্ক, কৌণিক ভরবেগ, প্রাবল্য (যত প্রকার সম্ভব), ওজন, চৌম্বক ভ্রামক, দ্বিমেরু ভ্রামক, পৃষ্ঠটান।
মনে রাখবে, ক্ষেত্রফল কখনও কখনও ভেক্টর আবার কখনও স্কেলার। যখন ভেক্টর, তখন দিক তলের লম্ব বরাবর।	



পীড়ন = $\frac{F}{A}$; A এখানে ভেক্টর।

Case–02 ভেক্টর অপারেটর হল, $\vec{\nabla}$ (ন্যাবলা) = $\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$;



গ্রেডিয়েন্ট: Grad(A) = $\vec{\nabla}A$

শর্ত: (i) A must be scalar

(ii) মাঝে কোনো dot থাকবে না

(iii) $\vec{\nabla}$ আগে বসবে, A পরে।

Example: $V = 3x + 2xy + 2z^2$; Grad (V) =?

সমাধান: $\overline{\nabla}V = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x}(3x + 2xy + 2z^2) + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y}(3x + 2xy + 2z^2) + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}(3x + 2xy + 2z^2)$

$= (3 + 2y)\hat{i} + 2x\hat{j} + 4z\hat{k}$ (Ans.)

কিছু বাস্তব ক্ষেত্র : $\overline{F}$ = Grad (w)

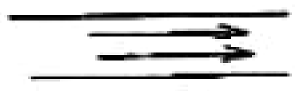
$\overline{E}$ = Grad(V) $\boxed{\text{Sign neglect করে}}$

ডাইভারজেন্স: $\underset{\text{d for dot}}{\underset{\downarrow}{(\text{divergence})}}$ divergence of E = $\overline{\nabla}.\overline{E} = V$

প্রচলিত কিছু **divergence:** V = div (E) ; W = div(F) | বাস্তবে ত্রিমাত্রিকে এর ব্যবহার হয়।

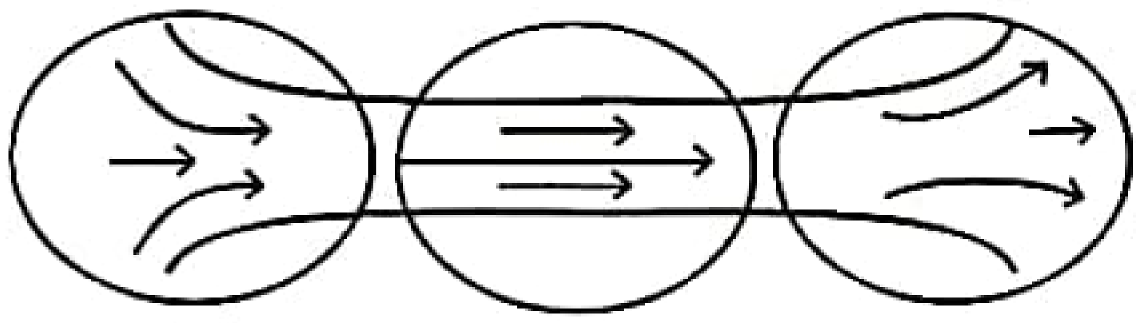
Example: $E = 2x\hat{i} + 3x^2y\hat{j} + 5z^2\hat{k}$ হলে $div(E) = ?$

সমাধান: $div(E) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right).(2x\hat{i} + 3x^2y\hat{j} + 5z^2\hat{k}) = (2 + 3x^2 + 10z)$ যা স্কেলার।

Points: (i) $\vec{\nabla}.\vec{A} = 0$ হলে বোঝায় A = Solenoidal 

(ii) $\vec{\nabla}.\vec{A} = +ve$ হলে বোঝায় A = Source 

(iii) $\vec{\nabla}.\vec{A} = -ve$ হলে বোঝায় A = sink 



Sink Solenoidal Source

কার্ল: Curl
C for cross

Curl of $\overline{A} = \overline{\nabla}\times\overline{A}$

Example: $\overline{A} = 3xy\hat{i} + 2x^2z\hat{j} + 3z^2\hat{k}$, Curl(A) এর মান (1, 1, 2) point এ কত?

সমাধান: $\text{Curl (A)} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3xy & 2x^2z & 3z^2 \end{vmatrix} = \hat{i}(0 - 2x^2) - \hat{j}(0 - 0) + \hat{k}(4xz - 3x) = -2\hat{i} + 5\hat{k}$ [at(1, 1, 2)]

$|\text{Curl(A)}| = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$ [at(1, 1, 2)] (Ans.)

Points: (i) এটি ভেক্টর ক্ষেত্র (ii) $\text{Curl(A)} = \underline{0}$ বা $\overline{\nabla}\times\overline{A} = \underline{0}$ হলে $\overline{A}$ = অঘূর্ণনশীল

(iii) $\text{Curl(A)} \neq 0$ হলে $\overline{A}$ = ঘূর্ণনশীল।

→ +ve হলে লব্ধি ভেতরের দিকে [Clockwise]

→ −ve হলে লব্ধি বাহিরের দিকে [anticlockwise]

এবং $\left|\vec{\nabla} \times \vec{v}\right| = 2\,\omega$ যেখানে ω = ঘূর্ণন গতি

* Curl এর divergence সবসময় 0 (শূন্য) হয়।

Case–03 ভেক্টর যোজন → লব্ধি হলে। ভেক্টর বিয়োজন → উপাংশে বিভাজিত হলে।

Related Questions:

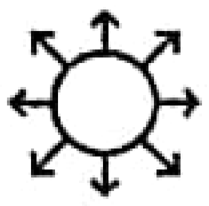
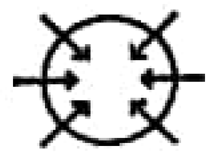
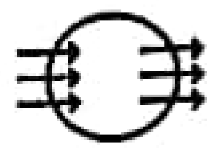
01. কোন ভেক্টর রাশির কার্ল (Curl) শূন্য হলে ভেক্টরটি কেমন হবে? **[Ans: c][RU'19-20]**
(a) ঘূর্ণনশীল ও অসংরক্ষণশীল (b) ঘূর্ণনশীল ও সংরক্ষণশীল (c) অঘূর্ণনশীল ও সংরক্ষণশীল (d) অঘূর্ণনশীল ও অসংরক্ষণশীল

02. রেজা তার বাড়ি থেকে বের হয়ে প্রথমে উত্তর দিকে 15 কিমি গেল। তারপর পশ্চিম দিকে 10 কিমি গেল। এবার দক্ষিণ দিকে সে আরো 5 কিমি এগোল। সবশেষে পূর্ব দিকে 10 কিমি অতিক্রম করল। এখন নিজের বাড়ির কোনদিকে সে দাঁড়িয়ে আছে?
(a) পূর্ব (b) পশ্চিম (c) উত্তর (d) দক্ষিণ **[Ans: c][KU'18-19]**

03. অবস্থান ভেক্টর $\vec{r} = 3x\hat{i} - 2y\hat{j} + 4z\hat{k}$ হলে $\vec{\nabla}.\vec{r} = ?$ **[CU'18-19]**
(a) 9 (b) 5 (c) 10 (d) 12

সমাধান: **(b);** $\vec{\nabla}.\vec{r} = \left(\frac{d}{\delta_x}\hat{i} + \frac{d}{\delta_y}\hat{j} + \frac{d}{\delta_z}\hat{k}\right)(3x\hat{i} - 2y\hat{j} + 4z\hat{k}) = 3 - 2 + 4 = 5$

04. নিচের কোনটির ক্ষেত্রে $\vec{\nabla}.\vec{v} = 0$ সত্য? [Ans: c] [RU'17-18]

(a)  (b)  (c)  (d) সবগুলোই সত্য

05. $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ দুটি ভেক্টর রাশি (vector quantity) হলে কোনটি সঠিক? [Ans: b][JnU'15-16]

(a) $\vec{A}\times\vec{B} = \vec{B}\times\vec{A}$ (b) $\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$ (c) কোনটিই নয় (d) a ও b উভয়ই

06. মান শূন্য নয় এ রকম একটি ভেক্টরকে তার মান দিয়ে ভাগ করলে কী পাওয়া যায়? [Ans: c][CU'15-16]

(a) নাল ভেক্টর (b) অবস্থান ভেক্টর (c) একক ভেক্টর (d) সমতলীয় ভেক্টর (e) সমান্তরাল ভেক্টর

07. ভেক্টর বিভাজনের দৃষ্টান্ত কোনটি? [Ans: c][RU'06-07,KU'13-14]

(a) চলন্ত গাড়িতে পড়ন্ত বৃষ্টি (b) পাখির উড্ডয়ন

(c) গুণটানা নৌকার গতি (d) গাড়ির গতি

Written

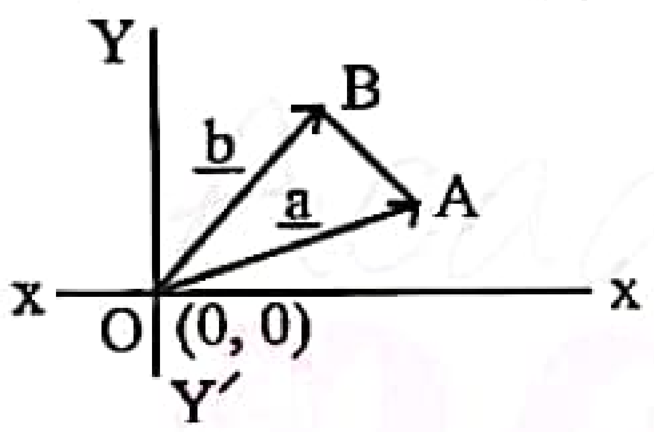
01. $(1,-1,1)$ অবস্থানে $\overline{A} = 3xyz^3\hat{i} + 2xy^2\hat{j} - x^3y^2z\hat{k}$ এর ডাইভারজেন্স (divergence) নির্ণয় কর। [JnU'18-19]

সমাধানঃ $\vec{\nabla}.\vec{A} = \left(\frac{\delta}{\delta x}\hat{i} + \frac{\delta}{\delta y}\hat{j} + \frac{\delta}{\delta z}\hat{k}\right).\left(3xyz^3\hat{i} + 2xy^2\hat{j} - x^3y^2z\hat{k}\right) = 3yz^3 + 4xy - x^3y^2$

$(1,-1,1)$ বিন্দুতে, $\vec{\nabla}.\vec{A} = 3(-1).1^3 + 4.1.(-1) - 1^3.(-1)^2 = -3 - 4 - 1 = -8$ (Ans.)

Question Type-02: অবস্থান নির্ণয়

$A = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$, $|\overline{A}| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$



চিত্র হতে, $\underline{a} + \overline{AB} = \underline{b}$ $\boxed{\overline{AB} = \underline{b} - \underline{a}}$

$\therefore \overline{AB} =$ B এর অবস্থান ভেক্টর $-$ A এর অবস্থান ভেক্টর।

Example: $A(2,3,0)$, $B(6,0,5)$ হলে $\overline{AB} = ?$, $|\overline{AB}| = ?$

সমাধানঃ $\overline{AB} = (6-2)\hat{i} + (0-3)\hat{j} + (5-0)\hat{k} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$

$|\overline{AB}| = \sqrt{4^2+3^2+5^2} = \sqrt{50}$ (Ans.)

Related Questions:

01. 10N মানের একটি বল X অক্ষ বরাবর ক্রিয়া করলে Y অক্ষ বরাবর এর উপাংশ হবে- [Ans: d][JU'19-20]

(a) 10N (b) 5N (c) 8.66N (d) 0N

02. উত্তর ও পূর্ব দিকের মধ্যে বায়ু প্রবাহিত হচ্ছে।বায়ুর বেগের উত্তর ও পূর্ব দিকের অংশকযথাক্রমে 5 km/hr এবং 12 km/hr হলে লব্ধিবেগ কত হবে? [JU'19-20]

(a) 60 km/hr (b) 7 km/hr (c) 17 km/hr (d) 13 km/hr

সমাধানঃ **(d)**; $\sqrt{5^2+12^2} = 13$;কেননা উত্তর ও পূর্বের মধ্যবর্তী কোণ 90°

03. $3\hat{i} - 4\hat{j} + 12\hat{k}$ ভেক্টরটির মান কত? [JU'18-19]

(a) 8 (b) 11 (c) 13 (d) 18

সমাধান: (c); $\sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13$

04. $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ এবং $\vec{b} = 3\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$ দুটি ভেক্টর রাশি হলে, $|2\vec{a} - \vec{b}| =$ কত? [JU'14-15]

(a) $\sqrt{12}$ (b) $\sqrt{13}$ (c) $\sqrt{14}$ (d) $\sqrt{15}$

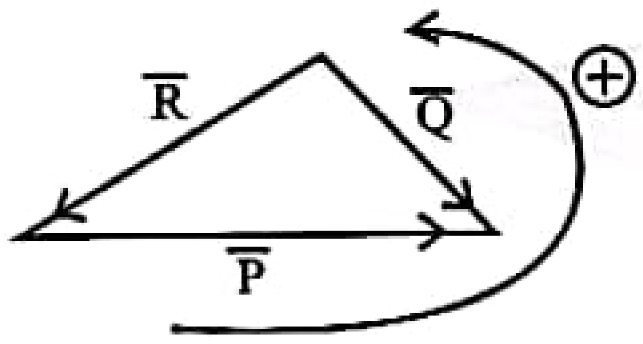
সমাধান: (c); $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k};\ \vec{b} = 3\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}\ \therefore |2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}$

Question Type-03: লব্ধি নির্ণয়ের সূত্রাবলি

এখানে যে সূত্রগুলো আলোচনা করা হয়:

(i) সাধারণ সূত্র (ii) ত্রিভূজ সূত্র (iii) সামান্তরিক সূত্র (iv) উপাংশ সূত্র (v) বহুভূজ সূত্র।

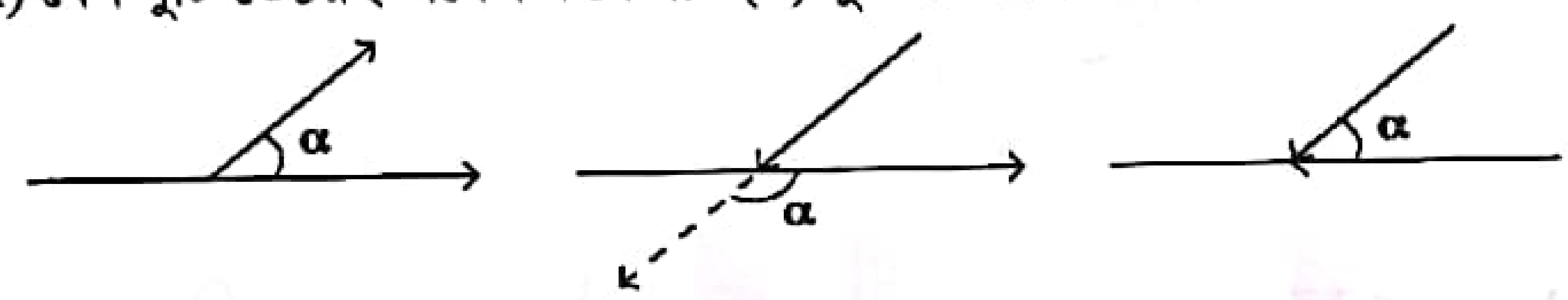
Case–01 ত্রিভূজ সূত্রের হিসাব মিলাতে যে কোন একটি দিক প্রথমে বিবেচনা করে নিবে তাহলে উত্তরে ভুল হবে না।



Ans: $\overline{P} - \overline{Q} + \overline{R} = \underline{0}$

Case–02 সামান্তরিক সূত্রের সাহায্যে লব্ধি নির্ণয়ে অন্তর্ভুক্ত কোণ নির্ণয়ে খেয়াল রাখবে-

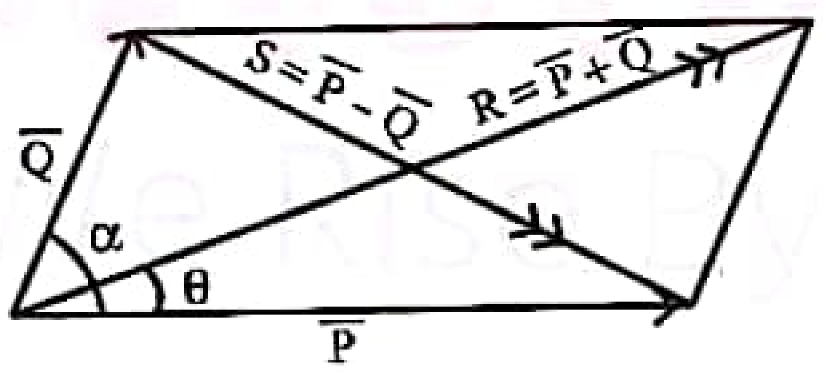
(i) যেন দুটি ভেক্টরই প্রবেশ করে বা (ii) দুটি ভেক্টরই বের হয়।



Case–03 দুটি ভেক্টর যোগ করতে বললে $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$

দুটি ভেক্টর বিয়োগ করতে বললে $R = \sqrt{P^2 + Q^2 - 2PQ\cos\alpha}$ [এটি দিয়ে আপেক্ষিক বেগ এর মান পাওয়া যায়।]

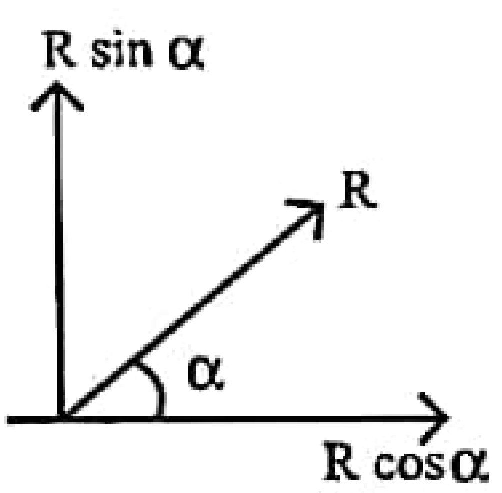
Case–04

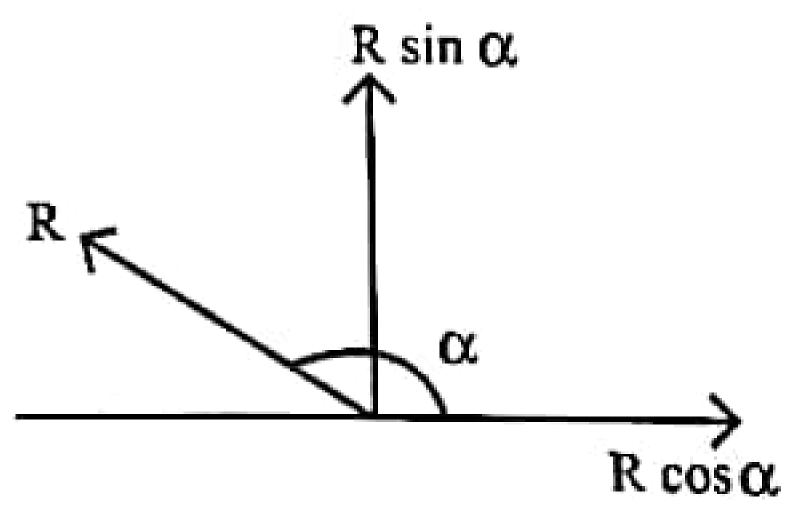


$\tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$ [θ হল $\vec{P}$ ভেক্টরের সাথে লব্ধির কোণ। আর $\vec{Q}$ হল অপর ভেক্টর।]

অর্থাৎ, দুটি ভেক্টরের সাধারণ কর্ণটি তাদের লব্ধি এবং অপর কর্ণটি তাদের অন্তর প্রকাশক।

Case–05





অর্থাৎ, যার সাথে কোণ সেই ভূমি। ভূমি বরাবর cosα এবং লম্ব বরাবর sinα।

Case–06 $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha}$

(i) $\alpha = 0$, $R_{max} = P + Q$ $(\rightarrow + \rightarrow) = \rightarrow$

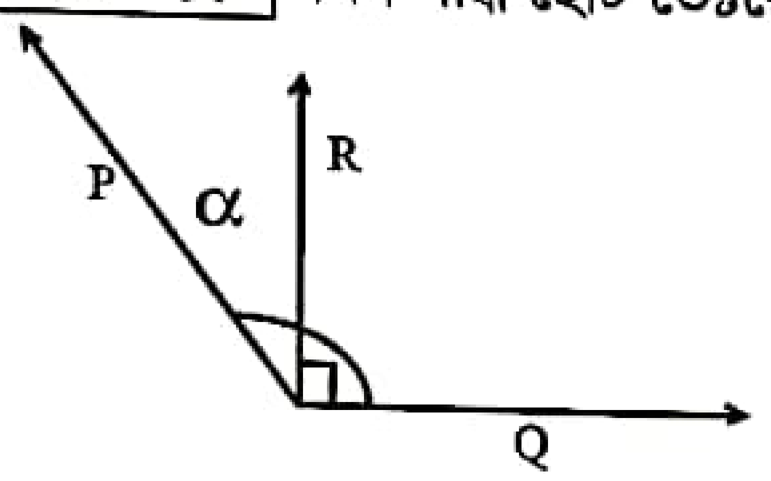
(ii) $\alpha = 180°$, $R_{min} = P \sim Q$ $(\rightarrow + \leftarrow) = \leftarrow$ $[P < Q]$

(iii) $\alpha = 90°$, $R_p = \sqrt{P^2 + Q^2}$ $(\rightarrow + \uparrow) = \nearrow$

(iv) $2R^2_{perpendicular} = R^2_{max} + R^2_{min}$

(v) $R_{min} \leq R \leq R_{max}$

Case–07 যখন লব্ধি ছোট ভেক্টরের সাথে সমকোণে থাকে i.e. $\theta = 90°$ এবং $[P > Q]$



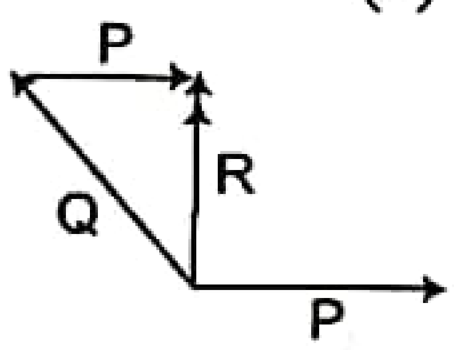
$\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{Q}{P}\right) = \cos^{-1}\left(-\frac{\text{ছোট}}{\text{বড়}}\right)$; $|R| = \sqrt{P^2 - Q^2}$

Related Questions:

01. দু'টি বলের লব্ধির মান 40N, বল দু'টির মধ্যে ছোট বলটির মান 30 N এবং এটি লব্ধি বলের লম্ব বরাবর ক্রিয়া করে। বড় বলটির মান কত? **[CU'15-16,Agri. Guccho'20-21]**

(a) 40N (b) 45N (c) 50 N (d) 60 N

সমাধান: (c);



$Q^2 = P^2 + R^2 = 30^2 + 40^2 \therefore Q = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50N$

02. দুটি সমমানের ভেক্টর একটি বিন্দুতে ক্রিয়াশীল। এদের লব্ধির মান যে কোন একটি ভেক্টরের মানের সমান। ভেক্টর দু'টির মধ্যবর্তী কোণ কত? **[DU'18-19,Agri. Guccho'20-21]**

(a) 120° (b) 180° (c) 90° (d) 0°

সমাধান: (a); $P^2 = P^2 + P^2 + 2P^2\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{1}{2} \therefore \alpha = 120°$

03. একটি বস্তুকে 50N বল দ্বারা পশ্চিম দিকে এবং 20N বল দ্বারা উত্তর দিকে টানা হচ্ছে। লব্ধি বলের মান কত হবে? **[JU'18-19]**

(a) 53.85N (b) 63.85N (c) 43.85N (d) 50.85N

সমাধান: **(a)**; $F = \sqrt{50^2 + 20^2} = 53.85$ N

04. যদি $|\vec{A} + \vec{B}| = |\vec{A} - \vec{B}|$ হয় তখন $\vec{A}$ এবং $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ হবে- **[CU'18-19]**

(a) 0 (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{2}$

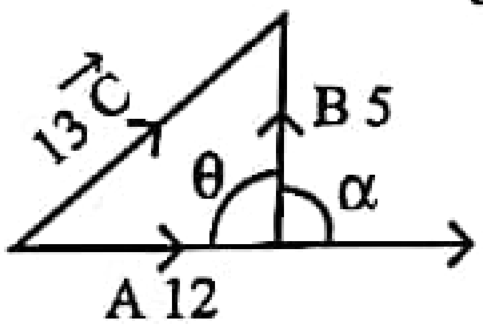
সমাধান: **(d)**; $|\vec{A} + \vec{B}|^2 = |\vec{A} - \vec{B}|^2 \Rightarrow A^2 + B^2 + 2AB\cos(A\hat{}B) = A^2 + B^2 - 2AB\cos(A\hat{}B)$

$\Rightarrow 4\cos(A\hat{}B) = 0 \Rightarrow AB = \frac{\pi}{2}$

05. ভেক্টর $\vec{A}, \vec{B}$ ও $\vec{C}$ এর মান যথাক্রমে 12, 5 ও 13 এবং $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$। $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয়ের মধ্যবর্তী কোণের মান কত? **[DU'17-18]**

(a) $\frac{\pi}{2}$ (b) $\frac{\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{4}$ (d) $\frac{\pi}{6}$

সমাধান: (a);



$13^2 = 5^2 + 12^2$; $\theta = 90°$। তাই, $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ $\alpha = 90°$ হবে। তাই উত্তর $\frac{\pi}{2}$

06. দুইটি বল, যার একটি 10N বিশিষ্ট এবং বলদ্বয় $120°$ কোণে ক্রিয়া করলে লব্ধির মান উল্লেখিত বলটির সমান হয়, অপর বলটির মান কত? [RU'17-18]

(a) 20 নিউটন (b) 0 অথবা 10 নিউটন (c) 15 নিউটন (d) 5 নিউটন

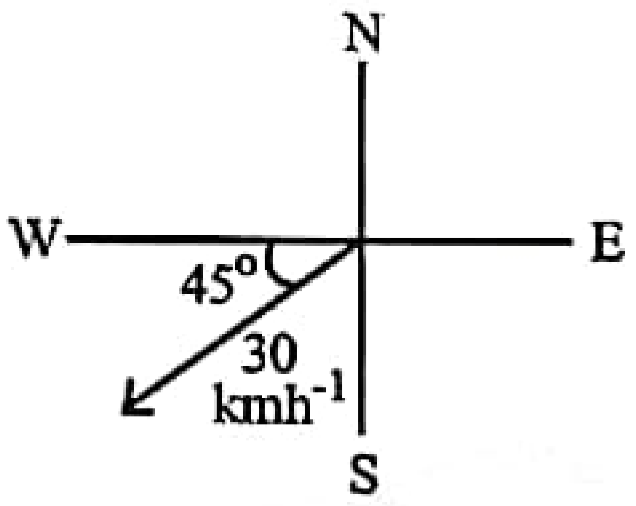
সমাধান: (b); $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\alpha$

$\Rightarrow P^2 = P^2 + 10^2 + 2P.10.\cos120° \Rightarrow Q(Q-10) = 0 \quad \therefore Q = 0, 10N$

07. কোনো স্থানে বাতাস $30km/hr$ বেগে পশ্চিম দিকের সাথে $45°$ কোণে দক্ষিণ দিকে বইছে। বাতাসে বেগের পূর্বমুখী উপাংশের মান কত km/hr ? [KU'17-18]

(a) 10.25 (b) 17.35 (c) 21.21 (d) 25.32

সমাধান: (c);



$\therefore$ বাতাসের বেগের পূর্বমুখী উপাংশের মান $= 30\cos(180° + 45°) = |-21.21kmh^{-1}| = 21.21\ kmh^{-1}$

08. ভেক্টর $\vec{P}$ ও $\vec{Q}$ পরস্পর লম্ব হলে ভেক্টর দুটির ক্ষেত্রে প্রযোজ্য হবে- [JU'15-16]

(a) $\vec{P} = \vec{Q}$ (b) $|\vec{P} + \vec{Q}| = |\vec{P} - \vec{Q}|$ (c) $|\vec{P}| = |-\vec{Q}|$ (d) কোনটিই নয়

সমাধান: (b); $\vec{P}$ এবং $\vec{Q}$ পরস্পর লম্ব হলে তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ $90°$।

$\therefore |\vec{P} + \vec{Q}| = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 90°} = \sqrt{P^2 + Q^2}$

$\therefore |\vec{P} - \vec{Q}| = \sqrt{P^2 + Q^2 - 2PQ\cos 90°} = \sqrt{P^2 + Q^2}$

অর্থাৎ, $|\vec{P} + \vec{Q}| = |\vec{P} - \vec{Q}|$

Question Type –04: Dot and Cross গুণন

Case–01 ডট গুণন = স্কেলার গুণন। এতে product স্কেলার হয়।

$\bar{A}.\bar{B} = AB\cos\theta$

$\hat{i}.\hat{i} = 1$

$\hat{i}.\hat{j} = 1.1\cos 90° = 0$

$\hat{j}.\hat{k} = 0$

$\hat{i}.\hat{j} = \hat{j}.\hat{i}$ তাই বিনিময় সূত্র মেনে চলে।

স্কেলার:
- A এর উপর B এর লম্ব অভিক্ষেপ $= B\cos\theta = \frac{A.B}{|A|}$
- B এর উপর A এর লম্ব অভিক্ষেপ $= A\cos\theta = \frac{A.B}{|B|}$

ভেক্টর:
- A বরাবর B এর উপাংশ $= \hat{a}.B\cos\theta = \left[\frac{A.B}{(|A|)^2}\right]\vec{A} \quad \left[\hat{a} = \frac{\bar{a}}{|a|}\right]$
- B বরাবর A এর উপাংশ $= \hat{b}.A\cos\theta = \left[\frac{A.B}{|B|^2}\right]\vec{B} \quad \left[\hat{b} = \frac{\bar{b}}{|b|}\right]$

$\bar{A}.\bar{B} = AB\cos\theta$

$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\frac{\bar{A}.\bar{B}}{|\bar{A}||\bar{B}|} = \cos^{-1}\frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}\sqrt{B_x^2+B_y^2+B_z^2}}$

যেকোন দিকের একক ভেক্টর দ্বারা ঐ দিকে কার্যরত কোন ভেক্টরের মানকে গুণ করলে ঐ দিকের প্রকৃত ভেক্টর পাওয়া যায়।

Case–02 Cross গুণন = ভেক্টর গুণন।

$\overline{A}\times\overline{B} = \hat{n}\, AB\sin\theta$

$\hat{n}$ = তলের (A ও B এর) সাথে লম্ব বরাবর একক ভেক্টর।

$\hat{i}\times\hat{i} = 1.1\sin 0 = 0$

$\hat{i}\times\hat{j} = \hat{k}$ | $\hat{i}\times\hat{j} \neq \hat{j}\times\hat{i}$

$\hat{j}\times\hat{i} = -\hat{k}$ | $\hat{i}\times\hat{j} = -(\hat{j}\times\hat{i})$

$\hat{j}\times\hat{k} = \hat{i}$ | তাই, এটি বিনিময়সূত্র মানে না।

Example: $\overline{A}.\overline{C} = 0$, $\overline{A}.\overline{B} = 0$ So, $\overline{A}\times(\overline{B}\times\overline{C}) = ?$

সমাধান: $B||\overline{C}$ কেননা $A\perp C, A\perp B$ $\therefore \overline{A}\times(\overline{B}\times\overline{C}) = \overline{A}\times\overline{A} = \underline{0}$ or, $\overline{A}\times(\overline{B}\times\overline{C}) = \overline{A}\times\hat{n}|\overline{B}||\overline{C}|\sin = \underline{0}$

Case–03 (i) A ও B পরস্পর লম্ব হলে $\overline{A}.\overline{B} = 0$

(ii) A ও B সমান্তরাল হলে $\overline{A}\times\overline{B} = \underline{0}$ বা, $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$

Example: $\overline{A} = 2x\hat{i} + 6\hat{j} + 12\hat{k}$, $\overline{B} = 8\hat{k} + 12x\hat{j} + 8\hat{i}$, $\overline{A}\perp\overline{B}$ হলে $x = ?$

সমাধান: $\overline{A}.\overline{B} = 0 \therefore 16x + 72x + 72 = 0 \therefore x = -\frac{72}{88} = \frac{-9}{11}$

Example: $\overline{A} = p\hat{i} + 8\hat{j} + q\hat{k}$, $\overline{B} = 2\hat{i} + 16\hat{j} + 3\hat{k}$, $\overline{A}||\overline{B}$ হলে $p, q = ?$

সমাধান: $\frac{p}{2} = \frac{8}{16} = \frac{q}{3}$; $p = 1$, $q = 1.5$

Example: $\frac{d}{dx}(\overline{K}.\overline{U}) = \overline{k}.\frac{d}{dx}(\overline{U}) + \frac{d}{dx}(\overline{K}).\overline{U}$

Related Questions:

01. a এর মান কত হলে $\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ এবং $\vec{B} = a\hat{i} + \hat{j}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হবে? [JU'20-21,DU'20-21] [JnU'17-18]

(a) 0 (b) $\frac{7}{4}$ (c) −1 (d) 2

সমাধান: (c); ভেক্টরদ্বয় লম্ব হলে তাদের ডট গুণন 0 হবে। $\vec{A}.\vec{B} = 0 \Rightarrow 2a + 2 + 0 = 0 \Rightarrow a = -1$

02. যদি $2\hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$ ও $-4\hat{i} - 6\hat{j} - \lambda\hat{k}$ দুটি ভেক্টর পরস্পর সমান্তরাল হয়, তাহলে λ-এর মান কত হবে? [JU'16-17,RU'20-2

(a) 2 (b) −2 (c) 0.5 (d) −0.5

সমাধান: (a); $\frac{2}{-4} = \frac{3}{-6} = \frac{1}{-\lambda} \Rightarrow -\frac{1}{2} = -\frac{1}{\lambda} \therefore \lambda = 2$

03. $\underline{A}$ এবং $\underline{B}$ ভেক্টরদ্বয় কখন $\underline{A}.\underline{B} = -AB$ হবে? [CU'20-21]

(a) ভেক্টরদ্বয় সমান্তরাল এবং একই দিকে (b) ভেক্টরদ্বয় সমান্তরাল কিন্তু বিপরীতমুখী

(c) ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব (d) কোনটিই নয়

সমাধান: (b); $\overline{A}.\overline{B} = -AB \Rightarrow AB\cos\theta = -AB \Rightarrow \cos\theta = -1 \therefore \theta = 180°$

04. যদি $\vec{P} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ এবং $\vec{Q} = 4\hat{j} - \hat{k}$ হয়, তবে তাদের স্কেলার গুণন কি হয়? [JU'18-19,CU'20-21]

(a) 7 (b) 3 (c) 9 (d) 11

সমাধান: (a); $\vec{P}.\vec{Q} = (2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}).(4\hat{j} - \hat{k}) = 4 + 3 = 7$

05. দুইটি ভেক্টর $\vec{A} = 3\hat{i} - 3\hat{j}$ এবং $\vec{B} = 5\hat{i} + 5\hat{k}$ এর মধ্যবর্তী কোণ কত? [JU'16-17,DU'19-20]

(a) 60° (b) 30° (c) 45° (d) 90°

সমাধান: (a); $\cos\theta = \frac{\overline{A}.\overline{B}}{|\overline{A}||\overline{B}|} = \frac{(3\hat{i}-3\hat{j}).(5\hat{i}+5\hat{k})}{\sqrt{3^2+3^2}\sqrt{5^2+5^2}} = \frac{15}{3\sqrt{2}.5\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \therefore \theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60°$

06. $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ ভেক্টরদ্বয় পরস্পর লম্ব হলে নিচের কোনটি সত্য হবে? [RU'19-20]

(a) $|\vec{A}+\vec{B}| > |\vec{A}-\vec{B}|$ (b) $|\vec{A}+\vec{B}| < |\vec{A}-\vec{B}|$

(c) $|\vec{A}+\vec{B}| = |\vec{A}-\vec{B}|$ (d) উপরের সব কয়টি হতে পারে

সমাধান: (c); $|\vec{A}+\vec{B}| = \sqrt{|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 + 2|\vec{A}||\vec{B}|\cos 90°} = \sqrt{|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2}$

$|\vec{A}-\vec{B}| = \sqrt{|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - 2|\vec{A}||\vec{B}|\cos 90°} = \sqrt{|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2} \therefore |\vec{A}+\vec{B}| = |\vec{A}-\vec{B}|$

07. দু'টি সমান্তরাল ভেক্টর $\vec{A} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ এবং $\vec{B} = 12\hat{i} + m\hat{j} + 16\hat{k}$ হলে m =? [RU'19-20]

(a) 4 (b) −4 (c) 8 (d) −8

সমাধান: (d); $\frac{3}{12} = \frac{-2}{m} = \frac{4}{16} \therefore 3m = -24 \therefore m = -8$

08. তিনটি ভেক্টর $\vec{a}, \vec{b}$ ও $\vec{c}$, যাদের মান যথাক্রমে 4, 3 এবং 5, যোগ করলে শূন্য হয় অর্থাৎ $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$। তাহলে $|\vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b})|$ এর মান হলো- [DU'18-19]

(a) 12 (b) 60 (c) 25 (d) 15

সমাধান: (b); $|\vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b})| = |\vec{c} \times (ab\sin 90°\, \hat{\eta})| = |abc \sin 90°\, \hat{\eta}| = abc = 3 \times 4 \times 5 = 60$

উল্লেখ্য 3, 4, 5 পিথাগোরিয়ান ত্রয়ী।

09. ক্রিয়া ও প্রতিক্রিয়ার মধ্যবর্তী কোণের মান কত? [Ans: d][JU'18-19]

(a) 0° (b) 60° (c) 90° (d) 180°

10. একটি কণার উপর $\vec{F} = (10\hat{i} + 10\hat{j} + 10\hat{k})N$ বল প্রয়োগ করলে কণাটির সরণ হয় $\vec{r} = (2\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k})m$। বল কর্তৃক সম্পাদিত কাজ কত হবে? [DU'17-18]

(a) 20 J (b) 30 J (c) 10 J (d) 40 J

সমাধান: (a); $W = \vec{F}.\vec{r} = (10\hat{i} + 10\hat{j} + 10\hat{k})(2\hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}) = 20 + 20 - 20 = 20J$

11. যদি $\vec{F} = 8\hat{i} + 2\hat{j}$ এবং $\vec{r} = 6\hat{i} + 8\hat{k}$ হয়, তবে $\vec{F}.\vec{r}$ কত হবে? [RU'17-18]

(a) 48 (b) 16 (c) 32 (d) 64

সমাধান: (a); $\vec{F}.\vec{r} = 8 \times 6 + 2 \times 0 + 0 \times 8 = 48$

12. কোন ভেক্টরটি $\vec{A} = 4\hat{i} + 3\hat{j}$ এর উপর লম্ব? [Ans: c] [CU'17-18]

(a) $3\hat{i} + 4\hat{j}$ (b) $6\hat{i}$ (c) $7\hat{k}$ (d) $4\hat{i} - 3\hat{j}$

13. $|\vec{A}.\vec{B}| = |\vec{A} \times \vec{B}|$ হলে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যকার কোণ কত? [CU'14-15,JnU'16-17]

(a) π (b) $\frac{\pi}{4}$ (c) $\frac{\pi}{6}$ (d) 2π

সমাধান: (b); $AB\cos\theta = AB\sin\theta \Rightarrow \tan\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

14. $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$ হলে কোনটি সঠিক? [Ans: a][KU'16-17]

(a) $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ পরস্পর লম্ব (b) $\vec{A} = 0$ (c) $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ পরস্পর সমান্তরাল (d) $\vec{B} = 0$

15. যদি $\vec{A} = -\vec{B}$ হয়, তবে $\vec{A} \times \vec{B}$ এর মান কত? [DU'04-05,RU'13-14]

(a) A^2 (b) 1 (c) 0 (d) $-A^2$

সমাধান: (c); $\vec{A} = -\vec{B}$ হলে $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ এর মধ্যবর্তী কোণ = 180° $\therefore \vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \sin 180° = 0$

16. দুইটি ভেক্টর $\vec{A} = 3.0\hat{i} - 3.0\hat{j}$ এবং $\vec{B} = 5.0\hat{i} + 5.0\hat{k}$ এর মধ্যবর্তী কোণ কত? [DU'14-15]

(a) 60° (b) 30° (c)45° (d) 90°

সমাধান: (a); $\vec{A}.\vec{B} = 15; A = 3\sqrt{2}, B = 5\sqrt{2} \therefore \cos\theta = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{AB} = \frac{15}{3\sqrt{2}.5\sqrt{2}} = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ \therefore \theta = 60^\circ$

17. যদি $\vec{A}, \vec{B}$, ও $\vec{C}$ তিনটি ভেক্টর রাশি (Vector quantity) এবং $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ হয় তাহলে $\vec{C}$ এর দিক হবে-

(a) $\vec{A}$ বরাবর (b) $\vec{B}$ বরাবর [Ans: c] [JnU'12-13,14-15]

(c) $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ উভয়ের লম্ব (perpendicular) বরাবর (d) $\vec{A}$ ও $\vec{B}$ উভয়ের সমান্তরাল (parallel) বরাবর

18. একক ভেক্টর (Unit vector) এর ক্ষেত্রে কোন মানটি সঠিক? [Ans: c][JnU'13-14]

(a) $\hat{i}\times\hat{j}=1$ (b) $\hat{i}\times\hat{j}=0$ (c) $\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k}$ (d) $\hat{i}\times\hat{j}=-1$

19. $\hat{j}.(2\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k})$ এর মান কত? [CU'13-14]

(a) 2 (b) –3 (c) 1 (d) –2

সমাধান: (b); $\hat{j}.(2\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k}) = (2\hat{j}.\hat{i}-3\hat{j}.\hat{j}+\hat{j}.\hat{k}) = -3$

Written

01. $\overline{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$ এবং $\overline{B} = m\hat{i} + 2\hat{j} + 10\hat{k}$। m এর মান কত হলে ভেক্টরদ্বয় (vectors) পরস্পরের উপর লম্ব (perpendicular) হবে? [JnU'18-19]

সমাধান: শর্তমতে, $\vec{A}.\vec{B} = 0 \Rightarrow (2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}).(m\hat{i} + 2\hat{j} + 10\hat{k}) = 0 \Rightarrow 2m + 6 - 50 = 0 \therefore m = 22$

Question Type-05: ক্ষেত্রফল

(i) $\overline{A}, \overline{B}$ দুটি সন্নিহিত বাহু হলে সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= |\overline{A}\times\overline{B}|$

(ii) $\overline{d}_1, \overline{d}_2$ সামান্তরিকের দুটি কর্ণ হলে ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\overline{d}_1\times\overline{d}_2|$

(iii) $\overline{A}$ ও $\overline{B}$ ত্রিভুজের দুটি সন্নিহিত বাহু হলে ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}|\overline{A}\times\overline{B}|$

(iv) $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ কোন ঘনবস্তুর তিনটি ধার হলে আয়তন $= \overline{A}.(\overline{B}\times\overline{C}) = \overline{B}.(\overline{A}\times\overline{C}) = \overline{C}.(\overline{A}\times\overline{B})$

= এদের নিয়ে গঠিত নির্ণায়কের মান

(v) $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ তিনটি ভেক্টর সমতলীয় হবার শর্ত, আয়তন = 0 হওয়া, অর্থাৎ $\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = 0$

Related Questions:

01. সামান্তরিকের দুটি সন্নিহিত বাহু $P = 4i - 4j + k$ এবং $Q = 2i - 2j - k$ হলে এর ক্ষেত্রফল কত? [JU'19-20]

(a) 6.5 একক (b) 7.5 একক (c) 8.5 একক (d) 9.5 একক

সমাধান: (c); $\vec{P} \times \vec{Q} = +6\hat{i} + 6\hat{j} \therefore$ ক্ষেত্রফল $= \sqrt{6^2 + 6^2} = 8.485 \approx 8.5$

02. বল প্রয়োগে সর্বোচ্চ কাজ হবে যখন বল সরণের সাথে ক্রিয়া করে- [Ans: d][JU'18-19]

(a) 45° কোণে (b) 30° কোণে (c) লম্ব বরাবর (d) একই দিকে

03. একটি সামান্তরিকের কর্ণ দুইটি যথাক্রমে $\vec{A} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ ও $\vec{B} = \hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ হলে, সামন্তরিকের ক্ষেত্রফল কত?

(a) 5.59 (b) 6.87 (c) 7.83 (d) 8.79 **[KU'18-19]**

সমাধান: (a); $\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -10\hat{j} - 5\hat{k}$; Area $= \frac{1}{2}|\vec{A} \times \vec{B}| = \frac{1}{2}\sqrt{10^2 + 5^2} = 5.59$

04. যদি $P = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ এবং $Q = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ একটি সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহু নির্দেশ করে, তাহলে উপযুক্ত এককে সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর। **[DU'15-16]**

(a) $2\sqrt{2}$ (b) 2 (c) 1 (d) $\sqrt{2}$

সমাধান: (a); $\vec{P} \times \vec{Q} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \hat{i}(1-1) - \hat{j}(-1-1) + \hat{k}(1+1) = 2\hat{j} + 2\hat{k}$

$\therefore$ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= |\vec{P} \times \vec{Q}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

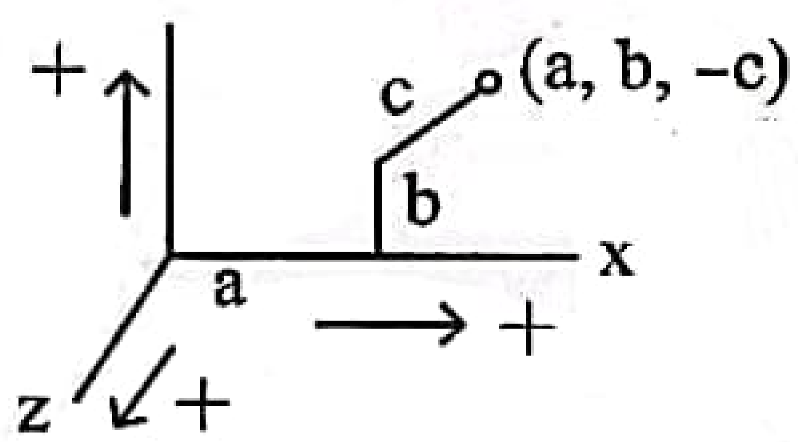
Question Type–06: আয়ত একক ভেক্টর এর অক্ষের সাথে সম্পর্ক

$A = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$

x অক্ষের সাথে A এর কোণ $\alpha = \cos^{-1}\frac{a_x}{|A|}$

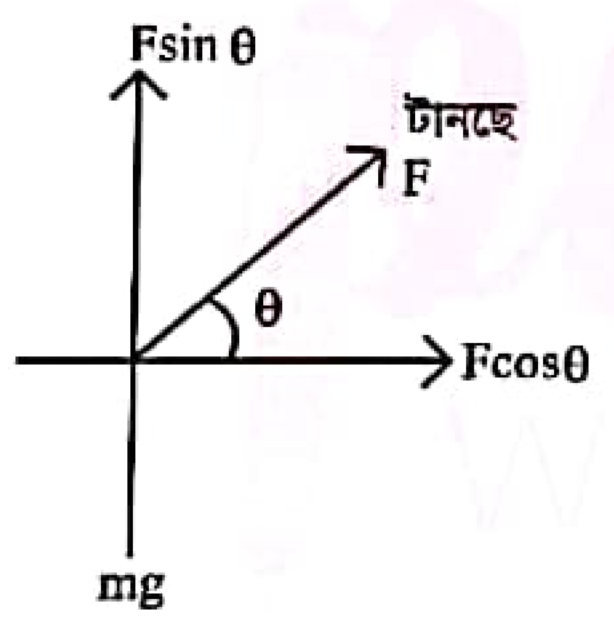
y অক্ষের সাথে $\beta = \cos^{-1}\frac{a_y}{|A|}$

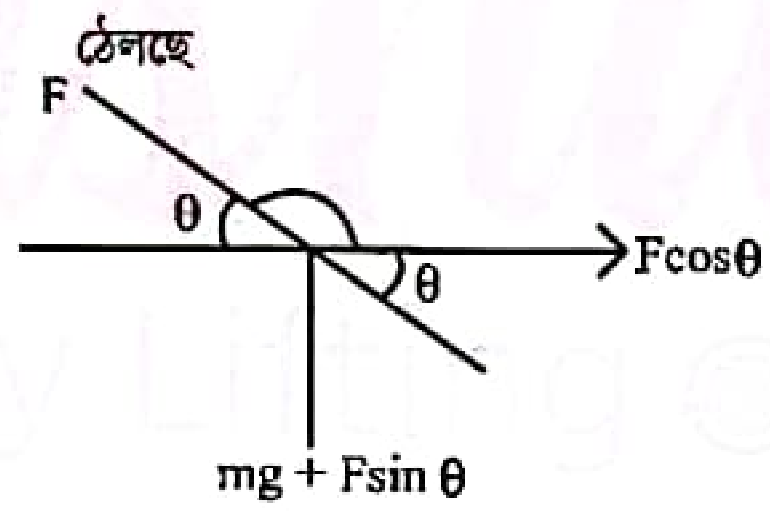
z অক্ষের সাথে $\gamma = \cos^{-1}\frac{a_z}{|A|}$



$\star$ $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

Question Type –07: লন রোলার





আপাত ওজন, $W = mg - F\sin\theta$ $W = mg + F\sin\theta$

$\therefore$ লনরোলার ঠেলার চেয়ে টানা সহজ।

কিন্তু, ক্রিকেট পিচ সমান করতে বেশি বল প্রয়োজন তাই পিচ সমান করতে ঠেলা বেশি কার্যকর।

Related Questions:

01. একটি কাঠের খণ্ডকে আনুভূমিকের সাথে 60° কোণে 200N বল দ্বারা টানা হচ্ছে। বস্তুটির উপর আনুভূমিকের দিকে কার্যকরী বল কত?

(a) 200N (b) 100N (c) 174N (d) Zero **[DU'13-14]**

সমাধান: (b); $F = F'\cos60° = 200 \times \cos60° = 100N$

Question Type –08: বৃষ্টি বিষয়ক

(i) এখানে 2 ধরনের বাতাসের বেগ থাকে

(a) বাহ্যিক (ঝড় বৃষ্টির কারণে) (b) অভ্যন্তরীণ (গাড়ির বেগের সমান এবং বিপরীতমুখী)

(ii) বৃষ্টি always নিচে খাড়া পড়তে চায়

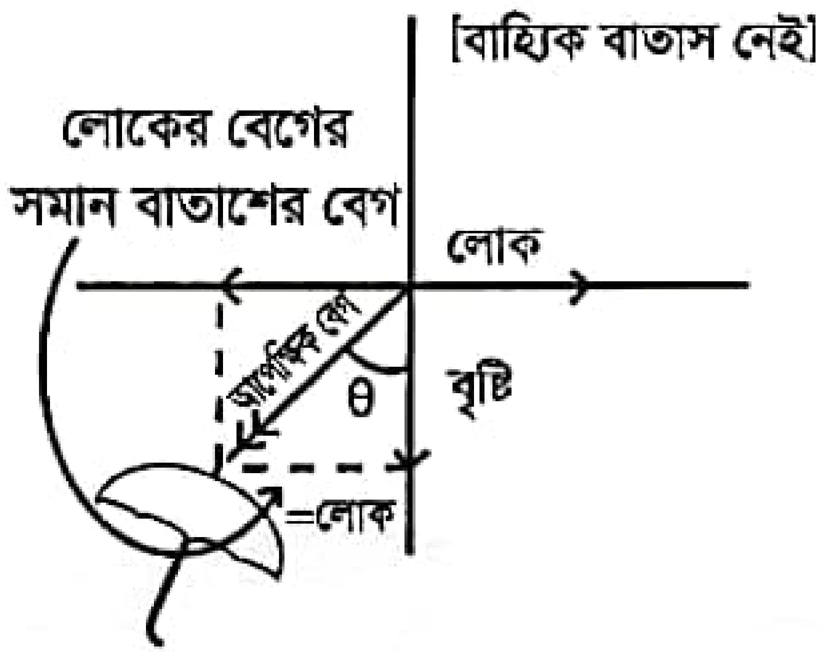
(iii) ছাতা ধরার কোণ উল্লম্বের সাথে

চিত্র হতে $\tan\theta = \frac{\text{লোকের বেগ}}{\text{বৃষ্টির বেগ}}$

$\sin\theta = \frac{\text{লোকের বেগ}}{\text{আঃ বেগ}}$

$\cos\theta = \frac{\text{বৃষ্টির বেগ}}{\text{আঃ বেগ}}$

[θ উল্লম্বের সাথে কোণ]



বাহ্যিক বাতাস থাকলে কাঁচ ভেজাভেজির শর্ত: বাতাসের (বাহ্যিক) দিক লোকের বেগের দিকে হলে–

(i) $v_{\text{বাতাস}} > v_{\text{লোক}}$ → পেছনের কাঁচ ভিজবে

(ii) $v_{\text{বাতাস}} < v_{\text{লোক}}$ → সামনের কাঁচ ভিজবে

(iii) $v_{\text{বাতাস}} = v_{\text{লোক}}$ → দুদিকই ভিজবে

বাহ্যিক বাতাস বিপরীতমুখী হলে তিনটি ক্ষেত্রেই সামনের কাঁচ ভিজবে।

Related Questions:

01. বৃষ্টি চলাকালীন একজন লোক $10ms^{-1}$ বেগে চলছে। যদি বৃষ্টি $10ms^{-1}$ বেগে খাড়া নিচের দিকে পড়ে তবে ঐ লোকটিকে কোন দিকে ছাতা ধরতে হবে? **[KU'19-20]**

(a) অনুভূমিকের সাথে 40° কোণে (b) লম্বের সাথে 145° কোণে

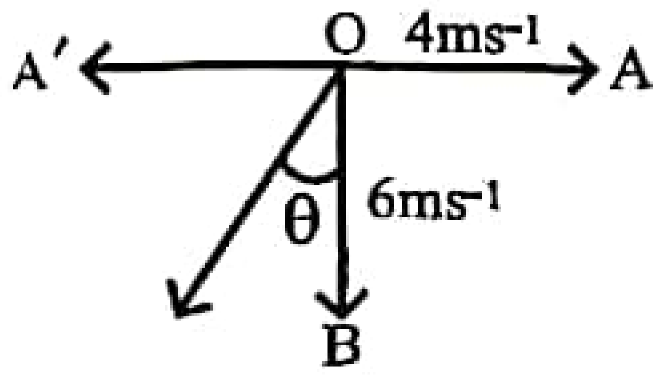
(c) অনুভূমিকের সাথে 45° কোণে (d) অনুভূমিকের সাথে 30° কোণে

সমাধান: (c); $\tan\theta = \frac{10\sin 90°}{10+10\cos 90°} = 1 \therefore \theta = 45°$

Written

01. এক ব্যক্তি বৃষ্টির মাঝে 4m/s বেগে দৌড়াচ্ছে। বৃষ্টির বেগ 6m/s, লম্বভাবে। ছাতার কৌণিক অবস্থান কত হলে ব্যক্তিটি বৃষ্টি থেকে নিজেকে রক্ষা করতে পারবে? **[KU'15-16]**

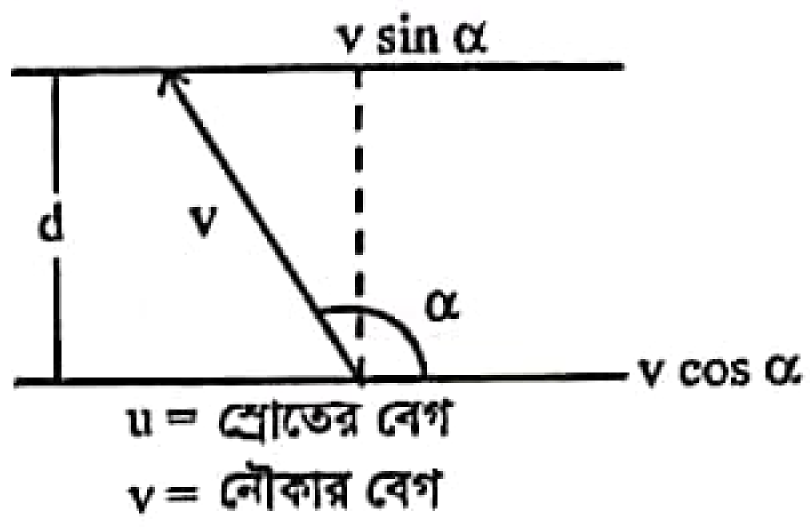
সমাধান:



ধরি, বৃষ্টি থেকে বাঁচতে হলে উল্লম্বের সাথে θ কোণে ছাতা ধরতে হবে। তাহলে, $\tan\theta = \frac{4}{6} \therefore \theta = 33.69°$

∴ বৃষ্টি থেকে নিজেকে রক্ষা করতে হলে উল্লম্বের সাথে 33.69° কোণে ছাতা ধরতে হবে। (Ans.)

Question Type–09: নদী



(i) যদি $a = 0$ হয় তবে $s = vt$ প্রয়োগ

(ii) যদি $a \neq 0$ হয় তবে $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ প্রয়োগ

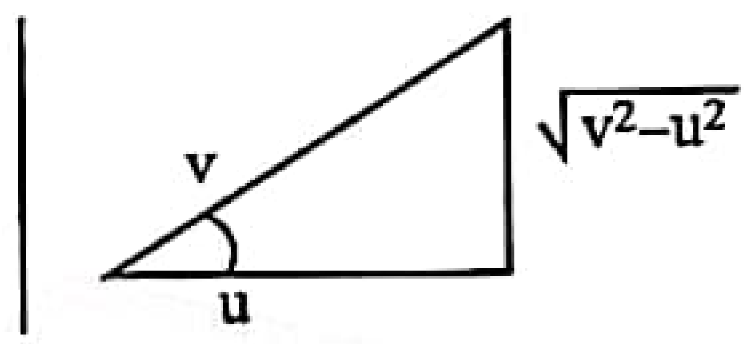
নদী পার হতে গেলে কেবলমাত্র কার্যকর বেগের হিসেবই যথেষ্ট।

(i) নদী পার হবার সময়, $t = \frac{d}{d \text{ বরাবর } v} = \frac{d}{v\sin\alpha}$

(ii) t_{min} when $\sin\alpha = 1$, $\alpha = 90°$; $t_{min} = \frac{d}{v}$

(iii) S_{min} যদি নদী সোজাসুজি পার হয়। এই জন্যে পার বরাবর বেগ-

$u + v\cos\alpha = 0$; $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-u}{v}\right)$ $\therefore S_{min} = d$



(iv) For S_{min} , $t = \frac{d}{v\sin\left(\cos^{-1}\left(-\frac{u}{v}\right)\right)} = \frac{d}{v\sin\left(\sin^{-1}\frac{\sqrt{v^2-u^2}}{v}\right)} = \frac{d}{\sqrt{v^2-u^2}}$

Related Questions:

01. সুরমা নদীতে স্রোতের বেগ $3kmh^{-1}$। এক ব্যক্তি $5\ kmh^{-1}$ বেগে নৌকা চালাতে সক্ষম। নদীর প্রস্থ 0.5km। স্রোতের সঙ্গে কত ডিগ্রী কোণে নৌকা চালালে সে 12min এ নদীর অপরপাড়ে একটি নির্দিষ্ট ঘাটে পৌঁছাতে পারবে? **[SUST'19-20]**

(a) 50 (b) 59 (c) 45 (d) 30 (e) 35

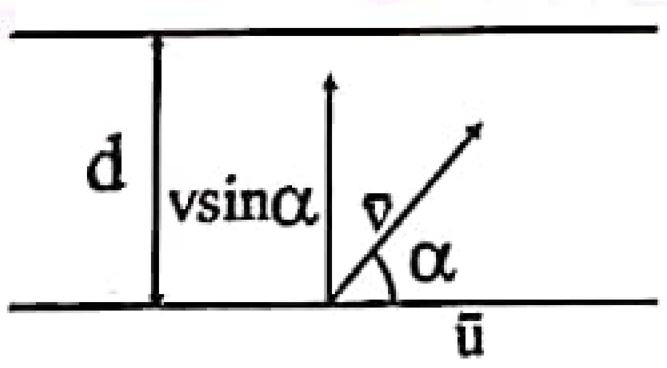
সমাধান: (d); $t = \frac{d}{u\sin\alpha}$ [u = নৌকার বেগ]

$\therefore \sin\alpha = \frac{d}{ut} = \frac{0.5}{5\times\frac{12}{60}} = \frac{1}{2}$ $\therefore \alpha = 30°$

02. একটি খরস্রোতা নদী সবচেয়ে কম সময়ে পার হতে একটি নৌকার কোন দিকে যাওয়া উচিত? **[JU'12-13]**

(a) Opposite shore (b) somewhat upstream (c) somewhat downstream (d) none

সমাধান: (a);



Here, to cross the river the component vsinα is necessary.

t = time to cross river $\therefore t = \frac{d}{v\sin\alpha}$

$\therefore t_{min} = \frac{d}{v}$ where $\sin\alpha = 1$ $\therefore \alpha = 90°$

∴ For minimum time, one has to start for opposite shore.